

0a-1662

**Mechanik der Baukunst**  
(Ingenieur-Mechanik)  
oder  
Anwendung der Mechanik  
auf das  
**Gleichgewicht von Bau-Constructionen.**

Von  
(Louis-Navie-Henri) **Navier,**

Mitglied des Instituts, Professor an der polytechnischen Schule in Paris etc.

(corrig.) Nebst einem Anhang, bearbeitet von  
**G. Westphal,**

Ingenieur und Director der  
Maschinenbauschule in  
Hannover.

(Seite 409 bis 505.).

**A. Foeppl,**

Ingenieur und Oberlehrer an der  
städt. Gewerbeschule zu  
Leipzig.

(Seite 506 bis 589.)

Uebersetzung aus dem Französischen von G. Westphal.

Mit einer Vorrede

von

**Dr. M. Rühlmann,**

Professor an der polytechnischen Schule in Hannover.

Zweite Auflage der Uebersetzung nebst bedeutend  
erweitertem Anhang.

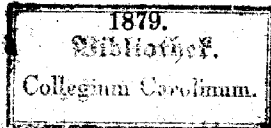
NZ. 47. 392

Mit vielen Holzschnitten.

**Hannover.**

Helwing'sche Verlags-Buchhandlung.

(Th. Mierzinsky, Egl. Hofbuchhändler).







## Vorwort.

---

Seit 1845 benutzte ich bei meinen Vorträgen über Mechanik der Baukunst, an der polytechnischen Schule in Hannover, die französische Ausgabe gegenwärtigen Werkes, über dessen Brauchbarkeit und Vortrefflichkeit unter den Fachmännern, die sich bemühten es genau kennen zu lernen, nur eine Stimme ist. Von gedachter Zeit an war meine Absicht, es in deutscher Sprache für den Druck zu bearbeiten und mit Noten zu versehen, welche sich insbesondere auf die Fortschritte beziehen sollten, welche sowohl der wissenschaftliche wie praktische Theil der Ingenieurmechanik seit Navier's Tode gemacht hatte. Leider wurde ich von der Ausführung dieses Vorsatzes durch überhäufte, wiederkehrende anderweitige Arbeiten fortwährend abgehalten, so dass der beste Wille nicht zur That werden konnte.

Rechterfreulich war es mir daher, als Herr Westphal, einer der tüchtigsten meiner ehemaligen Schüler, sich erbot, die Uebersetzung zu besorgen.

Um nun hierbei auch den deutschen Freunden und Verehrern Navier's das Original treu zu bewahren, ist Herr Westphal meinem Rathe gefolgt und hat alle wünschenswerthen Zusätze in einem besondern Anhang beigefügt, ohne die Arbeit Navier's im Mindesten zu verändern.

Wenn dabei der gedachte Anhang nicht überall die vielleicht von manchem Leser gewünschte Vollständigkeit

#### IV

erhalten hat — was insbesondere in Betreff der auch im Original gänzlich fehlenden Theorie der Kettenbrücken, sowie der neueren Arbeiten über Theorie der Gewölbe, der Fall sein dürfte — so liegt der Grund hiervon theils in der Herrn Westphal zugemessenen Zeit, theils darin, dass der Preis des Buches möglichst niedrig gehalten werden sollte.

Diesem Uebelstande einigermaßen abzuhelpen, hat Herr Westphal in seiner Vorrede eine ziemlich vollständige Literatur (mit theilweiser Kritik) der bemerkten Gegenstände aufgeführt, die ich der besonderen Beachtung empfehlen möchte.

Die Gelegenheit benutzend, erlaube ich mir schliesslich über Navier selbst, so wie über seine zahlreichen Werke Nachfolgendes beizufügen, was ich besonders deshalb nicht unterlassen wollte, als ich selbst dem Studium der Schriften dieses ausgezeichneten Mannes — der, als seltenes Beispiel, den Ingenieur, den Lehrer und den Gelehrten in gleich hohem Grade in sich vereinigte — unendlich viel verdanke und in Deutschland weder über sein spezielles Leben, noch über die Mannigfaltigkeit seiner wissenschaftlichen und technischen Arbeiten, überall die verdiente Kenntniss verbreitet sein dürfte.

---

Louis-Marie-Henri Navier, Offizier der Ehrenlegion, Mitglied der Academie der Wissenschaften in Paris und Abtheilungsinspector des Weg- und Brückenbaues, wurde am 15. Februar 1785 zu Dijon geboren, wo sein Vater als angesehener Advocat lebte, den er jedoch schon im 14. Jahre seines Alters verlor.

Zum grössten Theile ersetzt wurde ihm dieser Verlust durch seinen würdigen Onkel, den berühmten Gauthey, Generalinspector des Strassen- und Brückenbaues, dessen Sorgfalt und Eifer er es mit verdankte, dass er bereits 1802 das schwere Examen zur

Aufnahme in die Pariser école polytechnique glänzend bestand, 1804 in die école des ponts et chaussées eintreten konnte, und sich schon 1808 den Grad eines ordentlichen Ingenieurs für Strassen- und Brückenbau erwarb.

In dieser Stellung machte er sich der technisch-mathematischen Welt (1813) zuerst durch die Herausgabe von Gauthey's, <sup>1)</sup> *Traité des ponts*, so wie durch Bélidor's *Science des ingénieurs* (1813) und des ersten Bandes der *Architecture hydraulique* (1819) desselben Autors bekannt, denen bald jene schöne Reihe von eben so originellen als werthvollen Arbeiten folgte, womit Navier Technik und Wissenschaft bereicherte. In ersterer Hinsicht muss Navier jedenfalls zu den Männern (Prony, Poncelet und Coriolis) gezählt werden, die in einer vorher nicht gekannten Weise die Anwendung der Mechanik auf Baukunst und Maschinen zeigten und die Schöpfer der heutigen industriellen und Ingenieur-Mechanik genannt werden müssen.

Im Jahre 1819 wurde Navier Professeur suppléant der Mechanik an der école des ponts et chaussées und bald nach dem Erscheinen (1823) seines jetzt noch unübertroffenen Werkes: *Mémoire sur les ponts suspendus*, nämlich den 26. Januar 1824, Mitglied der Académie der Wissenschaften in Paris.

Bereits früher mit mehrfachen praktischen Arbeiten betraut, (die Brücken von Choisy, Asnières, Argenteuil über die Seine und mehrere andere Bauten sind sein Werk), übertrug man ihm den Bau einer Kettenbrücke (155 Meter Spannweite) über die Seine in Paris, welche zur Verbindung der Esplanade des Invaliden-hauses und der Champs-Élysées dienen sollte, wobei er (bekanntlich) das Unglück erleben musste, dass noch vor der Vollendung der Brücke einer der Landpfeiler etwas zu weichen begann und, durch andere ungünstige Umstände veranlasst, die ganze Brücke wieder abgetragen wurde, ein Ereigniss, welches nach manchen Seiten hin über Navier mindestens so lange ein falsches Urtheil erzeugte, bis Prony die ganze Sache in klarer Weise auseinanderetzte. <sup>2)</sup>

1830 wurde Navier Professor der Analysis und Mechanik an der école royale polytechnique, in welcher Stellung er sich durch die Methode und Klarheit seines Vortrags die innigste Liebe und

1) Gestorben den 14. Juli 1807.

2) Prony äussert sich im Résumé seines Urtheils über das ganze Ereigniss wörtlich folgendermassen: 1. Que l'événement du pont des Invalides devait être considéré seulement comme un de ces accidents plus ou moins graves que les ingénieurs rencontrent souvent dans les grands travaux: 2. Que le remède était aussi facile que peu dispendieux, puisqu'il s'agissait seulement d'augmenter la résistance des contre-forts, etc.

(Annales des ponts et chaussées 1837. 1 Semestre p. 13.)

## VI

höchste Verehrung seiner Schüler und Zuhörer erwarb.

Leider ereilte ihn schon am 23. August 1836 der Tod, viel zu früh eben so wohl für seine Gattin und beiden Töchter, wie für die Wissenschaft, in deren Kreise sein Name niemals in Vergessenheit gerathen wird.

Navier's vorzüglichste schriftstellerische Arbeiten sind folgende:

### I. Selbstständige im Buchhandel erschienene Werke.

1. *Projet pour l'établissement d'une gare à Choisy, contenant l'exposé des travaux proposés ou entrepris jusqu'à présent à Paris pour mettre les bateaux à l'abri des débâcles, suivi d'une notice descriptive du pont de Choisy, etc.* Paris, 1811, in-4.
2. *Examen de la tontine perpétuelle d'amortissement fondée par M. Janson de Sailli etc.; autorisée par ordonnance du roi.* Paris, 1819, in-8.
3. *Mémoire sur les ponts suspendus et Rapport à M. Becquey, directeur général des ponts-et-chaussées et des mines, Paris, 1824, in-4 et atlas in fol.*

(Eine zweite Ausgabe folgte 1830).

4. *De l'entreprise du pont des Invalides.* Paris, 1827, in-8.
5. *De l'établissement d'un chemin de fer entre Paris et le Havre.* Havre, 1826, in-8.
6. *Résumé des leçons données à l'école des ponts-et-chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.*

Première Partie, contenant les leçons sur la résistance des matériaux, et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente. Paris, 1826, en-8., avec 5 planches.

(Die zweite Ausgabe, nach welcher gegenwärtige deutsche Bearbeitung erfolgte, erschien 1833.)

Deuxième et Troisième Partie, contenant les leçons sur le mouvement des eaux, et les leçons sur l'établissement des machines. Paris, 1838, in-8., avec 9 planches.

7. *Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique.* Paris 1840 et 1841, 2 vol in-8.

(Die Herausgabe wurde von Liouville und Catalan, nach den lithographirten Heften von Navier, besorgt).

## VII

8. Résumé des leçons de mécanique données à l'école polytechnique. Paris, 1841, 2 vol. in-8.  
(Gleichfalls Abdruck der hinterlassenen lithographirten Hefte).

### II. Abhandlungen, welche in den Sitzungen der Pariser Academie der Wissenschaften verlesen und resp. in deren Schriften aufgenommen wurden.

1. Mémoire sur les roues à élever l'eau, lu à l'Académie des sciences, le 2 novembre 1818, approuvé pour être imprimé dans les Savants étrangers, le 11 janvier 1819, sur le rapport de M. M. de Prony, Fourie et Dupin, rapporteurs.
2. Mémoire sur la flexion des lames élastiques, lu etc. le 29 novembre 1819, approuvé pour être imprimé dans les Savants étrangers, le 4 septembre 1820, sur le rapport de M. M. Poinso, Dupin et de Prony, rapporteurs.
3. Mémoire sur la flexion des plans élastiques, lu le 14 août 1820.  
(Noch nicht abgedruckt. Ein Auszug findet sich in dem Bulletin de la société philomatique, juin et juillet 1823, so wie § 638 des Werkes).
4. Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques lu le 14 mai 1821.  
Abgedruckt in den Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France. Tome VII. pag. 375. Année 1827.
5. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, lu le 18 mars 1822. Abgedruckt ebendasselbst Tome VI. p. 389. Année 1823. (Ein Auszug in den Annales de chim. et de phys. mars 1822, Tome 19, p. 244).
6. Continuation des recherches sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules, lu le 16 décembre 1822. (Noch ungedruckt).
7. Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques dans les vases et les tuyaux de conduite, lu le 1 juin 1829.  
Abgedruckt in den Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France. Tome IX. p. 311. 1830.  
(Ein Paragraph (4) dieser Abhandlung ist in den Annales de chimie et de physique vom April 1827 Tome 34. p. 400 abgedruckt.)
8. Rapport sur un mémoire de M. Chabrier, concernant les moyens de voyager dans l'air et de s'y diriger, contenant une nouvelle théorie des mouvements progressifs. Ibid. Tome XI. p. Xj, 1832.  
Ausser diesen selbstständigen Arbeiten hat Navier der Academie eine grosse Menge der interessantesten Rapports abgestattet, deren Aufzählung wegen Mangels an Raum hier nicht Platz finden kann.

### III. Abhandlungen in wissenschaftlichen Journalen.

1. Détails historiques sur l'emploi du principe des forces vives dans la théorie des machines, et sur diverses roues hydrauliques. *Annales de Chimie et de Physique*, Tome 9, p. 146. octobre 1818.
2. Note sur l'action mécanique des combustibles. *Ibid.* Tome 17, p. 357.
3. Sur la variation de température qui accompagne les changemens de volume des gaz. *Ibid.* Tome 17, p. 372. 1821.
4. Note sur les effets des secousses imprimées aux poids suspendus à des fils ou à des verges élastiques. *Bulletin de la société philomatique*, mai 1823.

Die grösste Menge von wissenschaftlich-technischen interessanten Aufsätzen, Abhandlungen und Noten Naviers enthalten die *Annales des ponts-et-chaussées*, wovon wir nur einige anführen, in Betreff der übrigen aber auf gedachte Quelle verweisen müssen. Analyse du 1 volume des mémoires de Mr. Girard sur le canal de l'Oureq. 1831. 1 Semest. p. 67.

Calcul de l'épaisseur à donner aux murs de revêtement. *Ibid.* p. 349. Rapport sur un mémoire de Mr. Raucourt, relatif à la mesure des vitesses de la Néva. 1832. 2 Semest. p. 1.

Note sur le mouvement uniforme des waggon dans les parties de chemin de fer tracées en ligne courbe. 1834. 2 Sem. p. 357. Nouvelles considérations sur l'emploi des machines locomotives dans les chemins de fer. 1836. 1. Sem. p. 1. etc. etc. etc.

### IV. Werke, deren neue Ausgabe Navier besorgte und mit werthvollen Anmerkungen und Zusätzen begleitetete.

1. *Traité de la construction des ponts*, par Gauthey. Paris, 1809 bis 1816. 3 vol. in-4.
2. *La Science des Ingénieurs* par Bélidor. Paris, 1813 und 1830. in-4. (Ein Werk, welches allein der Navier'schen Kritiken und Zusätze wegen gelesen zu werden verdient).
3. *Mémoires sur les canaux de navigation*, par Gauthey. Paris, 1816, in-4.
4. *Architecture hydraulique*, par Bélidor. Tome I. Paris, 1819 in-4.

Hier betragen die Navier'schen Anmerkungen und Anhänge ziemlich eben so viel wie der ursprüngliche Text Bélidor's. Die elementare und doch an sich strenge und klare Behandlungsweise Navier's machen dies Werk, wie auch jenes unter 2, höchst empfehlenswerth für Anfänger im Stadium der Mechanik, Hydraulik und des Maschinenwesens.

Hannover, im October 1850.

**Rühlmann.**

## Vorrede des Verfassers.

Galilei verdanken wir die ersten Versuche, um den Widerstand der Körper gegen die Einwirkung äusserer Kräfte dem Calcul zu unterwerfen, und Jacob Bernoulli, Leibniz, Euler, Lagrange haben verschiedene darauf bezügliche Fragen behandelt. Versuche über die Stärke der Materialien sind in grosser Zahl angestellt worden, unter denen besonders die von Buffon hervorgehoben zu werden verdienen. Coulomb endlich hat zuerst die richtigen Grundbedingungen des Gleichgewichts für Gewölbe und Futtermauern aufgestellt.

Aus jenen Untersuchungen hat indess bis jetzt die Mathematik mehr Nutzen gezogen, als die Architectur und das Ingenieurwesen. Die meisten Constructeure bestimmen die Dimensionen der Theile von Bauwerken oder Maschinen nach dem herrschenden Gebrauche und nach dem Muster ausgeführter Werke; sie legen sich selten Rechenschaft ab über den Druck, welchen jene Theile aushalten müssen und über den Widerstand, welchen sie demselben entgegensetzen. Dies mag wenig Nachtheile haben, so lange die auszuführenden Werke denen analog sind, welche man zu jeder Zeit errichtet hat, und sie, was die Dimensionen und die Belastungen anbetrifft, innerhalb der gewöhnlichen Grenzen bleiben. Aber man kann nicht mehr auf dieselbe Weise verfahren, wenn die Umstände dazu nöthigen, jene Grenzen zu

überschreiten, oder, wenn es sich um Bauwerke ganz neuer Art handelt, über welche die Erfahrung noch keine Resultate gesammelt hat.

Das vorliegende Werk soll die Bedingungen angeben für die Errichtung solcher Anlagen, welche unter Leitung von Ingenieuren geschehen; auch soll es in Stand setzen, den Grad des Widerstandes für die einzelnen Theile zu bestimmen. Besonders ist auf die Holzconstructions Rücksicht genommen worden, da man über diese so wenig Details in den darauf bezüglichen Werken findet. Wir glauben hier kurz die Grundsätze angeben zu müssen, welche wir bei der Behandlung der wichtigsten Fragen zum Grunde gelegt haben.

Wir betrachten in den Materialien zwei Haupteigenschaften, die Elasticität und die Cohäsion. Unter Elasticität versteht man den Widerstand, welchen ein Körper leistet, wenn man ihn um eine sehr kleine Grösse verlängern oder verkürzen will. Setzt man einen prismatischen Körper voraus, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, so nennt man das Verhältniss zwischen dem Gewichte, welches in der Längensaxe dieses Körpers durch Zug oder Druck wirkt, und dem (auf die Längeneinheit reducirten) Bruche, welcher die dadurch hervorbrachte Verminderung der ursprünglichen Länge ausdrückt, das Mass der Elasticität oder den Elasticitätsmodul; diese Grösse ist in § 77 durch  $E$  bezeichnet. Unter Cohäsion versteht man die Kraft, deren es bedarf, um die Theile eines Körpers zu trennen, sei es durch Ausdehnung oder Zusammendrücken. Das Gewicht, welches auf die eine oder die andere Weise die Trennung hervorbringt bei einem Körper, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, heisst das Mass der Cohäsion; diese Grösse ist in § 113 durch  $R$  bezeichnet.

Die Elasticität und die Cohäsion müssen für die verschiedenen Materialien durch Versuche bestimmt



werden; wir haben uns bemüht, alle Resultate dieser Art zu sammeln, welche von einiger Anwendbarkeit zu sein schienen.

Ist die Elasticität bekannt, so ist man im Stande, die Grösse zu bestimmen, um welche ein Stück der Construction sich verkürzen, verlängern oder biegen wird bei einer gegebenen Belastung. Ist die Cohäsion bekannt, so kann man die Grenze des Gewichtes bestimmen, welches ein Körper noch tragen kann. Aber dies genügt nicht dem Constructeur, da es sich nicht darum handelt, das Gewicht zu kennen, welches einen Körper zertrümmern würde, sondern darum, die Belastung zu erfahren, welche ein Körper noch zu tragen vermag, ohne dass die Veränderung, welche er erleidet, mit der Zeit zunehme. Die Aufsuchung dieser letztern Grenze kann selten der Gegenstand directer Versuche werden, aber man kann sich mit Vortheil der Beispiele bedienen, welche die ausgeführten Constructionen liefern.

Wir sehen, dass die Theile des Materials, welche den einwirkenden Kräften nachgeben, sich verkürzen oder sich verlängern, und nehmen dann das Verhältniss dieser Längenveränderung (zur Längeneinheit) als Maass an für den Grad, bis zu welchem jene Theile der nachtheiligen Einwirkung erlegen sind. Die grössten Längenveränderungen, welche uns die verkürzten oder verlängerten Fasern bei ausgeführten Constructionen zeigen, deren Solidität die Erfahrung dargethan hat, betrachten wir als Grenzen, welche man wohl erreichen, aber nicht ohne Gefahr überschreiten darf. Diesen letztern Längenveränderungen entsprechen Kräfte, welche sie durch einen directen Zug oder Druck würden hervorbringen können. Man betrachtet diese Kräfte als die grössten, denen die Fasern oder kleinsten Theile des Stückes noch widerstehen können, und hält bei der Errichtung neuer Constructionen ein Stück für dem Bruche nahe,

## XII

wenn es die Einwirkung dieser Kräfte erleidet. Auch kann man die Formeln, welche sich auf den Bruch beziehen, zur Berechnung der Dimensionen anwenden, wenn man für  $R$  einen weit kleineren Werth  $R'$  setzt (siehe § 181).

Wir wollen ein Beispiel solcher Berechnungen geben. Der Elasticitätsmodul für Schmiedeeisen ist  $E=20000000000$  Kil., d. h. wirkte dieses Gewicht in der Längensaxe eines Prisma's, dessen Querschnittsfläche gleich einem Quadratmeter ist, so würde es das Prisma bis auf seine doppelte Länge ausdehnen, oder bis auf seine halbe Länge zusammendrücken, indem man die Längenveränderungen stets den Gewichten proportional setzt, welche sie hervorbringen. Die Cohäsion desselben Materials ist  $R=40000000$  Kil., denn ein solches Gewicht würde ein ähnliches Prisma durch einen Zug in der Längensaxe zerreißen. Man nimmt endlich an, dass bei Schmiedeeisen die Elasticitätsgrenze überschritten sei, sobald die Fibern um mehr als 0,0005 verlängert oder verkürzt sind, und da diese Längenveränderung durch ein Gewicht von 10000000 Kil. per Quadratmeter hervorgebracht wird, so legt man diesen Werth der Constanten  $R'$  bei. Eine schmiedeeiserne Barre wird daher als zu sehr belastet angesehen, wenn die am meisten gedehnten oder zusammengedrückten Fasern eine Belastung von mehr als 10 000 000 Kil. per Quadratmeter tragen (siehe §§ 182 und 183).

Ist dies festgestellt, so beschränkt sich Alles darauf, in jedem einzelnen Falle den Einfluss aufzusuchen, welchen die einwirkenden Kräfte auf eine Verlängerung oder Verkürzung der Constructionstheile ausüben, mögen sie nun durch einen directen Zug oder Druck in der Längensaxe des Körpers oder in einer schiefen oder normalen Richtung gegen dieselbe wirken; im letztern Falle wird der Körper gezwungen, sich zu biegen und

### XIII

daher verlängern sich die Fibern an der convexen Seite, während sie sich an der concaven verkürzen. Die Regeln, welche man früher für das Gleichgewicht elastischer Körper gegeben hat, konnten nur in sehr wenigen Fällen Anwendung finden; jetzt indess hat man durch die Auflösung der neuen oben angegebenen Fragen das Mittel, um sich über die Stärke der Haupttheile einer Holzconstruction mit derselben Leichtigkeit und Genauigkeit Rechenschaft abzulegen, wie über die Stärke der Ketten einer Hängebrücke.

Das Hauptelement in den Berechnungen ist die Angabe der Grenzen, bis zu welchen man bei der Belastung der verschiedenen Materialien gehen darf. Diese Angabe liefert uns nur die Erfahrung über die bestehenden Bauwerke, sie wird daher keine strenge Genauigkeit darbieten können. Es wird also einige Differenzen geben können zwischen den Zahlen, welche von den verschiedenen Personen angenommen werden. Die Zeit und die Vereinigung einer grossen Zahl von Beobachtungen können allein die Ansichten über diesen Punkt fixiren.

Die Regeln für das Gleichgewicht der Gewölbe und der Futtermauern findet man schon in andern Werken niedergelegt; es ist in denselben jedoch nicht wie in diesem Werke auf die Möglichkeit Rücksicht genommen, dass Lostrennungen und Risse in den Mauern und Widerlagern entstehen, welche man gewöhnlich wie aus einem Stücke bestehend ansah.

Die Ingenieure verfolgen, wenn sie die Entwürfe zu den von ihnen geleiteten Arbeiten machen, gewöhnlich einen Weg, wie den, welchen man in der Mathematik die Methode der Regula falsi nennt; d. h. nachdem das Project eines Werkes entworfen und aufgezeichnet ist, untersuchen sie, ob sie allen Bedingungen genügt haben, und verbessern ihren Entwurf so lange, bis dies geschehen ist. Unter diesen Bedingungen ist die Oekonomie eine

#### XIV

der wesentlichsten; die Solidität und die Dauerhaftigkeit sind nicht weniger wichtig. Mit Hülfe der Regeln, die in diesem Werke entwickelt sind, wird man in allen Fällen die Grenzen bestimmen können, die man nicht überschreiten darf, ohne das Bauwerk einem Mangel an Solidität auszusetzen. Man darf indess nicht folgern, dass man aus Rücksichten der Oekonomie stets diesen Grenzen nahe kommen müsste. Die Verschiedenheit, welche unter den Materialien herrscht, und auch andere Gründe treten dem entgegen; die Kunst besteht darin, dass man beurtheilt, bis zu welchem Punkte man sich der Grenze nähern darf.

---

gkeit  
, die  
allen  
nicht  
l an  
gern,  
esen  
heit,  
dere  
arin,  
sich

## Vorwort zur zweiten Auflage.

---

Die zweite Auflage dieses Buches ist ein ungeänderter Abdruck der ersten und eine getreue Uebersetzung des Originales, soweit es sich um die eigentliche Arbeit Navier's handelt. Bezüglich dieser bedarf es daher nur des Hinweises auf die Vorrede des Herrn Professors Rühlmann zur ersten Auflage.

Eine wesentliche Umgestaltung erfuhr dagegen der Anhang bei der neuen Auflage. Man beabsichtigte, in demselben einen möglichst vollständigen Nachtrag zu liefern, in dem die wichtigsten neueren Theorien der Bau-Mechanik wenigstens soweit behandelt wären, dass sich der Studirende darüber im Allgemeinen orientiren könnte, wie auch dem Fachmann damit ein bequemes Nachschlagebuch geboten werden sollte.

Persönliche Verhältnisse veranlassten, dass die Bearbeitung dieses Anhangs in zwei verschiedene Hände gelegt werden musste. Herr Westphal, der Uebersetzer des Werkes und Herausgeber der ersten Auflage bearbeitete die beiden ersten Abschnitte, während von dem Unterzeichneten die Abschnitte III. bis VI. (Seite 506 ff.) geschrieben wurden. Ueber die letzteren seien mir einige Worte der Erläuterung des Standpunktes gestattet, von dem ich bei der Bearbeitung ausging.

Man wird vielleicht finden, dass in dem von mir herrührenden Theile des Anhangs ein allzugrosses

Gewicht auf allgemeinere theoretische Fragen gelegt und dafür die Erwähnung der praktischen Erfahrungs-Resultate allzusehr vernachlässigt sei. In der That steht diese Art der Behandlung im Gegensatze zu jener des Navierschen Textes, der reichlich mit Tabellen versehen ist und specielle Anleitungen über die Verwendung der angestellten Untersuchungen in der Praxis enthält.

Da mir aber nur ein verhältnissmässig sehr knapper Raum zur Verfügung stand, in den sich ein nach allen Seiten vollständiges Lehrbuch der neueren Theorien der Bau-Mechanik unmöglich zusammendrängen liess, glaubte ich denselben am zweckmässigsten zu benutzen, indem ich über die wichtigsten Gegenstände allgemein gehaltene Aufsätze mit kurzen Andeutungen über die praktischen Anwendungen niederschrieb. Dem Studirenden wie überhaupt jenem Leser, der sich über das Wesen dieser Theorien möglichst rasch und leicht unterrichten will, wird, wie ich glaube, mit dieser Art der Behandlung am Besten gedient sein.

Zum Theil wird der Leser (namentlich in der Fachwerkstheorie) einer allgemeineren Auffassung und Darstellung begegnen, als die sonst übliche ist, was ich als einen Vorzug hervorheben zu dürfen glaube. Der ganze Stoff wird dadurch durchsichtiger und klarer, wodurch auch das Studium erleichtert und eine systematische Auffassung gefördert wird. Was sich an neuen Anschauungen und Untersuchungen in meiner Arbeit findet, wird der kundige Leser leicht erkennen. Ich hoffe, dass er mir sein Interesse und seine Nachsicht nicht versagen möge.

Leipzig, 1878.

A. Foepl.

# I n h a l t.

	Seite
<b>Erster Abschnitt. Widerstand der Materialien . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>Erstes Kapitel. Widerstand der Materialien gegen eine</b>	
<b>Kraft, welche sie zu zerdrücken strebt . . . . .</b>	<b>2</b>
Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Zerdrücken .	3
Widerstand des Gypses . . . . .	8
Widerstand des Mörtels . . . . .	8
Widerstand der Hölzer . . . . .	8
Widerstand des Schmiedeeisens . . . . .	9
Widerstand des Gusseisens . . . . .	10
Widerstand verschiedener Metalle . . . . .	11
<b>Zweites Kapitel. Widerstand der Materialien gegen eine</b>	
<b>in ihrer Längenrichtung wirkende Kraft, welche strebt,</b>	
<b>dieselben zu verlängern und zu zerreißen . . . . .</b>	<b>11</b>
Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Ausdehnung	
(Zerreißen) . . . . .	12
Widerstand des Gypses . . . . .	12
Widerstand des Mörtels . . . . .	12
Widerstand der Hölzer . . . . .	13
Widerstand des Schmiedeeisens . . . . .	16
Widerstand des Eisenblechs . . . . .	26
Widerstand des Eisendrathes . . . . .	26
Widerstand des Gusseisens . . . . .	30
Widerstand des Kupferdrathes . . . . .	31
Widerstand verschiedener Metalle . . . . .	32
Widerstand des Glases . . . . .	34
Widerstand der Hanfseile . . . . .	34
<b>Drittes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers</b>	
<b>gegen Biegung, wenn die Richtung der einwirkenden</b>	
<b>Kraft rechtwinklig gegen die Längsaxe dieses Körpers ist</b>	<b>37</b>
Widerstand der Steine gegen Biegung . . . . .	48
Widerstand der Hölzer . . . . .	49
Widerstand des Schmiedeeisens . . . . .	54
Widerstand des Stahls . . . . .	58
Widerstand des Gusseisens . . . . .	60

	Seite
<b>Viertes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längenaxe dieses Körpers ist</b>	62
Widerstand der Steine und Ziegel gegen den Bruch. . .	71
Widerstand des Mörtels . . . . .	72
Widerstand der Hölzer . . . . .	72
Widerstand des Gusseisens . . . . .	79
Theorie des Widerstandes gegen den Bruch nach Galilei und nach Mariotte und Leibniz . . . . .	84
Bemerkung über die Theorie des Widerstandes gegen den Bruch . . . . .	85
Bruch eines prismatischen Stabes von sehr geringer Länge . . . . .	86
<b>Fünftes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen die Torsion</b>	90
Widerstand des Schmiedeisens gegen die Torsion . . .	95
Widerstand verschiedener Materialien . . . . .	96
<b>Sechstes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch durch die Torsion</b>	98
Widerstand des Gusseisens gegen den Bruch durch die Torsion . . . . .	100
<b>Siebentes Kapitel. Maximum des Widerstandes, welchen man in der Praxis von den Materialien mit Sicherheit erwarten darf.</b>	103
Widerstand der Steine gegen Zerdrücken . . . . .	104
Widerstand der Hölzer gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung . . . . .	105
Widerstand der Hölzer gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längenaxe gerichtete Kraft . . .	106
Widerstand des Schmiedeisens gegen Ausdehnung . . .	107
Widerstand des Schmiedeisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längenaxe gerichtete Kraft. . . . .	108
Widerstand des Gusseisens gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung . . . . .	108
Widerstand des Gusseisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längenaxe gerichtete Kraft	109
<b>Zweiter Abschnitt. Gleichgewicht und Widerstand der Körper, welche aus adhärenenden Materialien bestehen. Construction der Futtermauern</b>	111
<b>Erstes Kapitel. Gleichgewicht eines Erdkörpers, der nach einer Seite hin ohne Stützfläche ist und von einer Ebene begrenzt wird</b>	111
<b>Zweites Kapitel. Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, der von zwei Seitenebenen begrenzt wird und auf dessen horizontaler Oberfläche eine Last gleichförmig vertheilt ist</b>	115
<b>Drittes Kapitel. Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, gegen dessen eine Seitenfläche eine Kraft wirkt</b>	117



# XIX

Seite	Seite
rs	Erster Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Gleiten erfolgt . . . . . 118
en	Zweiter Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Umsturz erfolgt . . . . . 124
st	Ueber den Druck, den die Theile des Körpers erleiden, und den Widerstand, welchen diese leisten müssen, um nicht zerdrückt zu werden . . . . . 127
62	Körper von gleichem Widerstande gegen den Bruch durch Umsturz . . . . . 128
71	Versuche über den Widerstand des Mauerwerkes gegen den Bruch durch Umsturz . . . . . 129
72	
72	
79	
ei	
84	
en	
85	
rer	
86	
rs	<b>Viertes Kapitel. Berechnung der Futtermauern, welche dem Erd- und Wasserdrucke widerstehen . . . . . 130</b>
90	Druck der Erde gegen eine ebene Wand . . . . . 130
95	Druck der Erde gegen eine ebene Wand, wenn dieselbe eine auf ihrer Oberfläche gleichförmig vertheilte Last trägt . . . . . 135
96	Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke widersteht . . . . . 136
rs	Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, dass eine Drehung der ganzen Mauer um die äussere Kante ihrer Basis erfolgen könne . . . . . 140
die	Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, dass ein Fortgleiten der Mauer auf ihrem Fundamente erfolgen könne . . . . . 142
100	
en	
103	
104	
ren	
105	
ht-	
106	
107	
rch	<b>Fünftes Kapitel. Berechnung der Fundamente, wenn die Mauern auf einem zusammendrückbaren Grunde stehen 144</b>
ete	
108	
ren	
108	
ine	
109	
nd	
en.	
111	
der	
111	
in-	
nd	
eh-	
115	
in-	
117	
	<b>Dritter Abschnitt. Theorie der Gewölbe . . . . . 158</b>
	<b>Erstes Kapitel. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbesteinen . . . . . 159</b>
	Anwendung auf ein scheidrechtes Gewölbe . . . . . 163
	Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbesteinen, deren Fugen sämmtlich normal auf der innern Wölblinie stehen . . . . . 166
	Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur inneren Wölblinie gerichtet sind . . . . . 168

	Seite
Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sich auf das eigene Gewicht der Gewölbesteine beschränken . . . . .	169
<b>Zweites Kapitel. Die wichtigsten Versuche und Beobachtungen über das Gleichgewicht der Gewölbe . . .</b>	<b>171</b>
<b>Drittes Kapitel. Spezielle Berechnung der Gewölbe . .</b>	<b>177</b>
Gleichgewicht der Tonnengewölbe . . . . .	178
Normaldruck der Tonnengewölbe zwischen den Fugen	186
Ueber den Gebrauch eiserner Durchzüge zur Verstärkung der Tonnengewölbe . . . . .	192
Gleichgewicht der Kuppelgewölbe . . . . .	196
Ueber den Gebrauch eiserner Ringe zur Verstärkung der Kuppelgewölbe . . . . .	198
Gleichgewicht der Kloster- und Kreuzgewölbe . . . .	199
<b>Viertes Kapitel. Bemerkungen über einige bei den Gewölben vorkommende Rechnungen . . . . .</b>	<b>201</b>
<b>Vierter Abschnitt. Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen . . . . .</b>	<b>204</b>
<b>Erstes Kapitel. Gleichgewicht eines horizontalen, prismatischen Stabes bei verschiedener Unterstützung und Belastung . . . . .</b>	<b>205</b>
Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der in einem beliebigen, zwischen den Stützen liegenden Punkte belastet ist . . . . .	207
Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der auf einem Theile seiner Länge belastet ist . . .	209
Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, dessen eines Ende festgehalten wird, während das andere Ende auf einer Stütze frei aufliegt . . . .	212
Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, der an beiden Enden festgehalten wird . .	214
Gleichgewicht eines von drei oder mehr Stützen getragenen Stabes . . . . .	217
Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis . . . . .	220
<b>Zweites Kapitel. Widerstand eines verticalen, prismatischen Stabes, dessen obere Endfläche belastet wird . .</b>	<b>221</b>
Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben frei ist . . . . .	224
Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben gezwungen wird, mit dem untern in derselben Verticalen zu bleiben . . . . .	225
Versuche über den Widerstand vertical belasteter Holzstäbe . . . . .	226
Versuche über den Widerstand vertical belasteter Stäbe aus Schmiedeeisen . . . . .	229

Seite		Seite
169	Versuche über den Widerstand gusseiserner Stäbe, die in der Richtung ihrer Längen zusammengedrückt wurden . . . . .	231
171	Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis . . . . .	231
177	<b>Drittes Kapitel. Widerstand eines vertical belasteten Stabes, wenn die Kraft parallel mit der Axe desselben wirkt . . . . .</b>	234
178	<b>Viertes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Stabes, wenn mit der Axe desselben die Richtung der Kraft einen schiefen Winkel einschliesst . . . . .</b>	239
186	Gleichgewicht eines geneigten Stabes, wenn derselbe zwischen seinen Enden belastet ist . . . . .	245
192	<b>Fünftes Kapitel. Widerstand eines gebogenen, prisma- tischen Stabes, der horizontal zwischen zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wird . . . . .</b>	247
196	<b>Sechstes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Stabes mit bogenförmiger Axe . . . . .</b>	251
198	Untersuchung der Stäbe, die nach der Gleichgewichts- curve geformt sind . . . . .	251
199	Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur Axe ge- richtet sind . . . . .	252
201	Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich vertical gerichtet sind . . . . .	253
204	Biegung der Stäbe mit bogenförmiger Axe . . . . .	259
205	Anwendung auf den Fall, in welchem die Axe des Stabes ein Parallelbogen ist . . . . .	262
207	Anwendung auf den Fall, in welchem die Axe des Stabes ein Kreisbogen ist . . . . .	265
209	Biegung eines bogenförmigen Stabes, der auf seiner ganzen Länge belastet ist . . . . .	267
212	Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Axe des Stabes ein Parallelbogen ist . . . . .	269
214	Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Axe des Stabes ein Kreisbogen ist . . . . .	271
217	Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis . . . . .	274
220	Einfluss des Druckes oder der Spannung in der Axe der bogenförmigen Stäbe auf eine Veränderung ihrer Länge und ihrer Form . . . . .	278
221	Versuche und Beobachtungen über den Widerstand ein- facher Stäbe mit bogenförmiger Axe . . . . .	282
224	<b>Siebentes Kapitel. Ueber die verschiedenen Formen in denen einfache Stäbe, bei Constructionen vorkommen. Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind . . . . .</b>	284
225		
226		
229		

	Seite
Ueber die zweckmässigste Gestalt des Querschnittes . . . . .	284
Ueber die zweckmässigste Gestalt des Längenschnittes . . . . .	289
Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind . . . . .	294
Versuche über den Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind . . . . .	299
Ueber die Eisenconstructions, welche zur Verlängerung der Stäbe oder zur Verbindung solcher Stäbe dienen, die in derselben Längenrichtung liegen . . . . .	300
<b>Achtes Kapitel. Die einfachsten Holzconstructions,</b> <b>welche zum Tragen und Aufziehen von Lasten dienen . . . . .</b>	<b>303</b>
Gleichgewicht der Krahne . . . . .	329
<b>Neuntes Kapitel. Widerstand der Schleusenthore . . . . .</b>	<b>334</b>
Wirkung der Schwere auf die Schleusenthore . . . . .	334
Untersuchung des Falles, in welchem die Schleusen- thore zum Theil von einer Rolle getragen werden . . . . .	338
Wirkung des Wasserdruckes auf die Schleusenthore . . . . .	340
Gleichzeitige Wirkung der Schwere und des Wasser- druckes auf die Schleusenthore . . . . .	343
Gekrümmte Schleusenthore . . . . .	344
<b>Zehntes Kapitel. Widerstand der hölzernen und eisernen Brücken . . . . .</b>	<b>346</b>
Von den Brücken, welche von Balken und Streben ge- tragen werden . . . . .	347
Wirkung der von Balken und Streben getragenen Brücken auf die Pfeiler oder Widerlager . . . . .	358
Von den Brücken, welche von Bögen getragen werden . . . . .	360
Sicherung der Rippen vor dem Ausweichen . . . . .	367
<b>Elftes Kapitel. Widerstand der Lehrgerüste, welche zur Construction der Gewölbe dienen . . . . .</b>	<b>369</b>
Druck der Gewölbsteine auf die Lehrgerüste . . . . .	369
Anordnung der Lehrgerüste . . . . .	373
<b>Zwölftes Kapitel. Widerstand der Fussböden . . . . .</b>	<b>376</b>
Biegung und Bruch elastischer Ebenen . . . . .	381
Praktische Regeln für die Anordnung der Fussböden . . . . .	384
<b>Dreizehntes Kapitel. Widerstand der Wände eines Gefässes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit . . . . .</b>	<b>386</b>
Gleichgewicht einer Linie, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Linie stehen . . . . .	387
Gleichgewicht einer Fläche, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Fläche stehen . . . . .	391
Gleichgewicht einer Fläche, die von Normalkräften sollicitirt und nach allen Richtungen gleichmässig gespannt wird . . . . .	394
Anwendung auf Gefässe von verschiedener Gestalt . . . . .	397
Versuche über den Widerstand der Wände eines Ge- fässes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit . . . . .	405

## Anhang.

	Seite
<b>Erster Abschnitt. Die Grundbegriffe der allgemeinen Mechanik in besonderer Beziehung zur Festigkeitslehre</b>	409
<b>Zweiter Abschnitt. Allgemeine Begriffe und Formeln der Elasticitätstheorie</b>	470
<b>Dritter Abschnitt. Anwendungen der Elasticitätsgesetze auf die Berechnung der Baukonstruktionen</b>	506
<b>Vierter Abschnitt. Theorie des Fachwerks</b>	523
Das statisch bestimmte Fachwerk aus zweigelenkigen Stäben	525
Das statisch unbestimmte Fachwerk aus zweigelenkigen Stäben, die keiner direkten Belastung ausgesetzt sind	548
<b>Fünfter Abschnitt. Die Theorie der Tonnengewölbe</b>	557
<b>Sechster Abschnitt. Dimensionen-Berechnung der Eisen- und Stahl-Constructions</b>	582

# Ingenieurmechanik.

---

## Erster Abschnitt.

### Widerstand der Materialien.

§ 1. **E**in fester Körper widersteht einer Kraft, die ihn zu biegen oder seine Theile zu trennen sucht. Bei der Aufsuchung der Gesetze, denen diese Eigenschaft unterworfen ist, kann man sich zwei Hauptaufgaben stellen: 1) zu ermitteln, ob ein Körper, dessen Dimensionen und Belastung gegeben sind, sich biegen oder brechen wird, und um welche Grösse dies im ersteren Falle geschehen wird; 2) die Dimensionen eines Körpers so zu bestimmen, dass er bei dem geringsten Volumen einer gegebenen Belastung den möglichst grössten Widerstand leistet.

Die Körper scheinen aus Theilen oder Molecülen zusammengesetzt zu sein, die in gewissen Entfernungen von einander durch entgegengesetzte Kräfte gehalten werden, die sich gegenseitig aufheben. Die eine dieser Kräfte ist eine Attractivkraft, die den Molecülen der Körper eigenthümlich ist; die andere ist eine Repulsivkraft, die durch die Wärme hervorgerufen wird. Die Wechselwirkung dieser Kräfte liefert über die vorzüglichsten Erscheinungen Aufschluss, die bei dem Versuche, die Gestalt eines Körpers zu ändern, stattfinden, und es leuchtet ein, dass man durch die Betrachtung der genannten Kräfte die directe Auflösung der Probleme zu suchen hat, welche sich auf die Festigkeit der Körper beziehen.

Die allgemeinen Untersuchungen, welche sich auf diese Begriffe stützen, sind zu verwickelt, als dass man sie in einem elementaren Cursus lehren könnte; wir beschränken uns darauf, einfache und brauchbare Resultate aus Hypothesen abzuleiten, deren Richtigkeit durch zahlreiche Vergleichen mit Beobachtungen bestätigt ist.

§ 2. Um den Ideen eine bestimmtere Richtung zu geben, wollen wir ein Prisma betrachten. Auf diesen Körper können verschiedene Kräfte wirken, unter denen wir besonders unterscheiden:

1. Eine in der Längenrichtung des Körpers wirkende Kraft, welche denselben zusammendrückt. Der Körper kann nachgeben, entweder, indem er zerdrückt (zerquetscht) wird, oder auch, indem er sich biegt und bricht, wenn seine Länge gross genug ist in Bezug auf die Dimensionen des Querschnitts.

2. Eine in der Längenrichtung des Körpers wirkende Kraft, welche denselben ausdehnt. Der Körper kann nachgeben, indem er sich verlängert, oder indem er zerreisst durch eine Trennung der Molecüle in einem der Querschnitte.

3. Eine rechtwinklig gegen die Länge des Körpers gerichtete Kraft. Der Körper giebt nach, indem er sich biegt, so dass die der convexen Oberfläche näher liegenden Theile ausgedehnt, und die der concaven Oberfläche näher liegenden Theile zusammengedrückt werden. Der Bruch tritt ein, wenn die Ausdehnung oder Zusammenrückung gross genug ist, um eine Trennung der Theile durch Zerreißen oder durch Zerquetschen zu bedingen.

4. Ein Kraftsystem, welches den Körper zu verdrehen strebt, d. h. zwei Querschnitte des Körpers nach entgegengesetzten Richtungen, um die Längensaxe des Körpers zu drehen strebt.

---

### Erstes Kapitel.

**Widerstand der Materialien gegen eine Kraft, welche sie zu zerdrücken strebt.**

§ 3. Was sich über diesen Gegenstand sagen lässt, beschränkt sich hauptsächlich auf die Anführung der Versuche, die man mit den verschiedenen Materialien angestellt hat. Die folgenden Angaben beziehen sich

nur auf Körper, deren Länge im Vergleich zu den Dimensionen des Querschnitts zu gering ist, als dass sie sich biegen könnten.

### **Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Zerdrücken.**

§ 4. Aus den Versuchen über den Widerstand der Steine gegen Zerdrücken hat man die folgenden allgemeinen Anzeichen gefunden. Die physischen Eigenschaften der Steine, wie die Härte, das specifische Gewicht, die Farbe, können uns kein genaues Urtheil über die Festigkeit verschaffen; man erhält dies nur durch specielle Versuche. Gleichwohl sind bei den Steinen von gleicher Art die dichtesten Theile auch die festesten. Man unterscheidet unter den Steinen in Bezug auf die Weise, wie sie dem Drucke nachgeben, zwei Hauptarten. Die harten Steine mit feinem Korn und gleichartigem und festem Gefüge zerfallen unter Geräusch in kleine, verticale Splitter, bevor sie gänzlich zermalmt werden. Die weichen Steine zertheilen sich zuerst in Pyramiden, deren Grundfläche die Seiten des Körpers bilden, und deren Spitzen sich im Mittelpunkte desselben befinden; die beiden verticalen Pyramiden wirken wie Keile und trennen dadurch die übrigen; sie zerspalten sich sämmtlich in kleine verticale Prismen und diese werden endlich auch gänzlich zermalmt. Einige Steine, die bei den Versuchen einen grösseren Widerstand leisten, als andere, können bei einer Construction leichter zerspringen, wenn sie nicht in der ganzen Ausdehnung der Fuge einen sehr gleichmässigen Druck erfahren.

Die Kraft, welche es erfordert, um ein Steinprisma zu zerdrücken, ist für ähnliche Figuren dem Flächeninhalt des Querschnitts proportional; sie nimmt ab, wenn der Umfang dieses Schnitts in Bezug auf den Inhalt zunimmt, und ist am grössten, wenn der Querschnitt ein Quadrat oder ein Kreis ist. <sup>1)</sup>

Was den Einfluss des Verhältnisses der Höhe zur Fläche des Querschnitts anbetrifft, so ist die zum Zerdrücken erforderliche Kraft am grössten, wenn der Stein die Gestalt eines Würfels hat. Diese Kraft nimmt ab in dem Masse, wie der Stein flacher oder höher wird.

<sup>1)</sup> Art de bâtir, par M. Rondelet, tome IV, pag. 150 u. fgde. der Ausgabe von 1881 bei Firmin Didot.



Sie nimmt noch mehr ab, wenn der Steinkörper aus mehreren auf einandergesetzten Theilen besteht. <sup>1)</sup>

Die innere Beschaffenheit des Steins, den man dem Versuche unterwirft, hat einen merklichen Einfluss auf die Resultate. Der Widerstand der Theile, welche der obern oder untern Seite nahe liegen, ist geringer, als derjenige der innern Theile. <sup>2)</sup>

Ueber den Widerstand der Steine gegen Zerdrücken sind sehr viele Versuche angestellt worden. <sup>3)</sup> Die ersten sind von Gauthey, der sich einer Hebelvorrichtung bediente. Rondelet wandte eine ähnliche Maschine an; er schlägt eine Maschine vor, bei welcher der Druck durch eine Schraube hervorgebracht wird; die letztere scheint vorzüglicher zu sein.

§ 5. Mittelwerthe aus den Versuchen Gauthey's. <sup>4)</sup> Diese Versuche wurden mit kleinen Parallelepipeden angestellt, deren Dimensionen von 4 bis 48 par. Linien variirten und gewöhnlich 10 bis 12 Linien betrugen.

Aus den Resultaten sind die folgenden Werthe für eine Fläche von einem Quadratfuss berechnet.

Steinarten.	Gewicht eines Kubiks.	Geringster	Mittlerer	Grösster
		Werth des zerdrückenden Gewichtes.		
	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund
Porphyr . . . . .	201	4299112	5329152	5619456
Marmor aus Flandern .	184	1824768	2239488	2159200
Marmor aus Genua . .	189	691472	770688	1002240
Kalkstein, harter, aus Givry . . . . .	165	456192	663552	870911
Kalkstein, weicher, aus Givry . . . . .	145	186624	248832	311040
Kalkstein, weisser, aus Tonnerre . . . . .	120	181440	222912	279836
Ziegelstein, harter . .	109	290304	321403	373248
Sandstein, weicher . .	174	5390	8424	189586

Um den Widerstand gegen Zerdrücken für eine Querschnittsfläche von einem Quadrateentimeter ausgedrückt in Kilogrammen zu erhalten, hat man die Zahlen der letzten drei Columnen mit 0,000464 zu multipliciren.

1) Rondelet, Art de bâtir, pag. 146, 147

2) Rondelet, Art de bâtir, pag. 140 u. flgde.

3) Die neuesten Versuche sind im Anhang dieses Werkes aufgeführt.

4) Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres. Journ. de physique, nov. 1774.

§ 6. Die wichtigsten Ergebnisse aus den Versuchen Rondelet's.<sup>1)</sup> Diese Versuche wurden mit kleinen Würfeln angestellt, die 0<sup>m</sup>,05 zur Seite hatten, und deren Grundfläche also 25 Quadratcentimeter enthielt.

Steinarten.	Specif. Gewicht	Zerdrücken-des Gewicht
		Kilogramm
<b>Vulkanische Steine.</b>		
Basalt aus Schweden . . . . .	3,06	47809
Basalt aus der Auvergne . . . . .	2,88	51945
Bimsstein . . . . .	0,60	863
Duckstein (Tuff) aus Rom . . . . .	1,22	1447
Lava vom Vesuv, genannt Piperno, aus der Nähe von Puzzuolo . . . . .	2,60	14802
Lava, graue, aus der Umgegend von Rom, (Peperino) . . . . .	1,97	5700
Lava, weiche, aus Neapel . . . . .	1,72	4014
Vulkanische Schlacke . . . . .	0,86	831
<b>Granitarten.</b>		
Granit, grüner, aus den Vogesen . . . . .	2,85	15487
„ grauer, aus der Bretagne . . . . .	2,74	16353
„ aus der Normandie, Gatos genannt . . . . .	2,66	17555
„ grauer, aus den Vogesen . . . . .	2,64	10581
<b>Sandsteinarten.</b>		
Sandstein, sehr hart, röthlich . . . . .	2,52	20337
„ weisser . . . . .	2,48	23086
„ mürber . . . . .	2,49	98(?)
<b>Thonhaltige Steine.</b>		
Stinkstein . . . . .	2,66	17030
Grauer Stein aus Florenz mit feinem Korn . . . . .	2,56	10556
<b>Kalksteine.</b>		
Marmor, schwarz, aus Flandern . . . . .	2,72	19719
„ weiss geädert . . . . .	2,70	7455
„ weisser, zu Bildsäulen . . . . .	2,69	8176
„ dunkelblau (Ital. Bardiglio) . . . . .	2,67	7695
Stein von Caserta, der Politur fähig . . . . .	2,72	14865
Stein von Saint-Fortunat, schwarz, sehr hart und muschlig, in Lyon angewandt . . . . .	2,65	15663
Lias von Bagneux bei Paris, sehr hart, feinkörnig . . . . .	2,44	11113
Travertino aus Rom, sehr hart, feinkörnig grünfleckig . . . . .	2,36	7449
Stein von Chatillon bei Paris, hart, wenig muschlig . . . . .	2,29	4347

1) Rondelet, Art de bâtir, tome I. pag. 210 u. figde.

Steinarten.	Specif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
Kalksteine.		Kilogramm
Stein von Chatillon bei Paris, weich . . .	2,08	3339
„ von Arcueil bei Paris . . .	2,30	6334
„ von Saillancourt bei Pontoise, 1. Qualität	2,41	3536
„ „ „ „ 2. Qualität	2,29	2994
„ „ „ „ 3. Qualität	2,10	2304
Stein von Conflans, fest, in Paris angewandt	2,07	2245
Stein von Conflans, weich, sogenannte Lam- bourde . . .	1,82	1407
Gyps von Montmartre bei Paris, als Baustein	1,92	1785
Vergelée, aus der Umgegend von Paris, weich, grobkörnig, dem Wasser widerstehend . .	1,83	1496
Lambourde, von geringer Qualität, weich, der Feuchtigkeit schlecht widerstehend . . .	1,56	575

§ 7. Die wichtigsten Ergebnisse aus den Versuchen Rennie's. <sup>1)</sup> Diese Versuche wurden mit kleinen Würfeln angestellt, deren Kante 1½ engl. Zoll betrug. Die zerdrückenden Gewichte sind in engl. Pfunden avoirdupois angegeben.

Steinarten.	Specif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
Granitarten.		engl. Pfund
Granit von Aberdeen, blau . . . . .	2,625	24556
„ „ Peterhead, feinkörnig. . . . .		18636
„ „ Cornwallis . . . . .	2,662	14302
Kieselsteine.		
Stein von Dundee . . . . .	2,530	14918
Stein von Brannelfall bei Leith, parallel oder normal zu den Schichten . . . . .	2,506	13632
Stein von Derby (Grit genannt), roth, zer- reiblich . . . . .	2,316	7070
Kalksteine.		
Marmor, weisser italien., geädert . . . . .	2,726	21783
„ weisser aus Brabant . . . . .	2,697	20742
Kalkstein von Limerick, schwarz und dicht	2,598	19924
Rother Marmor von Devonshire . . . . .		16712

<sup>1)</sup> Philosophical Transactions 1818, auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

Steinarten.	Specif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
Kalksteine.		engl. Pfund
Portlandstein mit feinem und gleichmässigem Korn (die Kante des Würfels = 2")	2,423	14918
Derselbe Stein (die Kante des Würfels = 1 1/2")	2,428	10284
Ziegel.		
Ziegel von Stourbridge		3864
" " Hammersmith		2254
Derselbe Ziegel, gebrannt		3243
Rothe Ziegel, Mittel aus zwei Proben	2,168	1817
Blassrothe Ziegel	2,085	1263
Kalk		1127

Multiplieirt man die Zahlen der letzten Columnne mit 0,03156, so erhält man in Kilogrammen ausgedrückt den Widerstand gegen Zerdrücken für eine Fläche von einem Quadratcentimeter.

§ 8. Um zu zeigen, wie die Abnahme an Festigkeit zu schätzen ist, welche eintritt, sobald die Höhe des Prismas grösser ist, als die Seite der Grundfläche, führen wir hier die folgenden Versuche von Rondelet<sup>1)</sup> auf. Die Grundfläche war ein Quadrat mit einer Seite von 5<sup>cm</sup>.

Steinarten.	Specif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
		Kilogramm
Sehr harter Lias, ein Würfel	2,388	8851
Zwei eben solche Würfel auf einander gesetzt		5411
Drei Würfel ebenso		4780
Harter Stein von Bagneux, ein Würfel	2,255	6650
Zwei solcher Würfel auf einander gesetzt		4223
Drei Würfel ebenso		3890
Harter Stein von Chatillon, ein Würfel	2,332	5138
Zwei Würfel aufeinander gesetzt		4010
Drei Würfel ebenso		3853
Derselbe Stein, ein Würfel	2,162	3537
Zwei Würfel auf einander gesetzt		2829
Drei Würfel ebenso		2752
Derselbe Stein, ein Prisma von 0,1 Höhe	2,346	5164
Dasselbe Prisma in vier Theile zerlegt		4431
Dasselbe Prisma in acht Theile zerlegt		3698

1) Art de bâtir, tome IV, pag. 146.

§ 9. Withe<sup>1)</sup> berichtet über einen Versuch, bei welchem ein Prisma aus Portlandstein, welches 14" engl. breit, 12" dick und 2' 7" hoch war, unter einem Drucke von 173,5 Tonnen zerdrückt wurde.

#### Widerstand des Gypses gegen Zerdrücken.

§ 10. Nach Rondelet<sup>2)</sup> beträgt das Gewicht, welches einen Würfel zerdrückt, dessen Kante = 5<sup>cm</sup> ist, für Gyps mit Wasser angemacht 1239<sup>kil.</sup> und für Gyps mit Kalkmilch angemacht 1816<sup>kil.</sup>

#### Widerstand des Mörtels gegen Zerdrücken.

§ 11. Der Widerstand des Mörtels ist sehr verschieden nach den Materialien und dem Bereitungsverfahren, welches man anwandte. Die folgende Tabelle ist nach den Versuchen von Rondelet berechnet.

Mörtel.	Specif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
		Kilogramm
Mörtel aus Kalk und Flusssand . . . . .	1,63	767
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,89	1048
Mörtel aus Kalk und Grubensand . . . . .	1,59	1017
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,90	1406
Mörtel mit Cement aus gemahlenen Ziegel- scherben . . . . .	1,46	1191
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,66	1633
Mörtel aus zermahlenem Sandstein . . . . .	1,68	733
Mörtel aus gemischter Puzzolane von Neapel und Rom . . . . .	1,46	916
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,68	1333
Bewurf eines Reservoirs einer antiken Wasser- leitung in der Umgegend Roms . . . . .	1,55	1903
Cementbewurf der Trümmer der Bastille . . . . .	1,49	1368

Die Versuche wurden 11½ Jahr nach der Bereitung des Mörtels angestellt. Funfzehn Jahre später wurden sie wiederholt, und man bemerkte, dass der Widerstand bei den Mörteln aus Kalk und Sand ungefähr um 1/8, bei den Mörteln mit Cement und Puzzolane um 1/4 zu-  
genommen hatte.<sup>3)</sup>

#### Widerstand der Hölzer gegen Zerdrücken.

§ 12. Nach den Versuchen von Rondelet<sup>4)</sup> bedarf es, um einen Würfel von Eichenholz zu zerdrücken, einer

1) The Philosophical Magazine, april 1832.

2) Art de bâtir, tome I, pag. 221.

3) Art de bâtir, tome I, pag. 223. Man sehe auch von Vicat die Recherches expérimentales sur les chaux de construction, und von demselben Verfasser das Werk: Résumé des connaissances positives actuelles sur les mortiers et ciments calcaires, 1828.

4) Art de bâtir, tome I, pag. 232.

Kraft von 40 bis 48 Pfund für jede Quadratlinie der Basis (385 bis 463 kil. für den Quadratcentimeter). Diese Kraft nimmt für ein Prisma nicht merklich ab, so lange die Höhe das Sieben- bis Achtfache der Dicke nicht übersteigt und das Prisma sich nicht biegen kann.

Dieselbe Kraft beträgt für Tannenholz 48 bis 56 Pfund (463 bis 538 kil. für den Quadratcentimeter).

§ 13. Nach den Versuchen von Rennie<sup>1)</sup> bedarf es, um einen Würfel zu zerdrücken, dessen Kante gleich 1" engl., für

engl. Eichenholz . . .	3860	Pfund	avoir du poids.
Weisstannenholz . . .	1928	"	"
amerik. Fichtenholz . .	1606	"	"
Ulmenholz . . . . .	1284	"	"

Den Widerstand für den Quadratcentimeter, in Kilogrammen ausgedrückt, findet man aus den vorstehenden Zahlen durch Multiplication mit 0,07028.

§ 14. Soll die gedrückte Oberfläche eines Stabes aus Eichenholz nicht merklich nachgeben, so darf nach Gauthey<sup>2)</sup> der Druck nicht über 160<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter betragen, wenn die gedrückte Fläche den Fasern parallel ist: und nicht über 200<sup>kil.</sup>, wenn die gedrückte Fläche zu den Fasern rechtwinklig ist.

§ 15. Nach den Versuchen von Tredgold<sup>3)</sup> darf der Druck gegen eine den Fasern parallele Fläche nicht über 1400 Pfd. avoir du poids für den engl. Quadratzoll bei Eichenholz betragen, und nicht über 1000 Pfund bei Rothtannenholz (108 und 70<sup>kil.</sup> für den Quadracentimeter).

Diese Zahlen setzen gute, trockne Hölzer voraus.

§ 16. Bei einem Versuche, den Minard und Desormes 1822 anstellten mit zwei Stäben von Eichenholz, deren Enden durch eine einfache Verzahnung zusammengefügt und durch eiserne Bänder gehalten wurden, wurden die Fasern des Zahns zerdrückt durch eine Kraft von 530<sup>kil.</sup> für den Quadracentimeter.

#### Widerstand des Schmiede Eisens gegen Zerdrücken.

§ 17. Nach den Versuchen von Rondelet<sup>4)</sup> fängt ein Würfel aus Schmiedeisen, dessen Kante 6 bis 12 Linien enthält, an, zusammengedrückt zu werden, bei einem mittleren Drucke von 513 Pfund für die Quadratlinie

1) Philosophical Transactions 1818, oder auch Annales de chimie et de physique septembre 1818.

2) Traité de la construction des ponts, tome II, pag. 44.

3) Elementary principles of carpentry, pag. 60.

4) Art de bâtir, tome I, pag. 295.

(4945<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter). Beträgt die Höhe das Dreifache der Dicke, so wird das Eisen eher gebogen, als zusammengedrückt.

### Widerstand des Gusseisens gegen Zerdrücken.

§ 18. Nach den Versuchen von Reynolds <sup>1)</sup> beträgt die Kraft, deren es bedarf, um einen Würfel zu zerdrücken, dessen Kante  $\frac{1}{4}$  engl. Zoll, bei grauem, weichem Gusseisen 8960 Pfd. avoirdupois, und bei Kanonenmetall 22400 Pfund.

§ 19. Die wichtigsten Resultate aus den Versuchen von G. Rennie über das Zerdrücken des Gusseisens <sup>2)</sup>

Der Probe unterworfenen Eisensorten.	Specif. Gewicht	Schleuder quadrat. Basis	Höhe des Prisma	Zerdrücken- des Gewicht
		engl. Zoll	engl. Z.	engl. Pfund
Eisen, das aus der Mitte einer grossen Masse genommen war, deren Krystalle die Gestalt und das Ansehen derjenigen hatten, die man bei dem Zerspringen einer eisernen Kanone beobachtet	7,033	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1440
Eisen, das aus einer kleinen Gussmasse genommen war, dichtkörnig, mehr dunkelgrau . . . . .	6,977	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	2116 2363 2005 1407 1743 1594 1439
Eisen, das aus der ersteren Masse genommen war . .		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	9773
Würfel aus horizontal gegossenen Stäben genommen	7,113	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	10114
Würfel aus vertical gegossenen Stäben genommen . .	7,074	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	11137
Prismen von verschiedenen Höhen aus horizontal gegossenem Eisen . . . . .		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	9449 9006 8845 8362 6430 6321
Prismen aus vertical gegossenem Eisen . . . . .		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	9328 8358 7896 7018 6430

1) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 128. Nach diesem Werke scheint es, als ob Rennie die von Reynolds gefundenen Resultate in seiner Abhandlung in dem Bande für 1818 der Philosophical Transactions nicht genau wiedergegeben habe.

2) Philosophical Transactions 1818, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.





### **Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Ausdehnung (Zerreissen).**

§ 22. Nach Coulomb<sup>1)</sup> bedarf es zum Zerreissen per Quadratzoll

für einen hellen Stein mit feinem,

gleichmässigem Korne . . . . . 215 Pfund

für Ziegel aus der Provence, sehr gut

gebrannt, sehr dichtes Korn . . . . 280 bis 300 Pfund.

(Diesen Zahlen entsprechen  $14^k,4$  und  $18^k,7$  bis  $20^k$  für den Quadratcentimeter).

§ 23. Nach Tredgold<sup>2)</sup> bedarf es ebenso für den engl. Quadratzoll

für Ziegel 275 engl. Pfd. ( $19^k,3$  f. d. Quadratcentimeter)

f. Portlandstein 857 engl. Pfd. ( $60^k,2$  f. d. Quadratcentimeter).

### **Widerstand des Gypses gegen Ausdehnung.**

§ 24. Nach Rondelet<sup>3)</sup> beträgt die Cohäsion des Gypses 76 Pfund für den Quadratzoll ( $5^{kil}$  für den Quadratcentimeter). Die Adhäsion an Stein und Ziegel ist ungefähr  $\frac{2}{3}$  der ersten Kraft. Die Adhäsion ist grösser bei Bruchsteinen (Mühlsteinen) und Ziegeln als bei Kalksteinen. Sie nimmt mit der Zeit sehr ab.

### **Widerstand des Mörtels gegen Ausdehnung.**

§ 25. Nach Rondelet<sup>4)</sup> ist die Cohäsion des Mörtels ungefähr  $\frac{1}{8}$  seines Widerstandes gegen Zerdrücken. Die Adhäsion an den Steinen und Ziegeln ist grösser, als seine Cohäsion.

§ 26. Nach Vicat<sup>5)</sup> beträgt die Cohäsion für den Quadratcentimeter

für gut angemachten Mörtel aus Quarzsand und

Kalk, der vorzüglich hydraulisch . . . . .  $9^k,6$

für gut angemachten Mörtel aus Quarzsand und

Kalk, der gewöhnlich hydraulisch . . . . . 6, 0

für gut angemachten Mörtel aus Quarzsand und

gewöhnlichem, mittlerem oder fettem Kalk . . 3, 6

für schlecht angemachten Mörtel, gewöhnlich

höchstens . . . . . 1, 5

1) Mémoires des savants étrangers. 1773.

2) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 150 und 155.

3) Art de bâtir, tome I, pag. 225.

4) Art de bâtir, tome I, pag. 224 und 225.

5) Recherches expérimentales sur les chaux de construction, pag. 96.

§ 27. Nach demselben Ingenieur sind später die folgenden allgemeinen Resultate angegeben worden, nämlich:

Vorzüglicher hydraulischer Kalk . . .	12 <sup>kil.</sup>
Gewöhnlicher hydraulischer Kalk . . .	10
Mittlerer hydraulischer Kalk . . . . .	7
Fetter Kalk . . . . .	3
Schlechter Mörtel . . . . .	0,75

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Mischungsverhältnisse, so wie der Lösungsprocess angemessen bestimmt seien. Die obigen Werthe gelten für Mörtel, der seit einem Jahre angemacht und fortwährend den Unbilden der Witterung ausgesetzt war.<sup>1)</sup>

§ 28. Die Versuche mit Mörtel, der mit Cement von Pouilly angemacht war, haben folgende Resultate geliefert.<sup>2)</sup> Die Adhäsion beträgt für den Quadratcentimeter:

Prismen ohne Beimischung von Sand, im Wasser 6 <sup>k.</sup>	47
Gleiche Theile von Cement und Sand, im Wasser 6,	97
Dasselbe, ausserhalb des Wassers . . . . .	5, 00
Zwei Theile Cement und ein Theil Sand, im Wasser 9,	38
Dasselbe, ausserhalb des Wassers . . . . .	9, 90

§ 29. Bei einigen Versuchen von J. White<sup>3)</sup> wurde ein Pfeiler aus Ziegeln mit Mörtel aus Kalk, Puzzolane und Sand, 3' 4" breit und 1' 10" dick (engl. Masse) construirt; derselbe wurde nach einem Monate untersucht, indem das obere Ende gehoben wurde, und er trug sein eignes Gewicht bei einer Höhe von 5' 2". Das Innere war noch nicht vollkommen trocken.

Ein anderer Pfeiler wurde ebenso aus 35 Ziegel-lagen mit Mörtel aus Kalk und zerstampfter und gesiebter Puzzolane 6' engl. breit, 3' dick und 8' 10' hoch aufgeführt. Nach neun Monaten wurde er untersucht und das obere Ende um 15" gehoben, ohne den Pfeiler zu zerreißen. Das Gewicht betrug ungefähr 10 engl. Tonnen.

#### Widerstand der Hölzer gegen Ausdehnung.

§ 30. Nach den Versuchen von Rondelet<sup>4)</sup> beträgt die Cohäsion des Eichenholzes, wenn dieses in der

1) Résumé sur les mortiers et cimens calcaires, pag. 69.

2) Rapport fait par M. Mallet à la Société d'Encouragement, sur le ciment de M. Lacordaire, 17. Juin 1829.

3) The Philosophical Magazine, april 1832.

4) Art de bâtir, tome I, pag. 232.

Richtung der Fasern gezogen wird, 102 Pfund für die Quadratlinie (981<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter).

§ 31. Mittelwerthe aus den Versuchen von Barlow <sup>1)</sup> mit Stäben von ungefähr  $\frac{1}{3}$  Zoll Durchmesser. Aus den Resultaten ist die Kraft berechnet, deren man zum Zerreissen bei einem Querschnitte von 1 engl. Quadratzoll bedarf.

Tannenholz, 1, . . . . .	12857	Pfund engl.
2, . . . . .	11549	" "
Eschenholz 1, . . . . .	17207	" "
2, . . . . .	16947	" "
Buchenholz . . . . .	11467	" "
Eichenholz, 1, . . . . .	9198	" "
2, . . . . .	11580	" "
Teakholz (Indische Eiche)	15090	" "
Buchsbaumholz . . . . .	19891	" "
Birnbaumholz . . . . .	9822	" "
Mahagoniholz . . . . .	8041	" "

§ 32. Nach denselben Versuchen beträgt für Tannenholz der Widerstand gegen Verschiebung, d. h. die Kraft, welche man anwenden muss, um zwei Theile eines Körpers durch eine den Fasern parallele Verschiebung auf einander zu trennen, 592 Pfund für den Quadratzoll (engl. Masse).

§ 33. Nach den Versuchen von Tredgold <sup>2)</sup> beträgt die Cohäsion der Hölzer, wenn diese einen Zug erleiden, dessen Richtung rechtwinklig gegen die Richtung der Fasern ist, für den engl. Quadratzoll, für

Eichenholz . . . . .	2316	engl. Pfund
Pappelnholz . . . . .	1782	" "
Lärchenholz . . . . .	970 bis 1700	" "

Die vorstehenden Zahlen, so wie diejenigen in den §§ 31 und 32, sind mit 0,07028 zu multipliciren, um den Widerstand in Kilogrammen ausgedrückt für den Quadratcentimeter zu erhalten.

§ 34. Nach einigen Versuchen von Minard und Desormes beträgt die Cohäsion des Eichenholzes, wenn dieses in der Richtung der Fasern einen Zug erleidet, 600 bis 700 kil. für den Quadratcentimeter. Die Cohäsion der Zitterpappel scheint ebenso gross zu sein.

1) An Essay on the strength and stress of timber, pag. 29.

2) Elementary principles of carpentry, pag. 29.

§ 35. Nach denselben Versuchen fand man für das Holz der Zitterpappel den Widerstand gegen Verschiebung, oder die Kraft, welche man aufwenden muss, um zwei Theile eines Körpers durch eine den Fasern parallele Verschiebung auf einander zu trennen, zu 57 kil. für den Quadratcentimeter.

§ 36. Versuche von Minard und Desormes über die progressive Verlängerung eines Eichenstabes von 0<sup>m</sup>,036 ins Gevierte, wenn dieser in der Richtung der Länge gezogen wurde.

Bela- stungen	0, k	1708 k	0 k	2411 k	0 k	3114 k	0 k
Beob. Längen	1 <sup>m</sup> ,016	1 <sup>m</sup> ,017	1 <sup>m</sup> ,016	1 <sup>m</sup> ,0175	1 <sup>m</sup> ,016	1 <sup>m</sup> ,01775	1 <sup>m</sup> ,01625

Aus diesem Versuche erhellt, dass das Eichenholz durch eine Belastung von 213<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter um  $\frac{1}{629}$  ausgedehnt werden kann, ohne die Fähigkeit zu verlieren, sich nach der Entlastung wieder bis auf seine ursprüngliche Länge zusammenzuziehen. Dies entspricht einer Verlängerung von 0,0007464 durch ein Kilogramm für jeden Quadratcentimeter des Querschnitts.

§ 37. Nach den von Bevan<sup>1)</sup> veröffentlichten Versuchen fügen wir den Ausdruck für die Kraft hinzu, die die man anwenden muss, um Holzschrauben herauszureissen. Die Schrauben waren 2" engl. lang, der äussere Durchmesser der Gewinde betrug 0,22 Zoll, der innere Durchmesser 0,15 Zoll. Das Gewinde bildete auf der Länge eines Zolles 12 Gänge. Die Schrauben gingen durch einen halben Zoll dicke Bohlen ganz hindurch. Die folgenden Zahlen geben die Kraft an, wodurch sie herausgerissen wurden.

Trocknes Eschenholz . . . . .	790 engl. Pfund.
Eichenholz . . . . .	760 " "
Acajou . . . . .	770 " "
Ulmenholz . . . . .	655 " "
Feigenmaulbeerbaumholz (Sycomore) . . . . .	830 " "

Bei Tannenholz und andern weichen Hölzern betrug die Kraft nur die Hälfte der vorstehenden Werthe. (Bei weitem genauere Versuche hierüber hat Karmarsch angestellt<sup>2)</sup>).

1) The Philosophical Magazine, octobre 1827.

2) Mittheilungen des Gewerbevereins für das Königreich Hannover, Jahrgang 1838, S. 185.

### Widerstand des Schmiedeiseins gegen Ausdehnung.

§ 38. Nach den Versuchen, die Poleni<sup>1)</sup> in Rom mit acht kleinen Stäben, die 0<sup>m</sup>,00372 ins Gevierte hielten, anstellte, variirt die Cohäsion von 41<sup>k</sup> bis 50<sup>k</sup> für den Quadratmillimeter; der Mittelwerth ist 44<sup>k</sup>,5.

§ 39. Resultate aus den Versuchen von Perronet mit Stäben aus Quadrateisen, die in der Richtung ihrer Länge gezogen wurden.<sup>2)</sup>

Länge der Stäbe	Seite des quadrat. Querschnitts	Zerreissendes Gewicht	Getragene Belastung f. d. Quadratmillimeter
Meter	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
0,650	12,97	5972	35,5
0,325		6687	39,8
0,162		5502	32,7
0,081		5972	35,5
0,650	9,02	2983	36,7
0,325		3113	38,3
0,650	6,77	2134	46,6
0,325		2369	51,7
0,162		2472	53,9
0,081		2487	54,3
0,650		2159	47,1
Mittlere Belastung für den Quadratmillimeter: 42,9 kil.			

§ 40. Resultate aus den Versuchen von Perronet mit Stäben aus Rundeisen, die in der Richtung ihrer Länge gezogen wurden.

Länge der Stäbe.	Durchmesser	Zerreissendes Gewicht	Getragene Belastung f. d. Quadratmillimeter
Meter	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
0,650	10,15	3020	37,3
0,325		3074	38,0
0,162		3348	41,4
0,081		3368	41,6
0,650	7,88	2717	55,7
0,162		2748	56,3
0,081		2683	55,0
0,650	7,62	1463	32,1
0,325		1662	36,4
0,162		1721	37,7
0,081		1510	33,1
Mittlere Belastung für den Quadratmillimeter: 42,2 kil.			

1) Memorie istoriche della cupola del tempio Vaticano, citirt in dem Traité de la construction des ponts, tome II, pag. 395.

2) Traité de la construction des ponts par M. Gauthey, tome II, pag. 151.

§ 41. Resultate der Versuche von Sufflot und Rondelet<sup>1)</sup> mit Stabeisen, das in der Richtung der Länge gezogen wurde. Die Länge der Stäbe betrug etwas mehr, als zwei Fuss.

Eisen.	Breite	Dicke	Zerrei-	Getragene Be-
	der Stäbe		ssendes Gewicht	lastung für die Quadratlinie
Durchaus sehniges Eisen . . . . .	Linien	Linien	Pfund	Pfund
Desgleichen . . . . .	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$	3542	590
Eisen, das beim Bruche sich etwas körnig zeigt . . . . .	$2\frac{2}{3}$	2	3374	633
Eisen, das beim Bruche sich $\frac{2}{3}$ sehnig zeigt . . . . .	6	$2\frac{1}{2}$	6157	410
Eisen, zur Hälfte sehnig . . . . .	5	$2\frac{1}{2}$	4874	390
Durchaus sehniges Eisen . . . . .	$5\frac{1}{2}$	3	5524	335
Eisen, das $\frac{1}{3}$ sich körn. zeigt . . . . .	6	3	15600	866
Eisen, das sich über die Hälfte körnig zeigt . . . . .	6	3	7800	433
Eisen, das etwas körnig . . . . .	6	3	5857	325
Durchaus sehniges Rund-	3	2	3635	606
eisen, 3 Linien im Durch-				
messer . . . . .			6600	933
Grobkörniges, gar nicht sehniges Eisen . . . . .	4	4	2991	187
Mittelkörniges, gar nicht sehniges Eisen . . . . .	4	4	3980	249
Feinkörniges, gar nicht sehniges Eisen . . . . .	4	4	5840	365
Mittelkörniges, zur Hälfte sehniges Eisen . . . . .	4	4	7200	450
Durchaus sehniges Eisen . . . . .	4	4	10320	645
Grobkörniges, zur Hälfte sehniges Eisen . . . . .	4	4	5840	365
Mittlere Festigkeit für eine Quadratlinie . . . . .				486

Die mittlere Festigkeit für einen Quadratmillimeter beträgt  $46\frac{1}{2}$ .

§ 42. Resultate aus den Versuchen, die 1815 von Minard und Desormes angestellt wurden. Der Zug wurde vermittelt eines Hebels hervorgebracht.

1) Traité de l'art de bâtir, tome I, pag. 277.

Bezeichnung des Eisens.	Fläche des Querschnitts, in welchem der Stab zerrissen wurde	Zerreisendes Gewicht		Verhältniss der Ausdehnung zur ursprünglichen Länge
		im Ganzen	für den Quadr.-milli-meter	
	Quadratmillim.	Kilogr.	Kilogr.	
Quadrasteisen, mittleres glänzendes Korn . .	115	5115	44,5	0,13
Dasselbe, die Stäbe zusammengescheisst .	150	4520	40	
Dasselbe . . . . .	121	3520	29,1	
Dasselbe . . . . .	134	6000	45,4	0,05
Dasselbe . . . . .	138	4760	34,5	
Dasselbe . . . . .	120	4120	34,3	
Dasselbe . . . . .	224	4920	39,7	0,025
Dasselbe . . . . .	129	5420	42	0,035
Dasselbe . . . . .	126	5320	42,2	
Rundeisen, feinkörnig .	78	3140	40,2	0,11
Quadrasteisen, feines grau bläuliches Korn .	138	4120	29,9	0,025
Dasselbe . . . . .	121	4520	37,3	0,035
Dasselbe . . . . .	100	3520	35,2	0,10
Dasselbe . . . . .	108	4580	42,4	0,095
Dasselbe . . . . .	108	5470	50,6	0,085
Dasselbe, 5 Minuten vor dem Versuche weiss glühend gemacht . .	108	4620	42,8	0,185
Zusammengescheusste und ausgestreckte Stäbe . . . . .	117	5020	42,9	0,135
Quadrasteisen, theils sehnig . . . . .	115	4120	35,8	0,07
Dasselbe . . . . .	110	4270	38,8	0,15
Dasselbe . . . . .	110	4320	39,3	0,1
Zusammengescheusste und ausgestreckte Stäbe . . . . .	121	5120	42,3	0,15
Dasselbe . . . . .	147	5150	35,0	0,045
Dasselbe, weiss glühend gemacht u. im Wasser abgekühlt . . . . .	121	4520	37,3	0,08
Quadrasteisen, sehnig, umgeben von einer dünnen Schicht körnigen Eisens . . . . .	700	22030	31,4	0,075
Dasselbe . . . . .	620	19228		
Dasselbe . . . . .	625	21530	34,4	0,07
Dasselbe . . . . .	616	21820	35,4	0,03

Als man die Stücke einer und derselben Stange zusammenscheusste, wurde das Eisen durch diese Bearbeitung etwas grobkörniger; doch schien es nicht, als

ob das Eisen an den Stellen, wo sich ein größeres Korn zeigte, oder an den Schweissstellen, sich mehr zum Bruche neigte, als an andern.

§ 43. Die folgende Tabelle giebt die Resultate aus andern Versuchen, die ebenfalls 1815 von Minard und Desormes angestellt wurden, und zwar in der Absicht, die progressive Verlängerung des Eisens unter einer zunehmenden Belastung zu bestimmen. Die ursprüngliche Länge der Stäbe, deren Verlängerung beobachtet wurde, war 0<sup>m</sup>,2.

Bezeichnung des Eisens.	Inhalt der Quer- schnitts- fläche	Belastung für den Quadrat- millimeter bei einer Aus- dehnung um				Belastung per Quadrat- millimeter, bei welcher der Bruch erfolgte	Gesamt- ausdehnung dividirt durch die ursprüng- liche Länge
		1/400	1/100	1/50	1/20		
I. Versuch.	Qua- dratm.	Kil.	Kil.	Kil.	Kil.	Kilogramm	
1. Probe . . .	115	27,1	32,3	35,8	40,4	44,5	0,13
2. " . . .	132	24,2	27,4	32		45,4	0,05
3. " . . .	124		35,6			39,7	0,025
4. " . . .	129		35,8	38,8		42	0,035
5. " . . .	78	19,5	28,5	31,0	35,9	40,2	0,11
II. Versuch.							
1. Probe . . .	103		26,4			40	0,025
2. " . . .	117	30,1		35,2		38,6	0,035
3. " . . .	108	30,7	32,6	35,2	39,4	42,4	0,095
4. " . . .	108		31,2	33,9	38,6	50,6	0,085
5. " . . .	117	26,7	30,9	33,5	37,5	42,9	0,135
6. " (*) . . .	112		32,3	35			
7. " . . .	108		27,	30,5	35,7	42,8	0,185
III. Versuch.							
1. Probe . . .	115	23,6	26,3	29,3	33,5	35,8	0,07
2. " . . .	110		27	29,3	34,4	38,8	0,15
3. " . . .	110		28,8	31,4	36,1	39,3	0,1
4. " . . .	121		29,5	31,6	36,5	42,3	0,15
5. " . . .	147	21,4	29,2	31,4		35,0	0,045
6. " . . .	121	19,2	22,5	29,1	34,0	37,3	0,08
IV. Versuch.	324	26,7	28,2	30,1		32,8	0,04
V. Versuch .	804	21,5	24,8				
VI. Versuch.							
1. Probe . . .	625	22,1	25,6	28,8		35,2	0,075
2. " . . .	625	26,8	31,2	32,5		34,4	0,07
3. " . . .	616	26,	28,5	31,8		35,4	0,03
4. " . . .	650	22,3	27,6				
VII. Versuch.	1056	22,6	24,7				
Draht, ausge- glüht. . . .	6,16	23	25			39,4	0,187
Mittel. . . .		24,3	28,7	32,3	36,5	39,8	0,086



Das mit einem Sternchen bezeichnete Eisen wurde zwei Tage hindurch belastet mit dem Gewichte, welches es um  $\frac{1}{100}$  verlängert hatte, und drei Monate hindurch mit dem Gewichte, welches es um  $\frac{1}{40}$  verlängert hatte, ohne dass die Verlängerungen über das Mass hinaus zugenommen hätten, welches sich als erste Wirkung der Belastung zeigte. Doch war die Belastung, welche den Stab um  $\frac{1}{40}$  ausdehnte,  $\frac{4}{5}$  derjenigen, die den Stab zerrissen hätte.

§ 44. Resultate der Versuche von Telfort<sup>1)</sup> vermittelst einer hydraulischen Presse. Die ausgeübte Kraft wurde aus der Belastung eines Sicherheitsventils berechnet.

Bezeichnung des Eisens.	Belastung, bei der die Stange sich ausdehnte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Belastung für den engl. Quadratzoll	
	Tonnen	Tonnen	Centner	Tonnen	Centner
Eisen aus Süd wales, $1\frac{3}{8}$ Zoll im Durchmesser		43	11	29	6
Dasselbe, $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser . . . .		52	$15\frac{1}{4}$	29	16
Eisen aus Staffordshire, $\frac{3}{4}$ Zoll ins Gevierte	12	15	$5\frac{3}{4}$	27	3
Dasselbe, $1\frac{1}{12}$ Zoll ins Gevierte . . . . .	32	32	6	27	10
Eisen aus Wales, 1" ins Gevierte . . . .	18	29		29	
Schwedisches Eisen, 1" ins Gevierte . . . .	17	29		29	
Eisen aus alten zusammen geschweissten Stücken, 1" ins Gevierte . . . . .	16	29		29	
Gewöhnliches Eisen aus Staffordshire, 1" ins Gevierte . . . . .	19	31		31	
Gewöhnliches Eisen, 2 Zoll im Durchmesser	45	100		31	16
Mittlere Festigkeit für 1 engl. Quadratzoll. .				29	$5\frac{2}{3}$

Der Mittelwerth entspricht  $46^{\frac{1}{2}}$  für einen Quadratmillimeter. Man hält denselben für etwas zu hoch nach der Natur des Apparates, der bei den Versuchen angewendet wurde.

§ 45. Resultate der Versuche von Brown.<sup>2)</sup> Dieselben wurden mit einer Maschine angestellt, bei welcher

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 228 oder auch Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus (par M. Navier), pag. 218.

2) An essay on the strength and stress of timber, pag. 232, oder auch Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 220.

die ausgeübte Kraft aus einem System von Hebeln gefunden wurde.

Bezeichnung des Eisens.	Länge der Stäbe	Ausdehnung vor dem Bruche	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Belastung für den engl. Quadratzoll
	Fss. Zoll	Zoll	Tonnen	Centner	Tonnen
Schwedisches Eisen, das Korn sehr fein und dicht $1\frac{5}{16}$ Zoll ins Gevierte . .	3 6	$0\frac{3}{16}$	40	19	23,77
Dasselbe. . .	3 6	$0\frac{1}{4}$	39	15	23,19
Dasselbe, $1\frac{3}{16}$ Zoll ins Gevierte . .	3 6	3	33	10	23,75
Altes, dunkles, russisches Eisen, $1\frac{5}{16}$ Z. im Durchmesser .	3 6	$2\frac{1}{4}$	36	2	26,55
Eisen aus Wales, Nr. 3, $1\frac{1}{4}$ Zoll ins Gevierte . . . . .	3 6	2	38	1	24,35
Gewöhnliches Eisen aus Wales, das Korn sehr fein und dicht, $1\frac{1}{8}$ Zoll ins Gevierte . . . . .	3 6	0	31		24,90
Eisen aus Wales, Nr. 3, 2 Zoll im Durchmesser (dehnte sich bei 68 Tonnen) . . .	12 6	$18\frac{1}{2}$	82	15	26,33
Eisen aus Wales, $1\frac{3}{8}$ Zoll im Durchmesser . . . . .	5	7	43	10	26,34
Mittlere Festigkeit für einen engl. Quadratzoll . . .					25

Der Mittelwerth entspricht  $39\frac{1}{4}$  für einen Quadratmillimeter. Man hält denselben für etwas zu niedrig nach der Natur des Apparates, welcher zu den Versuchen angewendet wurde.

§ 46. Mittlere Resultate aus den Versuchen von Brunel <sup>1)</sup> mit Schmiedeeisen in kleinen, ungefähr  $\frac{3}{8}$  Zoll ins Gevierte haltenden Stäben. Die folgenden Werthe sind für einen Querschnitt von einem engl. Quadratzoll berechnet.

1) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 224.

Aus zehn Versuchen mit dem besten Eisen aus Yorkshire  
 Aus zehn Versuchen mit Eisen aus Yorkshire, zweiter Qualität . . . . .

Belastung, bei welcher das Eisen sich ausdehnte		Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	
Tonnen	Centner	Tonnen	Centner
24	11	32	8
22	4	30	8

§ 47. Resultate aus den Versuchen von Séguin,<sup>1)</sup> dem ältern, mit Stäben aus Schmiedeeisen, die in der Richtung ihrer Länge gezogen wurden. Die Versuche wurden mittelst eines Hebels angestellt.

Bezeichnung des Eisens.	Breite der Stäbe	Dicke	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	Belastung für den Quadratmillimeter
	Millim.	Millim.	Kilogramm	Kilogramm
Gewalztes Eisen von Saint-Chamond. . .	16	8	5611	43,8
Dasselbe . . . . .	10	8	4133	51,7
Dasselbe, 0,01 im Durchmesser . . . .			3743	48
Eisen aus Burgund . .	13	13	5226	30,4
Dasselbe, bis zum Rothglühen erhitzt und langsam abgekühlt .	13,5	13,5	5435	29,7
Dasselbe, in der Mitte zerschnitten und mit den Enden zusammengeschweisst, ohne es auszustrecken . . .	13,3	13,3	5280	29,7
Dasselbe, in der Mitte zerschnitten, der Länge nach zusammengeschweisst und ausgestreckt. . . .	10,15	10,15	5688	55,2
Dasselbe, noch mehr ausgestreckt als das vorgehende Eisen ohne zu schweißen .	4,5	4,5	1238	61
Bandeisen, sehr weich	20,3	1,7	1541	44,7

§ 48. Bei den Versuchen, die in Petersburg<sup>2)</sup> im Grossen mit Hülfe einer hydraulischen Presse angestellt wurden, trug das beste Eisen 26 Tonnen (zu

<sup>1)</sup> Des ponts en fil de fer, pag 84 und 100 der zweiten Ausgabe.

<sup>2)</sup> Brief des Herrn Lamé an Herrn Baillet in den Annales des Mines, 1825, tome X, pag. 329.

1050 kil.) für den engl. Quadratzoll (42 kil. für den Quadratmillimeter). Bei  $\frac{2}{3}$  dieser Belastung fing das Eisen an, sich zu verlängern, und die Verlängerungen schienen in einer geometrischen Progression zu wachsen, wenn die Belastungen in einer arithmetischen Progression zunahmen.

Das schlechteste Eisen trug 14 Tonnen für den engl. Quadratzoll. Es schien sich nicht merklich zu verlängern vor dem Zerreißen.

Indem man vier Stangen von mittlerer Güte zusammenschweisste, erhielt man ein Eisen, welches 24 Tonnen (39 kil. für den Quadratmillimeter) trug, und bei 16 Tonnen anfang, sich auszudehnen.

§ 49. Nach den zahlreichen Versuchen, welche Lagerhjelm <sup>1)</sup> 1826 in Schweden anstellte ist das gewalzte Eisen stets von gleichförmiger Dichtigkeit; das unter dem Hammer bereitete Eisen hingegen von veränderlicher Dichtigkeit und es enthält oft brüchige Stellen. Die Walzen drehen die Fiber des Eisens nicht, was unter dem Hammer häufig geschieht. Die Elasticität (d. h. das Verhältniss der Belastungen zu den sehr kleinen Verlängerungen, welche durch sie bewirkt werden), ist, so lange sie noch nicht angegriffen ist, dieselbe für gewalztes Eisen, wie für unter dem Hammer bereitetes; aber das Gewicht, welches eine bleibende Ausdehnung erzeugt, ist für das erstere geringer. Der Widerstand gegen Zerreißen scheint von der Bereitungsart unabhängig zu sein, er bleibt derselbe für hartes, weiches, sehniges oder nicht sehniges Eisen. Die Elasticität wird durch das Ausglühen nicht verändert. Sehr geschmeidiges Eisen kann sich, ohne zu zerreißen, um 0,27 seiner ursprünglichen Länge ausdehnen; der Querschnitt wird dabei auf 0,722 reducirt und das specifische Gewicht nimmt um 0,01 ab. Das Eisen erhitzt sich, ehe es zerreisst, und im Augenblick des Zerreißens zeigt sich zuweilen ein heller Funke. Die Wärmeentwicklung ist bei weichem Eisen grösser, als bei hartem.

§ 50. Aus den Beobachtungen bei der Prüfung des Eisens, welches zur Construction der Invalidenbrücke zu Paris bestimmt war, hat man im Mittel gefunden, dass

1) Das schwedische Werk von Lagerhjelm ist erwähnt in dem Bulletin des Sciences technologiques, janvier 1829, tome XI, pag. 41.

das Schmiedeisen unter einer Belastung von 1 kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts sich um 0,00005166 seiner ursprünglichen Länge ausdehnte. <sup>1)</sup>

Bei diesen Versuchen war die bis auf 18 kil. für den Quadratmillimeter gebrachte Belastung noch nicht gross genug, um der natürlichen Elasticität des Eisens zu schaden. Dasselbe nahm nach der Entlastung genau seine ursprüngliche Länge wieder an. Die Ausdehnung nahm nicht zu, wenn auch die Belastung 12 und selbst 36 Stunden hindurch dauerte.

§ 51. Die wichtigsten Resultate aus den von Emil Martin veröffentlichten Versuchen <sup>2)</sup> Man wandte eine hydraulische Presse an, um die Spannung des Eisens zu bewirken.

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser oder Seite des quadratischen Querschnitts.	Belastung bei welcher der Bruch erfolgte		Ausdehnung dividirt durch die ursprüngliche Länge.
		im Ganzen	für den Quadratmillimeter.	
Rundeisen von St. Chamond .	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm	
	45	55 000	34,6	0,196
	45	57 500	36,2	0,230
	45	53 000	33,3	0,205
	45,5	54 500	33,5	0,206
	53,5	75 000	33,3	0,200
	54	82 000	35,8	0,160
Rundeisen von Fourchambault	53	75 000	34,3	0,230
	45	54 500	33,5	0,210
	44,5	53 500	34,4	0,224
	49	63 000	33,5	0,225
	54	76 500	33,4	0,223
	54	78 000	34,1	0,243
	55,5	80 500	33,3	0,210
Engl. Quadratischeisen besserer Qualität . . .	38,8	58 000	38,5	0,145
	38,8	56 000	37,5	0,166
	29	30 900	36,7	0,147
	25,5	23 300	35,8	0,197
	25,5	24 000	36,9	0,197

<sup>1)</sup> Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus pag. 293 der zweiten Auflage.

<sup>2)</sup> Du fer dans les ponts suspendus, Brochure 4, 1832.

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser	Belastung bei welcher der Bruch erfolgte		Ausdehnung dividirt durch die ursprüngliche Länge.
		im Ganzen	für den Quadratmillimeter	
	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm	
Engl. Rundeisen (Best cable Crawshay) . .	39	39 000	32,7	0,214
	32,8	29 400	34,9	0,232
	32	25 500	35,4	0,252
	28,5	21 500	33,7	0,208
	28,5 u. 29	23 000	35,8	0,183
	25,5	17 000	33,3	0,143
	25,5	18 600	36,4	0,217
Eisen zu Ankerketten von Fourchambault	61	92 000	31,5	0,216
	57	81 000	31,7	
	57	80 400	31,5	0,201
	49	62 500	33,1	0,230
	45	53 900	33,9	0,176
	40,5	52 400	32,9	0,207
	33,5	30 000	34,0	0,195
	33,3	30 200	34,6	0,197
	29 u. 29,7	22 400	33,2	0,188
	29,3	22 700	33,6	0,186
	29 u. 29,5	22 500	33,8	0,186
	28,3 u. 28,7	21 400	33,6	0,190
Eisen zu Ankerketten v. Rigny	41,8 u. 42,7	51 000	36,4	0,160
	33,8 u. 34	26 900	29,8	0,226
	33 u. 34	29 200	33,1	0,111
	33 u. 33,5	31 200	35,9	
Eisen zu Ankerketten von Creusot . . .	63	102 000	32,8	0,089
	55,5	86 000	35,5	0,230
Rundeisen von Creusot . . .	37,5	39 500	35,8	0,225
	37,5	36 000	32,6	0,070
	37,5	41 500	36,7	0,218
Eisen zu Ankerketten von St. Chamont. . .	45	58 000	36,5	0,183
	45	57 000	35,8	0,200
Rundeisen, erhalten durch Zusammenschweissen von Abgängen vom Walzwerk von Guérigny .	45	51 000	32,1	0,241

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Ausdehnung dividirt durch die ursprüngliche Länge
		im Ganzen	für den Quadratmillim.	
Rundeisen v. Blechabgängen, von demselben Walzwerk . . . . .	31,3	24 500	31,8	0,241

### Widerstand des Eisenblechs gegen Ausdehnung.

§ 52. Resultate aus den vom Verfasser mit Eisenblech angestellten Versuchen. Bei denselben wurden die Gewichte unmittelbar an die zu prüfenden Bleche gehängt. Die Dimensionen sind mit Genauigkeit gemessen.

Bezeichnung des Eisens.	Länge	Dicke	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	
			im Ganzen	für den Quadratmillim.
	Millim.	Millim.	Kilogr.	Kilogramm
Blech, das in der Walzrichtung gezogen wurde . . . . .	9	1,5	488	36,1
Dasselbe . . . . .	6,3	1,5	374	39,6
Dasselbe . . . . .	7,3	2,6	823	43,3
Dasselbe . . . . .	8,3	2,4	905	45,4
Dasselbe . . . . .	7,8	1,5	461	39,4
Dasselbe . . . . .	7,3	2,3	686	40,9
Mittel . . . . .	..	..	..	40,8
Blech, das in der zur Walzenrichtung normalen Richtung gezogen wurde . . . . .	6,1	1,0	241	39,5
Dasselbe . . . . .	7,2	2,2	531	33,5
Dasselbe . . . . .	7	1,5	351	33,5
Dasselbe . . . . .	7,3	1,1	316	39,3
Mittel . . . . .	..	..	..	36,4

Die Bleche fingen an, sich merklich auszudehnen, bei Gewichten, die die Hälfte oder zwei Drittel derjenigen betragen, bei welchen der Bruch erfolgte.

### Widerstand des Eisendrahts gegen Ausdehnung.

§ 53. Nach Buffon<sup>1)</sup> wurden zwei Drähte von 2,26-Millimeter im Durchmesser durch Gewichte von 236 und

1) Oeuvres de Buffon, partie expérimentale, 4<sup>e</sup> mémoire.

242 kil. zerrissen; diese Zahlen entsprechen 60 kil. für den Quadratmillimeter.

§ 54. Mittlere Resultate aus den Versuchen von Telfort.<sup>1)</sup>

Durchmesser der Drähte in engl. Zoll.	$\frac{6}{70}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{10}$
Zerreissende Gewichte in engl. Pfund.	531	738	277	157	630

Das Mittel entspricht  $36^k,6$  für den Quadratmillimeter.

§ 55. Resultate aus den Versuchen von Séguin, dem ältern, mit Eisendraht. Die Durchmesser der Drähte wurden nicht gemessen, sondern aus dem Gewichte eines Drahtstücks von 1<sup>m</sup> Länge berechnet, wobei man das Gewicht eines Kubikmeters zu 7780 kil. voraussetzte.<sup>2)</sup>

Bezeichnung der Drähte.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	für den Q.-millim.
	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
Burgundischer Draht, Nr. 8, ungleichmässig ausgeglühet	1,172	41,3	38,2
Derselbe, Nr. 7, sorgfältig aus- geglühet . . . . .	1,062	31,4	36,1
Derselbe, Nr. 18, ungeglühet . .	3,366	505,6	56,8
Derselbe, Nr. 7, ungeglühet . .	1,062	65,5	73,7
Feiner Eisendraht (Fil de l'Aigle) zu Krämpeln (Kardätschen) angewandt . . . . .	0,2294	3,72	89,8
Feiner Eisendraht (Passe-perle), ziemlich weich . . . . .	0,5917	23,6	85,7
Draht aus einer Fabrik zu Besançon, Nr. 1, weich . . . . .	0,6188	25,96	86,1
„ 2, weich . . . . .	0,7078	34,25	87
„ 3, brüchig . . . . .	0,7327	34,12	80,8
„ 4, brüchig . . . . .	0,838	42,3	76,6
„ 5, sehr brüchig . . . . .	0,9115	47,25	72,3
„ 6 . . . . .	1,022	62,56	76,1
„ 7 . . . . .	1,08	65,25	71,2
„ 8, sehr brüchig . . . . .	1,123	66,75	67,3
„ 9, ziemlich brüchig . . . .	1,293	91,74	69,8

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 221; oder auch Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 211.

2) Des ponts en fil de fer, pag. 83 und 100.



Bezeichnung der Drähte.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	für den Q.-millim.
<b>Draht aus einer Fabrik zu Besançon,</b>	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
Nr. 10, sehr weich . . . . .	1,435	105	64,8
„ 11, sehr weich . . . . .	1,476	100,25	58,6
„ 12 . . . . .	1,691	124,8	55,5
„ 13 . . . . .	1,8	145,5	57,2
„ 14, sehr weich, unelastisch	2,072	166,5	49,3
„ 15 . . . . .	2,226	202	51,9
„ 16, sehr weich . . . . .	2,489	311	63,9
„ 17, unganzz . . . . .	2,695	389	68,1
„ 18 . . . . .	3,087	617	84
„ 19 . . . . .	3,492	750	78,2
„ 20 . . . . .	4,14	874,75	65,7
„ 21 . . . . .	4,812	1138	62,5
„ 22, sehr brüchig . . . . .	5,449	1579	67,7
„ 23, weich . . . . .	5,942	1738,5	62,6

§ 56. Resultate aus den Versuchen von Dufour mit Eisendraht. Die Durchmesser der Drähte sind mit Genauigkeit gemessen. Die folgenden Zahlen sind die Mittelwerthe aus mehreren Versuchen mit jeder Drahtsorte.<sup>1)</sup>

Bezeichnung der Drähte.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	für den Q.-millim.
<b>Draht aus der Fabrik von la Ferrière</b>	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
Nr. 4 . . . . .	0,85	48	84,4
„ 13 . . . . .	1,9	196	69,1
„ 17 . . . . .	2,75	382	64,3
„ 19 . . . . .	3,7	776	72,2
<b>Draht aus der Fabrik von St. Gingolf.</b>			
Nr. 4 . . . . .	0,85	38,5	67,7
„ 13 . . . . .	1,9	178	62,8
„ 17 . . . . .	2,75	349	49,4
„ 19 . . . . .	3,7	644	59,9

§ 57. Aus einigen Versuchen, die bei einer Temperatur von 6 bis 8 Grad unter Null angestellt worden

<sup>1)</sup> Description du pont suspendu en fil de fer, construit à Genève, pag. 8 u. figde.

waren, schien hervorzugehen, dass die Kälte den Drähten einen kleinen Theil ( $\frac{1}{13}$  oder  $\frac{1}{25}$ ) ihrer Kraft benähme; man steckte daher einen Draht aus der Fabrik von la Ferrière, Nr. 4, in ein Futter, worin derselbe bis auf  $-22\frac{1}{2}$  Grad abgekühlt und bis auf  $+92$  Grad erhitzt wurde. Diese Temperaturveränderungen schienen keinen merklichen Einfluss auf die Tragfähigkeit des Drahtes auszuüben. <sup>1)</sup>

§ 58. Die Tragfähigkeit des ausgeglühten Drahtes wurde als etwas geringer, als die Hälfte von derjenigen des ungeglühten gefunden.

§ 59. Die Tragfähigkeit der oben aufgeführten Drähte blieb dieselbe, als man sie um einen Cylinder von 0<sup>m</sup>,04 im Durchmesser wickelte. <sup>2)</sup>

§ 60. Versuche von Lamé mit russischem Eisendraht. <sup>3)</sup> Der Durchmesser der Drähte wurde aus dem Gewichte einer bestimmten Länge gefunden, wobei man das Gewicht eines Kubikmeters zu 7600 kil. annahm. Der wahre Werth dieses Gewichtes liegt zwischen 7600 und 7800 Kilogramm.

Nummer der Drähte	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	f. d. Quadratmillim.
	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
6	4,999	1457	74,2
7*	4,664	1042	61,0
9	3,743	800,5	72,7
10*	3,197	438,7	54,7
11*	3,086	358,1	47,9
12	2,687	410,2	72,3
13	2,190	376,4	99,9
14	1,902	277,9	97,8
16	1,497	208,7	118,5
17*	1,456	130,2	78,2
19	1,090	89,6	95,9
20	0,985	98,8	143,8

Die mit einem Sternchen bezeichneten Versuche müssen als mangelhaft verworfen werden, da der Draht an der Befestigungsstelle zerriss.

1) Description du pont suspendu etc., pag. 23.

2) Dasselbe Werk, pag. 18.

3) Journal des voies de communication, Nr. 12, 1828.

§ 61. Nach den Beobachtungen von Vicat <sup>1)</sup> beträgt die Ausdehnung des Eisendrahts durch eine Kraft von 1 kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts, für den Eisendraht von Nr. 18 . . 0,0000579  
 " " " " " Nr. 17 . . 0,0000536. <sup>2)</sup>

### Widerstand des Gusseisens gegen Ausdehnung.

§ 62. Die folgende Tabelle giebt die Resultate von verschiedenen Versuchen, die Minard und Desormes 1815 mit cylindrischen Gussstücken anstellten, deren specifisches Gewicht 7,074 betrug.

Nummer der Probestücke	Temperatur nach Celsius	Inhalt der Quer- schnitts- fläche	Gewicht, durch welches die Guss- stücke zerrissen wurden	
			im Ganzen	l. d. Quadratmillim.
	Grad	Quadratmil.	Kilogramm	Kilogramm
1	— 6	330	3392	10,3
2	— 5	346	3542	10,23
3	— 5	363	3092	8,51
4	— 15	363	3720	10,27
5	+ 60	353	4020	11,39
11*	+ 72	346	3100	8,96
12*	+ 5	346	2720	7,86
13	+ 5	346	3670	10,6
6	+ 3	147	1920	13,06
7	+ 5	165	1920	11,63
8	+ 5	165	2140	13,89
9	+ 5	165	2360	14,3
10*	+ 5	165	1620	9,81

Die mit einem Sternchen bezeichneten Versuche müssen verworfen werden, weil die Gussstücke Blasen zeigten. Lässt man diese Versuche hinweg, so findet man als Mittel aus den ersten acht Versuchen 10<sup>k</sup>,21, und aus den letzten fünf Versuchen 13<sup>k</sup>,22 für den Quadratmillimeter.

§ 63. Resultate aus den Versuchen von Brown<sup>3)</sup> mit Stäben von quadratischem Querschnitte.

- 1) Description du pont suspendu construit sur la Dordogne à Argentat, pag. 22.
- 2) Hierher gehört auch noch, als besonders empfehlenswerth, Brix Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitäts-Verhältnisse einiger beim Baue der Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendrähte, Berlin 1837. Ein Auszug davon befindet sich im Anhang gegenwärtigen Werkes.
- 3) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 222, 224.

Querschnittsseite der Gussstücke	Gewicht, durch welches die Gussstücke zerrissen wurden	
Engl. Zoll	Tonnen	Centner
1 1/4	11	7
	11	
	14	
	16	
1	11	10

Der Mittelwerth entspricht  $14^k,2$  für einen Quadratmillimeter.

§ 64. Nach den Versuchen von Rennie<sup>1)</sup> beträgt die Festigkeit für quadratische Barren von 1/4 engl. Zoll ins Gevierte,

für horizontal gegossenes Eisen . 1166 engl. Pfund

„ vertical „ . 1218

Diese Werthe entsprechen  $13^k,1$  und  $13^k,7$  für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts.

#### Widerstand des Kupferdrahts gegen Ausdehnung.

§ 65. Resultate der 1815 von Minard und Desormes über die Festigkeit des Kupferdrahts angestellten Versuche. Das specifische Gewicht des Kupfers war 8,741.

Bezeichnung der Drähte.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden, für den Quadratmillimeter	Ausdehnung vor dem Zerreißen
	Millimeter	Kilogramm	
Ungeglüheter Draht . . . . .	0,551	69,4	0,0084
Derselbe . . . . .	1,478	49,4	0,0068
Derselbe . . . . .	1,032	44,6	0,0037
Derselbe, nachdem man denselben in Oel getaucht hatte, welches auf dem Punkte stand, sich zu entzünden .	0,616	35,7	0,0091
Derselbe, nachdem er 40 elektrische Schläge von einer kleinen Leydener Flasche erhalten hatte . . . . .	0,616	33,7	0,0018
Ausgeglüheter Draht . . . . .	0,551	24,4	0,164
Derselbe . . . . .	1,032	21	0,167
Derselbe . . . . .	1,478	22,3	0,197
Derselbe, in Dampf von 80° gebracht . . . . .	1,032	21,7	0,154

<sup>1)</sup> Philosophical Transactions, 1818, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

§ 66. Resultate aus den Versuchen von Dufour<sup>1)</sup> mit Messingdraht.

Bezeichnung der Drähte.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	f. d. Q.-Mm.
Draht, Nr. 4, weich, liess sich zu Knoten schlingen . . .	0,85	48,5	35,2
Derselbe, ausgeglühet . . .		23,5	
Draht, Nr. 13, hart, brüchig	1,9	117,5	41,4
Derselbe, ausgeglühet . . .		84	
Draht, Nr. 13 . . . . .		187,5	66,1
Derselbe, ausgeglühet . . .		100,5	

Widerstand verschiedener Metalle gegen Ausdehnung.

§ 67. Die folgende Tabelle enthält die wichtigsten Resultate aus den Versuchen, welche Minard und Desormes im Jahre 1815 mit cylindrischen Stäben aus Kanonenmetall anstellten, dessen specifisches Gewicht 8,16 betrug.

Nummer der Stäbe	Temperatur	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Stäbe zerrissen wurden		Ausdehnung, dividirt durch die ursprüngliche Länge
			im Ganzen	f. d. Q.-Mm.	
	Réaum.-Gr.	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm	
1	— 6	14	3042	19,7	0,13
2*	+ 60	14	2692	17,5	
3	— 19	14	3442	22,3	
4	— 15	14	3620	23,5	0,14
5	+ 60	14	2920	19	0,13
6	+ 3	19	6330	22,4	0,15
7	+ 5	19,4	5940	20,1	0,14
8*	+ 5	19,4	5500	18,6	0,09
9	+ 60	19,4	6080	20,6	0,1
10	— 16	19,5	6330	21,2	0,12

Die mit einem Sternchen bezeichneten Stäbe zeigten blasige Stellen. Lässt man die bezüglichen Versuche hinweg, so giebt der Mittelwerth eine Festigkeit von 21 kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts.

§ 68. Nach denselben Ingenieuren beträgt die Festigkeit des Bleis 1<sup>k</sup>,4 für den Quadratmillimeter bei einer Temperatur von 20°; und die des Zinnes 2 kil. bei einer Temperatur von 220°.

<sup>1)</sup> Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève, pag. 12, 28.

§ 69. Nach den Versuchen von Rennie <sup>1)</sup> beträgt die Festigkeit bei quadratischen Stäben von  $\frac{1}{4}$  engl. Zoll ins Gevierte, für

	Engl. Pfd.	Kilogr. für den Quadratmill.
Hartes Kanonenmetall . . . . .	2273	25,57
Kupfer, gehämmert . . . . .	2212	24,88
Kupfer, gewalzt . . . . .	1192	13,41
Feines Gelbkupfer . . . . .	1123	12,63
Zinn, gegossen . . . . .	296	3,33
Blei, gegossen . . . . .	114	1,28

§ 70. Resultate aus den vom Verfasser angestellten Versuchen mit Metallstäben, die in der Längsrichtung ausgedehnt wurden.

Bezeichnung des Metalls.	Breite	Dicke	Gewicht, durch welches die Stäbe zerrissen wurden	
			im Ganzen	f. d. Quadratmillim.
	Millim.	Millim.	Kilogramm	Kilogramm
Gewalztes Kupfer. . . . .	11,2	1,2	269	20
Dasselbe . . . . .	11,6	1,8	463	22,2
Mittel . . . . .				21,1
Gewalztes Blei. . . . .	30,4	3,3	166	1,65
Dasselbe . . . . .	20,2	3,3	116	1,74
Dasselbe . . . . .	14,7	3,3	78	1,61
Dasselbe . . . . .	31,2	2,4	63	0,84
Dasselbe . . . . .	29,6	2,4	86	1,21
Dasselbe . . . . .	16,5	2,4	41,3	1,04
Mittel . . . . .				1,35

Die Kupferstäbe fingen an, sich auszudehnen, bei Belastungen, die ungefähr die Hälfte betrug, die Bleistäbe aber bei Belastungen, die zwischen der Hälfte und zwei Dritteln lagen, desjenigen Gewichts, durch welches die Stäbe zerrissen wurden.

§ 71. Resultate aus den Versuchen von Tremery und Poirier Saint-Brice <sup>2)</sup>. Die folgenden Zahlen drücken die Festigkeit für einen Quadratmillimeter des Querschnitts aus.

Sehr gutes Schmiedeeisen . . . . .	43 <sup>k</sup> ,45
Dasselbe, erhitzt bis zur dunkeln Rothglühhitze . . . . .	7 <sup>k</sup> ,80
Schwarzblech von der besten Qualität . . . . .	40 ,15
Dasselbe . . . . .	38 <sup>k</sup> ,56
Gewalztes Kupfer von vorzüglicher Qualität . . . . .	26 <sup>k</sup> ,02.

<sup>1)</sup> Philosophical Transactions 1813, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1813.

<sup>2)</sup> Annales des mines, 2<sup>e</sup> série, tome III, pag. 513.

Navier's Baumechanik.

### Widerstand des Glases gegen Ausdehnung.

§ 72. Resultate aus den Versuchen des Verfassers mit Glasstäben, die in der Richtung ihrer Länge ausgedehnt wurden.

Bezeichnung des Glases.	Innerer Durchmesser.	Aeusserer Durchmesser.	Gewicht, durch welches das Glas zerrissen wurde	
	Millimeter	Millimeter	im Ganzen	f. d. Quadratmillim.
Glasröhre . . . . .	2,3	4,85	44,4	3,1
Dasselbe . . . . .	3,45	7	71,9	2,47
Dasselbe . . . . .	3,45	6,95	65,9	2,3
Dasselbe . . . . .	2,45	5,6	40,4	2,03
Voller Glaszylinder.		6,45	54,9	1,68
Ein Theil desselben Cylinders . . . .		6,55	110	3,26
Voller Cylinder von Krystallglas . . .		9,6	164	2,27
Mittel . . . . .				2,48

### Widerstand der Hanfseile gegen Ausdehnung.

§ 73. Nach den Versuchen von Duhamel <sup>1)</sup> nimmt die Tragfähigkeit der Hanfseile in einem etwas schnellerem Verhältniss zu, als ihr Gewicht. Sie nimmt auch in einem schnelleren Verhältniss zu, als die Zahl der Fäden, aus denen die Seile bestehen, was man dem Grunde zuschreiben kann, dass in den dickeren Seilen die Fäden weniger durch die Drehung geschwächt werden.

Bei gleichem Gewichte tragen neue getheerte Seile weniger, als ungetheerte; zieht man das Gewicht des Theers ab, so sind beide fast von gleicher Stärke. Aber der Theer schwächt mit der Zeit die Stärke des Hanfs, und im Allgemeinen sind ungetheerte Seile von längerer Dauer, als getheerte, selbst wenn sie abwechselnd angefeuchtet und getrocknet werden. Durch Tränken mit Fett oder Oel vermindert man die Tragfähigkeit der Seile, ohne ihnen eine grössere Dauerhaftigkeit zu verschaffen.

Als Mittelwerth kann man bei ungetheerten Seilen, deren Durchmesser in Centimetern ausgedrückt mit *d* bezeichnet wird, annehmen:

1) Traité de l'art de la corderie, oder auch der Artikel cordages in dem dictionnaire de marine de l'Encyclopédie méthodique.

400  $d^2$  Kilogramm,  
als das Gewicht, durch welches sie zerrissen werden.  
§ 74. Nach Coulomb tragen die ungetheerten Seile  
50 bis 60 Kil. für jeden Faden Kabelgarn (fil de caret);  
doch darf man sie nie mit mehr, als 40 Kil. belasten.

Die getheerten Seile tragen nur  $\frac{2}{3}$  oder  $\frac{3}{4}$  so viel. <sup>1)</sup>

§ 75. Die wichtigsten Resultate aus den mit Hanf-  
seilen angestellten Versuchen von Noirfontaine, Haupt-  
mann im franz. Geniecorps. Es wurde bei den Versuchen  
ein Hebel angewandt. <sup>2)</sup>

Bezeichnung des Seilwerks.	Durch- messer	Belastung	Ausdeh- nung, divi- dirt durch d. ursprüng- liche Länge	Tragfähig- keit für den Quadrat- millimeter
	Millim.	Kilogramm		Kilogramm
Neuer Greling (Grelin, kleines Kabeltau) aus elsasser Hanf. . . . .	13	1050 1250	0,17 zerriss	9,5
Dasselbe Tau, die Enden durch eine dreifache Splissung verbunden .		1048 1128	zerriss	8,6
Neues dreidrähtiges Tau (Aussière) aus lothrin- ger Hanf . . . . .	14	1090	zerriss	7,1
Neuer Greling aus loth- ringer Hanf . . . . .	16	850 1090 1210	0,15 0,17 zerriss	6,04
Neuer Greling aus el- sasser Hanf . . . . .	17	848 1648 1808	0,12 0,17 zerriss	8,5
Neues dreidrähtiges Tau (Aussière) aus lothrin- ger Hanf . . . . .	23	850 2450	0,15 zerriss	5,9
Neuer Greling aus loth- ringer Hanf . . . . .	23	1650 3010	0,11 zerriss	7,3
Altes Tau . . . . .	23	1680	zerriss	4,09
Neuer Greling aus el- sasser Hanf . . . . .	25	2500 3000	0,14 zerriss	6,3

<sup>1)</sup> Mémoires des savants étrangers, tome X, pag. 285.

<sup>2)</sup> Mémoire sur les ponts de cordages construits à Metz en 1827. Mémorial  
de l'officier du génie, Nr. 10.



Bezeichnung des Seilwerks.	Durchmesser	Belastung	Ausdehnung, dividiert durch d. ursprüngliche Länge	Tragfähigkeit für den Quadratmillimeter
	Millim.	Kilogramm		Kilogramm
Dasselbe Tau . . . . .	28	2000 3290 3710	0,14 0,27 zerriss	6,0
Dasselbe Tau . . . . .	33	3000 4340 4480	0,13 0,14 zerriss	
Dasselbe Tau als Schleife, (ganse) indem die Enden durch eine dreifache Splissung verbunden wurden . . . . .		8365	zerriss	5,4
Altes Tau a. Kameelgarn	34	4000	zerriss	5,1
Neuer Greling aus elsasser Hanf . . . . .	40	3255 5635 7119	0,05 0,15 zerriss	4,4
Dasselbe Tau als Schleife, die Enden dreifach gesplisst . . . . .		13700 3815	zerriss 0,07	5,6
Neues dreidrähtiges Tau (Aussière) aus elsasser Hanf . . . . .	40	6342 7392	0,13 zerriss	5,5
Dasselbe Tau . . . . .	54	4000 9501 11091	0,07 0,14 zerriss	5,9
				4,85

Seile, welche eine gewisse Belastung einige Minuten lang trugen, ohne nachzugeben, zerrissen, wenn die nämliche Belastung mehrere Stunden dauerte. Die Natur des Hanfes kann bei Seilen von derselben Dicke die Tragfähigkeit um mehr als  $\frac{1}{4}$  verändern. Die Tragfähigkeit kann im Mittel auf 5 bis 6 Kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts geschätzt werden; doch darf man Hanfseile höchstens mit der Hälfte dieses Gewichtes belasten. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Sehr wichtige Versuche über Tragfähigkeit der Hanfseile (auch Drahtseile) sind im Anhang aufgeführt.

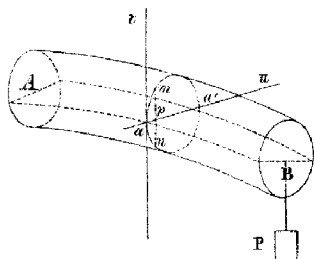
### Drittes Kapitel.

**Widerstand eines prismatischen Körpers gegen Biegung, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längsaxe dieses Körpers ist.**

[§ 76.] Wenn ein prismatischer Körper in seiner Längsrichtung einen Zug erleidet, so verlängern sich alle Längenelemente oder Fasern. Wenn der nämliche Körper zusammengedrückt und zugleich verhindert wird, durch eine Biegung auszuweichen, so verkürzen sich die Fasern. Sind diese Verlängerungen und Verkürzungen sehr klein, so sind sie den Kräften proportional, wodurch sie hervorgebracht werden. Ausserdem sind diese Längenveränderungen natürlich auch der Länge des Körpers proportional.

[§ 77.] Wird ein prismatischer Körper gebogen, so werden die Fasern, welche nach der convexen Seite hin liegen, verlängert; die Fasern, welche nach der concaven Seite hin liegen, verkürzt; und gewisse Fasern im Innern des Körpers werden ihre Länge unverändert behalten.<sup>1)</sup> Nimmt man nun an, in Uebereinstimmung mit dem, was oben bemerkt ist, dass die Widerstände, welche die Fasern der Verlängerung oder Verkürzung entgegensetzen, diesen Längenveränderungen proportional seien, so kann man sich klar machen, in welcher Weise ein Körper der Biegung widersteht. Es stelle Fig. 1 einen geraden prismatischen Körper dar, welcher mit einem Ende, bei

Fig. 1.



A, eingemauert ist und durch ein am andern Ende, bei B, aufgehängtes Gewicht  $P$  gebogen wird. Betrachten wir jetzt einen beliebigen Querschnitt  $mand'$ . Es sei  $aa'$  die horizontale Linie, welche den Querschnitt derjenigen Faserschicht bildet,

deren Länge unverändert geblieben ist. Alsdann sind die Gleichgewichtsbedingungen für den Theil des Prismas, welcher rechts von dem Querschnitte  $mand'$  liegt, folgende:

<sup>1)</sup> Diese Fasern pflegt man sonst durch den Namen: „neutrale Faserschicht“ zu bezeichnen.

1. Zerlegt man die Widerstände, welche in den Fasern durch die Ausdehnung und Zusammendrückung derselben hervorgerufen werden, in verticale und horizontale Kräfte, so muss die Summe der verticalen Kräfte gleich  $P$  sein.

2. Die Summe der horizontalen Kräfte muss gleich Null sein.

3. Die Summe der statischen Momente dieser verticalen und horizontalen Kräfte, so wie des Gewichtes  $P$ , bezogen auf die feste Axe  $aa'$ , muss gleich Null sein. <sup>1)</sup>

Wir nennen jetzt

$E$  die Kraft, deren man bedarf, um ein Prisma, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, bis auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszudehnen, oder bis auf die Hälfte seiner ursprünglichen Länge zusammenzudrücken;

$\rho$  den Krümmungshalbmesser der Curve des Körpers (eigentlich der neutralen Faserschicht) für den Punkt, durch welchen der Schnitt *manad'* genommen ist;

$u$  die auf  $aa'$  gezählte Abscisse eines beliebigen Punktes in dem Querschnitt *manad'*;

$v$  die Ordinate desselben Punktes, rechtwinklig auf  $aa'$  genommen;

$b$  den grössten Werth, welchen  $u$  annehmen kann;

$f_1(u)$  die Ordinate  $pm$  der Curve, welche denjenigen Theil des Querschnitts begrenzt, in welchem die Fasern ausgedehnt werden;

$f_2(u)$  die Ordinate  $pn$  der Curve, welche den Theil begrenzt, in welchem die Fasern zusammenge-drückt werden;

$x$  die Entfernung des Querschnitts *manad'* von dem eingemauerten Ende des Prismas;

$a$  die Entfernung zwischen dem Angriffspunkt der Kraft  $P$  und dem eingemauerten Ende; dieselbe ist von der Länge  $AB$  des Körpers nicht merklich verschieden.

Im natürlichen Zustande des Körpers ist die Länge des unendlich kleinen Fasertheils, dessen Coordinaten  $u$  und  $v$  sind, gleich  $dx$ . Nach der Biegung hat diese

<sup>1)</sup> Indem sämtliche Kräfte als in parallelen Ebenen wirkend angenommen werden können,

Länge um  $\frac{dx}{\rho}$ .  $v$  zugenommen, weil der Winkel, den zwei auf einander folgende Normalen bilden, gleich  $\frac{dx}{\rho}$  ist. 1) Das Verhältniss, in welchem diese Faser ausgedehnt wurde, ist daher

$$\frac{\frac{dx}{\rho} \cdot v}{\frac{dx}{\rho}}, \text{ oder } \frac{v}{\rho}.$$

Da der Querschnitt der Faser gleich  $dudv$  ist, so hat man für den Widerstand, den sie der Ausdehnung entgegensetzt,

$$E \cdot \frac{v}{\rho} \cdot dudv;$$

und als statisches Moment dieses Widerstandes, bezogen auf die Axe  $aa'$ , findet sich

$$E \cdot \frac{v^2}{\rho} \cdot dudv.$$

Folglich hat man für die Summen der Widerstände der ausgedehnten und zusammengedrückten Fasern, respective:

$$\frac{E}{\rho} \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v dv, \text{ und } \frac{E}{\rho} \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v dv;$$

und für die Summe der Momente dieser Widerstände, bezogen auf die Axe  $aa'$

$$\frac{E}{\rho} \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\}.$$

[§ 78.] Um auszudrücken, dass die horizontalen Kräfte sich das Gleichgewicht halten, (welche Bedingung die Lage der Axe  $aa'$  bestimmt), hat man

$$\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v dv = \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v dv.$$

d. h. die Axe  $aa'$  geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts  $mand$

1) Man sehe: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Navier. Deutsch herausgegeben von Dr. Th. Wittstein. Bd. I, § 181. Der Winkel, welchen zwei auf einander folgende Normalen bilden, ist gleich  $\frac{ds}{\rho}$ , wenn durch  $ds$  das Differential des Bogens bezeichnet wird; im vorliegenden Falle kann  $ds$  mit  $dx$  verwechselt werden, in Betracht der geringen Biegung des Prismas. Das oben citirte Werk wird ferner schlechthin nur mit „Navier-Wittstein“ bezeichnet werden.

[§ 79.] Um auszudrücken, dass Gleichgewicht gegen Drehung um diese Axe stattfindet, hat man ferner

$$\frac{E}{\rho} \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\} = P(a-x).$$

Dabei sind die verticalen Kräfte vernachlässigt worden, was geschehen darf, sobald die Dicke des Körpers gering in Bezug auf seine Länge ist. Es muss übrigens die Dicke des Körpers gering sein in Bezug auf seine Länge, damit die Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern, und die innern Kräfte, die hieraus resultiren, gerade so auftreten, als vorausgesetzt wurde; die folgenden Ergebnisse dürfen daher nur da angewandt werden, wo dieser Bedingung Genüge geschieht.

[§ 80.] Der Ausdruck

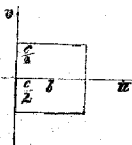
$$E \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\}$$

hat für jeden Körper einen bestimmten Werth, der von der Natur des Körpers und der Gestalt des Querschnitts abhängt. Man nennt diese Grösse das Elasticitätsmoment (moment de flexion) des Körpers. Wir werden es später mit dem Buchstaben  $\varepsilon$  bezeichnen. Lässt sich die Figur des Querschnitts durch eine horizontale Linie in zwei symmetrische Hälften theilen, so ist diese Linie die Gleichgewichtsaue, welche die unveränderten (neutralen) Fasern enthält, und von welcher aus das Integral

$$E \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv$$

zu nehmen ist; das Doppelte des Integrals ist dann der Werth des Elasticitätsmomentes. Im entgegengesetzten Falle muss man zuerst die Lage der Gleichgewichtsaue mittelst der Bedingungsgleichung im § 78 bestimmen und sodann einzeln die Werthe der beiden Integrale berechnen, die in dem Ausdruck für das Elasticitätsmoment enthalten sind.

Fig. 2.

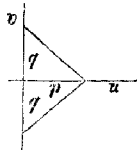


[§ 81.] Ist die Figur des Querschnitts ein Rechteck, dessen Grundlinie und Höhe durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden mögen, so ist der Werth des Elasticitätsmomentes

$$\varepsilon = 2 E \int_0^b du \int_0^{\frac{1}{2}c} v^2 dv = E \frac{bc^3}{12}.$$

Das Elasticitätsmoment ist also der Breite und dem Würfel der Höhe des Körpers proportional.

§ 82. Wird der Querschnitt von zwei congruenten, rechtwinkligen Dreiecken (Fig. 3) gebildet, deren Katheten Fig. 3. durch  $p$  und  $q$  bezeichnet werden mögen, so ist der Werth des Elasticitätsmomentes



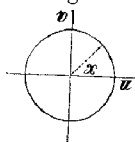
$$\varepsilon = 2 E \int_0^p du \int_0^q v^2 dv = E \frac{p q^3}{6}.$$

§ 83. Ist die Figur des Querschnitts ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $c$ , und bildet die horizontale Gleichgewichtssaxe mit der Seite  $b$  den Winkel  $\varphi$ , so erhält man als Elasticitätsmoment 1)

$$\varepsilon = E \cdot \frac{b^3 c \sin^2 \varphi + b c^3 \cos^2 \varphi}{12}.$$

Es leistet also ein Stab mit quadratischem Querschnitt der Biegung in jeder Richtung gleichen Widerstand. Ist ferner der Querschnitt ein Rechteck und  $b$  die grössere Seite, so ist der Werth des Elasticitätsmomentes am kleinsten, wenn die Biegung in der Richtung von  $c$  stattfindet.

Fig. 4.



§ 84. Ist der Querschnitt ein Kreis (Fig. 4) mit dem Halbmesser  $r$ , so wird aus dem allgemeinen Ausdrucke des Momentes  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 E \cdot \int_{-r}^r du \int_0^{\sqrt{r^2 - u^2}} v^2 dv = 2 E \int_{-r}^r \frac{1}{3} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du \\ &= 2 E \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{3} \cdot \sin^4 x dx \\ &= E \cdot \frac{r^4 \pi}{4}. \end{aligned}$$

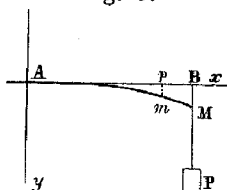
1) Man sieht leicht, dass die Bestimmung der Elasticitätsmomente sich auf diejenige der Trägheitsmomente reducirt. Das Trägheitsmoment für den vorliegenden Fall findet man entwickelt in Rühlmann's Geodynamik, Seite 75 der zweiten Auflage.  
2) Siehe folgende Seite.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass das Elasticitätsmoment des Quadrats zu dem des eingeschriebenen Kreises sich verhält, wie 1 zu  $\frac{3\pi}{16}$ .

§ 85. Das Elasticitätsmoment einer Röhre ist die Differenz der Elasticitätsmomente der beiden Cylinder. Sind  $r_1$  der äussere und  $r_2$  der innere Halbmesser der Röhre, so ist das Moment

$$\varepsilon = E \frac{(r_1^4 - r_2^4)\pi}{4}$$

Fig. 5.



§ 86. Betrachten wir wieder wie im § 77 einen geraden prismaatischen Körper (Fig. 5), der an einem Ende, bei A, horizontal eingemauert, am andern Ende, bei M, mit einem Gewichte belastet sei.

Man nenne jetzt

$x$  die auf der horizontalen Linie  $AB$  gezählte Abscisse  $Ap$  eines Punktes  $m$  der Curve, welche der Körper nach der Biegung bildet;

$y$  die Ordinate  $pm$  dieses Punktes;

$\rho$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  der Curve;

$P$  das an dem Ende  $M$  aufgehängte Gewicht;

$a$  die horizontale Entfernung  $AB$  der beiden Endpunkte des Körpers;

2) Statt  $\int_0^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du$  hat man  $2 \int_0^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du$  nach Navier.

Wittstein, § 347.

Setzt man nun  $\frac{u}{r} = \cos x$  so wird  $du = -r \sin x \cdot dx$

$$(r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} = r^3 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{r^2}} \right)^3 = r^3 \sin^3 x;$$

statt der Grenzen 0 und  $r$  sind  $x = \frac{\pi}{2}$  und  $x = 0$  zu nehmen; also

$$\int_{-r}^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du = 2 \int_0^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -r^4 \sin^4 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin^4 x dx = 2r^4 \frac{1.3}{2.4} \frac{\pi}{2}$$

nach Navier-Wittstein, § 352; also  $\varepsilon = E \cdot \frac{r^4 \pi \cdot 2.2.1.3}{3.2.4.2} = E \cdot \frac{r^4 \pi}{4}$

$f$  die Ordinate  $BM$  des äussersten Punktes der Curve;

$s$  die Länge  $AmM$  des Körpers;

$\alpha$  den Winkel, welchen die Tangente für den Punkt  $M$  mit der Horizontalen bildet;

$\varepsilon$  das Elasticitätsmoment des Körpers, dessen allgemeiner Ausdruck im § 80 gegeben ist.

Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht ist nach § 79

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(a-x);$$

oder, wenn man für  $\rho$  seinen analytischen Werth setzt <sup>1)</sup>

$$\varepsilon = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} = P(a-x);$$

und im Falle die Biegung sehr gering ist, und man sich daher erlauben darf, das Quadrat von  $\frac{dy}{dx}$  zu vernachlässigen, hat man

$$\varepsilon \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x)$$

$$\varepsilon \cdot \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$s = a + \frac{3f^2}{5a}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{3f}{2a}$$

(Um den in den analytischen Rechnungen weniger Geübten das Studium des vorliegenden Werkes zu erleichtern, fügen wir hier die vollständige Ableitung der obigen Formeln hinzu.)

Aus  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x) \dots \dots (1)$  folgt

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

<sup>1)</sup> Navier-Wittstein, § 180.



Für  $x=0$  wird auch  $\frac{dy}{dx}=0$ , weil  $\frac{dy}{dx}$  die trigonometrische Tangente des Winkels ausdrückt, welchen die geometrische Tangente mit der Horizontalen bildet. Daraus folgt  $C=0$  und

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) \dots (2); \text{ woraus}$$

$$\varepsilon y = P \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C'$$

Für  $x=0$ , wird auch  $y=0$ , folglich ist  $C'=0$ , und

$$\varepsilon y = P \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (3)$$

Für  $x=a$ , wird  $y=f$ , daher

$$\varepsilon f = P \cdot \frac{a^3}{3} \text{ oder } f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} \dots (4)$$

Für  $x=a$ , wird  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ , daher

$$\tan \alpha = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{3f}{2a} \dots (5)$$

Um  $s$  zu finden, beachte man, dass  $ds = dx \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$

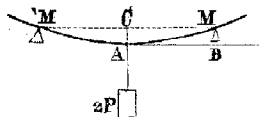
Entwickelt man den Wurzelausdruck und vernachlässigt die höhern Potenzen von  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2$ , welches bei einer so geringen Biegung, wie sie hier vorausgesetzt wird, geschehen kann, so folgt

$$ds = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\varepsilon^2} \left( ax - \frac{x^2}{2} \right)^2 \right\} \text{ aus (2)}$$

$$s = \int_0^a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\varepsilon^2} \left( a^2x^2 - ax^3 + \frac{x^4}{4} \right) \right\} dx$$

$$= a + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{2}{15} a^5 = a + \frac{1}{2} \frac{9f^2}{a^6} \cdot \frac{2}{15} a^5 = a + \frac{3f^2}{5a} \dots (6)$$

Fig. 6.



[§ 87.] Wird ein Körper, Fig. 6, horizontal auf zwei Stützen gelegt, so finden die vorstehenden Gleichungen auf die Curve Anwendung, welche jede der beiden Hälften des Körpers bildet.

Man nenne

$f$  den Pfeil  $AC$  der Curve des Körpers;

$2P$  das in der Mitte des Körpers aufgehängte Gewicht;

$2a$  die Entfernung  $MM'$  der Stützen von einander;

$2s$  die Länge  $MAM'$  des Körpers zwischen den Stützen;

$\alpha$  den Neigungswinkel der Curve für den Endpunkt  $M$ .

Nimmt man nun an, dass die Biegung des Körpers sehr gering sei, so hat man

$$f = \frac{P}{\epsilon} \cdot \frac{a^3}{3},$$

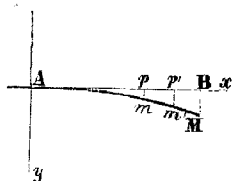
$$f = \frac{2P}{\epsilon} \cdot \frac{(2a)^3}{48},$$

$$c = a + \frac{3f^2}{5a},$$

$$\tan \alpha = \frac{3f}{2a}.$$

Der Pfeil der Curve ist proportional dem Gewichte  $2P$  und dem Würfel der Entfernung der Stützen von einander.

Fig. 7.



§ 88. Betrachtet man, eben wie im § 86, einen geraden prismatischen Körper, Fig. 7, der an einem Ende eingemauert ist, so kann man annehmen, dass er in allen Punkten seiner Länge mit Gewichten belastet werde, deren Vertheilung nach einem beliebigen Gesetze geschehe.

Nennt man

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve des Körpers;

$x'$  die Abscisse eines beliebigen Punktes  $m'$  zwischen  $m$  und  $M$ ;

$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$p'$  das in  $m'$  aufgehängte Gewicht für die Längeneinheit der Abscisse, in der Weise, dass  $p' dx'$  von dem Längenelemente getragen wird, dessen Horizontalprojection gleich  $dx$  ist ( $p'$  wird als Function von  $x'$  ausgedrückt angenommen);

$f$  die Ordinate des äussersten Punktes der Curve; so hat man

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_x^a p' (x' - x) dx',$$

$$\epsilon \frac{dy}{dx} = \int_0^x dx \int_x^a p' (x' - x) dx'$$

$$\epsilon y = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_x^a p' (x' - x) dx'.$$

§ 89. Tragen alle Längenelemente des Körpers gleiche Gewichte, was der Fall ist, wenn diese Gewichte die der Elemente selbst sind, so erhält  $p'$  einen constanten Werth  $p$ , und man hat

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left( \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right),$$

$$\epsilon \frac{dy}{dx} = p \left( \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right),$$

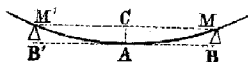
$$\epsilon y = p \left( \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right),$$

$$f = \frac{p}{\epsilon} \cdot \frac{a^4}{8} = \frac{pa}{\epsilon} \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\frac{3}{8} pa}{\epsilon} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{4f}{3a} = \frac{p}{\epsilon} \frac{a^3}{6}.$$

Das auf der Länge des Körpers vertheilte Gesamtgewicht ist  $pa$ . Wäre dieses Gewicht in  $M$  aufgehängt, so wäre die Durchbiegung dieses Punktes  $\frac{8}{3}$  der vorigen.

Fig. 8.



§ 90. Wird ein Körper, Fig. 8, horizontal auf zwei Stützen gelegt und mit Gewichten belastet, die man

gleichmäßig auf der ganzen Länge vertheilt, so ist jede Hälfte in demselben Falle, als ob sie, an einem Ende horizontal eingemauert, zugleich gebogen würde von auf der Länge gleichförmig vertheilten Gewichten und von einer der Summe dieser Gewichte gleichen Kraft, die im entgegengesetzten Sinne am andern Ende wirkte. Man hat also

$$\epsilon y = pa \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - p \left( \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right),$$

$$f = \frac{p}{\epsilon} \cdot \frac{5a^4}{24},$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{8f}{5a}.$$

Wäre das Gewicht  $2pa$  in der Mitte aufgehängt, statt auf der ganzen Länge des Körpers gleichförmig vertheilt zu sein, so wäre die Durchbiegung in dem Verhältniss 8:5 grösser. Diese Resultate finden sich durch die Erfahrung bestätigt.

§ 91. Um die obigen Resultate auf einen gegebenen Körper anzuwenden, muss man nach § 80 u. folg. an die Stelle von  $\varepsilon$  den Ausdruck für das Elasticitätsmoment setzen, welches dem Querschnitt dieses Körpers zugehört. Darnach hat man für  $E$  (§ 77) den Werth zu setzen, welcher der Natur des Körpers entspricht und durch Beobachtung ermittelt werden muss.

Die geeignetsten Versuche, um diesen Werth zu bestimmen, bestehen darin, einen prismatischen Stab horizontal auf zwei Stützen zu legen, ihn in der Mitte mit einem Gewichte zu belasten, und die Grösse der Durchbiegung zu beobachten. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, dessen Seiten durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, so hat man (nach § 81)  $\varepsilon = E \frac{bc^3}{12}$ , und (nach

§ 87)  $f = \frac{2P}{\varepsilon} \cdot \frac{(2a)^3}{48}$ ; daher

$$f = \frac{2P}{E} \frac{(2a)^3}{4bc^3}, \quad E = 2P \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3 f};$$

wobei  $2a$  die Entfernung der Stützen von einander und  $2P$  das in der Mitte des Stabes wirkende Gewicht bezeichnen.

Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $r$ , so hat man

$$f = \frac{2P}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi}, \quad E = 2P \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi f}.$$

§ 92. Man muss zuweilen auf das eigene Gewicht Rücksicht nehmen. Dies geschieht, indem man (nach § 90)  $\frac{5}{8}$  desselben den  $2P$  hinzufügt. Bezeichnet man das eigene Gewicht daher mit  $2\Pi$ , so hat man für den Fall eines rechteckigen Querschnitts

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2\Pi)}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3}, \quad E = \left\{ 2P + \frac{5}{8}(2\Pi) \right\} \frac{(2a)^3}{4bc^3 f};$$

und für den Fall eines kreisförmigen Querschnitts

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2\Pi)}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi}, \quad E = \left\{ 2P + \frac{5}{8}(2\Pi) \right\} \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi f}.$$

§ 93. Es wird endlich noch einleuchten, dass man nicht die absoluten Werthe des in der Mitte des Stabes ange-

brachten Gewichtes und der entsprechenden Durchbiegung zu kennen braucht, sondern nur die Zunahme der Durchbiegung (des Pfeils der Curve), die einer gegebenen Zunahme der Belastung entspricht. Nennt man  $P'$  und  $P''$  zwei auf einander folgende Werthe von  $P$ , und  $f'$  und  $f''$  die beiden entsprechenden Werthe von  $f$ , so wird man aus einer der vorhergehenden Gleichungen für einen rechteckigen Querschnitt erhalten

$$E = (2P'' - 2P') \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3(f'' - f')}$$

Wir werden jetzt die Resultate der bekannten Versuche aufführen, nach denen man die Werthe der Constanten  $E$  für die verschiedenen Materialien bestimmen kann. Diese Werthe können genau nur aus solchen Versuchen abgeleitet werden, bei denen die Biegung sehr gering ist. Sobald sich die Ausdehnung oder Zusammendrückung der Fasern der Grenze nähert, wo der Bruch erfolgen muss, hört gewöhnlich der Widerstand der Fasern auf der Ausdehnung oder Zusammendrückung proportional zu sein, wie dies in den §§ 76 und 77 vorausgesetzt wurde. Man sagt alsdann, die Elasticitätsgrenze sei überschritten.

#### Widerstand der Steine gegen Biegung.

§ 94. Resultate aus den von Tredgold angestellten Versuchen mit Barren rechteckigen Querschnitts von Marmor und andern Steinarten, die horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. <sup>1)</sup>

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung
Weisser Bildsäulenmarmor, sehr rein, specif. Gewicht = 2,706 . .	Zoll	Zoll	Zoll	Pfd.	Zoll
	30	1,079	1,075	10	0,02
				20	0,045
				30	0,06
Portlandstein, braun, specif. Gewicht = 2,113 . . . . .	24	2	1,45	10	0,01
				20	0,015
				30	0,02
				40	0,022

1) The philosophical magazine and journal, vol. 56, pag. 290.

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung
Weisser Sandstein von Long-Annet, specif. Gewicht = 2,212 . .	Zoll 18	Zoll 1,45	Zoll 1,525	Pfd. 20 30 40 50 60	Zoll 0,015 0,02 0,022 0,025 0,03

### Widerstand der Hölzer gegen Biegung.

§ 95. Resultate aus den Versuchen von Duhamel<sup>1)</sup> mit Stäben von Eichenholz, die horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die Entfernung zwischen den Stützen war 23 Fuss und das in der Mitte des Stabes wirkende Gewicht betrug 7591 Pfd.

Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Grösse der Durchbiegung
Zoll	Zoll	Zoll
10	9	3 1/2
10	11 1/2	2 1/2
12	13	1

Aus diesen Versuchen folgt, mit Hilfe der Formel des § 92, der mittlere Werth der Constanten  $E$  für Eichenholz zu

$$E = 1\,012\,000\,000 \text{ Kil.}$$

den Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen.

Daraus folgt, dass ein Stab von Eichenholz, der in der Längenrichtung eine Spannung von 1 Kil. für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts erleidet, um  $\frac{1}{1012}$  ausgedehnt wird.

§ 96. Mittelwerthe aus den Versuchen von Aubry<sup>2)</sup> mit Stäben von Eichenholz, die horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Es wird hier nicht das Detail der Belastungen und der entsprechenden vom Experimentator beobachteten Durch-

1) Mémoires de l'Académie des sciences, 1768.

2) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques pag. 55 u. 66.

biegungen angegeben werden, sondern nur die mittleren Zahlen, aus denen man die Beziehungen zwischen den Belastungen und den Durchbiegungen, die aus diesen Beobachtungen resultiren, ersehen kann.

Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung
Fuss	Zoll	Zoll	Pfund	Linien
12	3	3	169	12
5	1	2,5	35	1

§ 97. Mittelwerthe aus den Versuchen, welche von Ch. Dupin <sup>1)</sup> mit verschiedenen Holzarten im Jahre 1811 in Korfu angestellt wurden. Die Entfernung der Stützen von einander betrug 2 Meter.

Bezeichnung der Hölzer	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Bela- stung in der Mitte	Grösse der Durchbieg.
	Meter	Meter	Kilogr.	Meter
Eichenholz, 25 Jah. nachdem es gefällt . . . .	0,03	0,03	4	0,00585
Cypressenholz, 1 Jahr nach dem Fällen . . . . .	0,03	0,03	4	0,0072
Buchenholz, desgl. . . . .	0,03	0,03	4	0,0089
Tannenholz, 25 Jah. nach dem Fällen . . . . .	0,03	0,02	2	0,016
	0,02	0,03	2	0,0072
	0,02	0,01	0,5	0,047
	0,01	0,02	0,5	0,0112
	0,03	0,01	1	0,0801
	0,01	0,03	1	0,007
	0,05	0,02	10	0,0305
	0,02	0,05	10	0,005

Aus dem ersten Versuche mit Eichenholz findet man die Constante  $E$  zu

$$E = 1\,668\,000\,000 \text{ Kil.}$$

Aus den Versuchen mit Tannenholz findet man im Mittel dieselbe Constante zu

$$E = 1\,029\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§ 98. Mittelwerthe aus den Versuchen von Rondelet <sup>2)</sup> mit Stäben von Eichen- und Tannenholz. Die Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte.

<sup>1)</sup> Journal de l'École Polytechnique, 17<sup>e</sup> cahier.

<sup>2)</sup> Art de bâtir, tome I, pag. 294.

Bezeichnung der Hölzer.	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung
	Zoll	Pfund	Linien
Eichenholz . .	42	100	11,5
Tannenholz . .	42	100	11

Aus diesen Versuchen findet man für Eichen- und Tannenholz die Constante  $E$  ungefähr zu

$$E = 1\,300\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§ 99. Mittelwerthe aus den Versuchen von Barlow<sup>1)</sup> über die Elasticität verschiedener Holzarten.

Sämmtliche Stäbe hielten 2 Zoll engl. ins Gevierte.

Bezeichnung der Hölzer.	Specif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung	Zahlen, die der Elasticität proportional sind
		engl. Fuss	engl. Pf.	engl. Zll.	
Teakholz (indische Eiche) . . . .	0,745	7	300	1,151	9658
Poonholz . . . .	0,579	7	150	0,822	6760
Eichenholz, engl. . .	0,969	7	150	1,590	3495
dto. . . . .	0,934	7	200	1,280	5806
dto. aus Canada . . . .	0,872	7	225	1,080	8596
Eichenholz aus Danzig . . . .	0,756	7	200	1,590	4766
Eichenholz vom Adriatisch. Meere . . . .	0,993	7	150	1,430	3886
Eschenholz . . . .	0,760	7	225	1,266	6581
Buchenholz . . . .	0,696	7	150	1,026	5417
Ulmenholz . . . .	0,553	7	125	1,685	2799
Holz der Weihrauchfichte . . . .	0,660	7	150	1,134	4900
Fichtenholz(Rothtannenholz) . . . .	0,657	7	150	0,755	7360
Tannenholz, aus Neuengland . . . .	0,553	7	150	0,931	5967
Tannenholz, aus Riga . . . . .	0,753	7	125	0,870	5315
Tannenholz, aus Riga . . . . .	0,738	6	150	0,883	3963
Tannenholz v. Mar forest . . . . .	0,696	7	125	1,442	2581

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 180.



Bezeichnung der Hölzer.	Specif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Bela- stung in der Mitte	Grösse der Durchbie- gung	Zahlen, die der Elasticität proportional sind
		engl. Fuss	engl. Pf.	engl. Zll.	
Tannenholz v. Mar forest . . . . .	0,693	6	150	1,006	3478
Tannenholz v. Mar forest . . . . .	0,703	6	150	1,006	3478
Lärchenholz . . . . .	0,531	7	125	1,885	2465
dto. . . . .	0,522	6	125	0,812	3591
dto. . . . .	0,556	6	150	0,831	4211
dto. . . . .	0,560	6	150	0,831	4211
Sparren aus Nor- wegen (Tannen- holz) . . . . .	0,577	6	200	0,800	5832

Die erste Probe von englischem Eichenholz war von geringer Qualität.

Multiplicirt man die Zahlen der letzten Columnne mit 175700, so erhält man die Werthe für  $E$ , wenn der Meter zur Längen- und das Kilogramm zur Gewichtseinheit angenommen werden.

Darnach findet man für Eichenholz den grössten Werth für  $E$  aus dem Versuche mit Eichenholz aus Canada, wo

$$E = 1\,510\,000\,000 \text{ Kil.}$$

und den kleinsten Werth aus dem Versuche mit Eichenholz vom Adriatischen Meere, wo

$$E = 683\,000\,000 \text{ Kil.}$$

Für Tannenholz findet man den grössten Werth aus dem Versuche mit Rothtannenholz, wo

$$E = 1\,293\,000\,000 \text{ Kil.}$$

und den kleinsten Werth als Mittel aus den Versuchen mit Tannenholz aus dem Mar forest in Schottland, wo

$$E = 558\,500\,000 \text{ Kil.}$$

Barlow giebt an einem andern Orte <sup>1)</sup> noch eine Reihe von Versuchsergebnissen über Tannenholz, aus denen im Mittel folgt

$$E = 934\,000\,000 \text{ Kil.}$$

<sup>1)</sup> An essay on the strength and stress of timber, pag 125.

§ 100. Mittelwerthe aus den Versuchen, welche Ebbls und Tredgold <sup>1)</sup> in England über die Biegung des Eichenholzes anstellten. Die Stäbe wurden horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet; alle hielten einen Zoll engl. ins Gevierte.

Bezeichnung des Eichenholzes.	Specif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Bela- stung in der Mitte	Grösse der Durch- biegung
		engl. Fuss.	engl. Pf.	engl. Z.
Altes Schiffsholz . . . . .	0,872	2,5	127	0,5
Junges Eichenholz von King's Langley, Herts . . . . .	0,863	2	237	0,5
Eichenholz von Beaulieu, Hants . . . . .	0,616	2,5	78	0,5
Eichenholz, ein anderes Stück Eichenholz von einem alten Baume . . . . .	0,736	2,5	65	0,5
Eichenholz von Riga . . . . .	0,625	2	103	0,5
Englisches Eichenholz . . . . .	0,688	2	233	0,5
dto. dto. grünes	0,748	2,5	137	0,5
Danziger Eichenholz, ausge- trocknet . . . . .	0,763	2,5	96	0,5
Eichenholz von quercus ses- siflora . . . . .	0,755	2,5	148	0,5
Holz der Steineiche (quercus robur). . . . .		2	149	0,35
		2	167	0,35

§ 101. Mittelwerthe aus den Versuchen, welche von denselben Experimentatoren über die Biegung des Tannenholzes angestellt wurden <sup>2)</sup>.

Bezeichnung des Tannenholzes	Specif. Gewicht	Entfer- nung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dieke der Stäbe	Bela- stung in der Mitte.	Grösse der Durch- biegung
		engl. Fuss	engl. Z.	engl. Z.	engl. Pfd.	engl. Z.
Rothtannenholz von Riga . . . . .		18	2	7	103	0,25
Rothtannenholz v. Langesund in Norwegen . . . . .	0,640	2	1	1	261	0,5
Rothtannenholz von Riga . . . . .	0,480	2,5	1	1	123	0,5
Rothtannenholz von Riga . . . . .	0,464	2,5	1	1	116	0,5

1) Elementary principles of carpentry, pag. 54.  
2) Elementary principles of carpentry, pag. 54.

Bezeichnung des Tannenholzes.	Specif. Gewicht	Entfer- nung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Bela- stung in der Mitte	Grösse der Durch- biegung
		engl. Fuss	engl. Z.	engl. Z.	engl. Pfd.	engl. Z.
Rothtannenholz von Memel . .	0,553	2,5	1	1	143	0,5
Rothtannenholz von Memel . .	0,544	2,5	1	1	145	0,5
Amerik. Fichten- holz vermuthl. von der Wey- mouthsfichte .	0,460	2	1	1	237	0,5
dto. . . . .	0,407	3	1	1	69	0,5
Weisstannenholz von Christiania	0,512	2	1	1	261	0,5
Weisstannenholz von Quebeck .	0,465	2	1	1	180	0,5
Lärchenholz von Blair in Schott- land . . . . .	0,622	2,5	1	1	93	0,5
dto. ausge- trocknet . . .	0,644	2,5	1	1	101	0,5
dto. . . . .	0,554	2,5	1	1	112	0,5
dto. sehr jung. Holz . . . . .	0,396	2,5	1	1	45	0,5
Schottisches Tannenholz . .	0,529	2,5	1	1	89	0,5
Englisch. Weiss- tannenholz . .	0,555	2,5	1	1	103	0,5

### Widerstand des Schmiedeeisens gegen Biegung.

§. 102. Die folgende Tabelle ist nach den Versuchen aufgestellt, welche im Jahre 1812 Duleau <sup>1)</sup> zu Bordeaux mit Stäben von Schmiedeeisen anstellte, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Aus den Resultaten wurden die Durchbiegungen für eine Belastung von 10 Kil. berechnet.

Bezeichnung des Eisens.	Entfer- nung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Grösse der Durch- biegung
Périgordeisen. Der Querschnitt war ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten 0, <sup>m</sup> 038 hielten. (Die Durchbiegung blieb dieselbe, man mochte den Stab auf eine Seite oder auf eine Kante legen)	Meter	Millim.	Millim.	Millim.
	3			7,6

<sup>1)</sup> Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 26.

Bezeichnung des Eisens.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Grösse der Durchbiegung
	Meter	Millim.	Millim.	Millim.
Périgordeisen . . . . .	1	61	5,5	12,57
dto. . . . .	0,5	61	5,5	1,71
Engl. Eisen, wie es aus den grossen Eisenwerken hervorgeht . . . . .	3,035	34	8,56	136
dto. . . . .	3,075	8,56	34	13,5
Périgordeisen . . . . .	2	30	11	24
dto. . . . .	1	30	11	3
dto. weich, zu Hufeisen bestimmt . . . . .	2	70	11,2	9,5
dto. . . . .	1	68	11	1,5
dto. wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde . . . . .	2	45	12	12
dto. . . . .	2	40	11,5	21
dto. . . . .	1	40	11,5	2,5
dto. . . . .	2	11,5	40	1,67
dto. wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde . . . . .	3	77	14	14,4
Engl. Eisen, mit der Marke B, wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde . . . . .	1,5	67,8	14,7	2
Périgordeisen . . . . .	3	25	15	37
dto. . . . .	3	15	25	14
dto. . . . .	1	58	16,3	0,57
dto. . . . .	3	39	19,6	10,8
dto. . . . .	3	19,6	39	2,8
dto. . . . .	2	60	20	2
dto. . . . .	3	60	20	6,6
dto. . . . .	3	20	60	0,75
dto. . . . .	5	120	20	15
Eisen aus dem Departement des Landes . . . . .	2	120	21	1
Périgordeisen . . . . .	3	39	24,5	6
dto. . . . .	3	24,5	39	2,33
dto. wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde . . . . .	3	67	26	2,3
dto. . . . .	5	108	30	4,75
dto. . . . .	5	30	108	0,4
dto. . . . .	2,92	31	31	3
Derselbe Stab, auf eine Kante gelegt . . . . .				3,35

Bezeichnung des Eisens.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Grösse der Durchbiegung
	Meter	Durchmesser in Millimetern	Millim.	
Rundeisen aus dem Departement de l'Arriège, wie es aus den grossen Eisenwerken hervorgeht . . . . .	3,69	21,49	48,25	
dto.     dto. . . . .	2,99	21,51	27,5	
Engl. Rundeisen, ebenso . . . .	2,93	23,52	18	
Rundeisen aus dem Departement de l'Arriège, ebenso . . . . .	2,92	26,82	10	
Rundeisen aus Bilbao, sehr weich	2,92	31,8	5	

Als Mittel erhält man aus diesen Versuchen den Werth der Constanten  $E$  (des § 77) für Schmiedeeisen zu

$$E = 20\,000\,000\,000 \text{ Kil.}$$

den Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen <sup>1)</sup>

Berechnet man aus diesem Werthe für  $E$  nach der Formel des § 92 die Durchbiegungen, so weichen Rechnung und Beobachtung nicht über  $\frac{1}{4}$  von einander ab.

Aus dem obigen Resultate folgt, dass ein schmiedeeiserner Stab, welcher eine Spannung von einem Kilogramm für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts erleidet um  $\frac{1}{20000}$  ausgedehnt wird.

§ 103. Resultate aus den Versuchen von Tredgold <sup>2)</sup> mit Stabeisen, welches horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurde. Die Länge der Stäbe war 6 Fuss engl. und die Entfernung der Stützen von einander  $66\frac{1}{2}$  Zoll.

Bezeichnung des Eisens.	Eignes Gewicht auf sechs Fuss Länge	Grösse der Durchbiegung bei Belastungen in der Mitte von		
		58 Pfund	114 Pfund	170 Pfund
Engl. Quadrateisen 1,25 Zoll stark	33	0,0625	0,1	0,1875
dto.   dto.   1,125 Zoll stark	25	0,125	0,25	0,375
dto.   dto.   1 Zoll stark . .	20	0,15	0,32	0,5

<sup>1)</sup> Essai théorique et expérimental, pag. 54.

<sup>2)</sup> An essay on the strength of cast iron, pag. 102 der zweiten Auflage.

Bezeichnung des Eisens.	Eignes Gewicht auf sechs Fuss Länge	Grösse der Durchbiegung bei Belastungen in der Mitte von		
		58 Pfund	114 Pfund	170 Pfund
Engl. Rundeisen, 1,25 Zoll stark	Pfund 24	Zoll 0,125	Zoll 0,25	Zoll 0,375
dto. dto. 1 Zoll stark	17	0,25	0,5	0,8
Schwed. Quadrateisen, 1,2 Z. stark	32	0,0625	0,125	0,19
dto. dto. 1,125 Zoll stark	27	0,08	0,161	0,25
dto. dto. 1 Zoll stark	33	0,125	0,25	0,375

Der Werth für  $E$ , welchen man aus den Versuchen mit dem englischen Eisen berechnet, ist von dem obigen, im §. 102 angegebenen Werthe nur sehr wenig verschieden. Aus den Versuchen mit dem schwedischen Eisen berechnet sich  $E$  im Mittel zu

$$E = 23\,470\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§ 104. Versuch mit einer 38 Zoll langen und 10,4 Pfund schweren Stange Quadrateisen von 1 Zoll Stärke, welche auf zwei Stützen gelegt wurde, die 3 Fuss von einander abstanden (engl. Masse).

Belastung in der Mitte.	Grösse der Durchbiegung	
	nachdem die Stange so probirt worden war, wie sie aus der Fabrik gekommen	nachdem die Stange vorher gleichmässig erhitzt u. langsam abgekühlt worden war
Pfund	Zoll	Zoll
126	0,05	0,059
352	0,1	0,117
310	0,12	0,145
330	0,13	0,154

Die Belastung von 330 Pfund brachte keine nachtheilige Veränderung hervor, aber 20 Pfund mehr bewirkten eine merkliche, bleibende Krümmung; dasselbe bewirkten 10 Pfund mehr bei der adoucirtten Stange.

§ 105. Die nämliche Stange wurde bis auf 212° Fahrenheit erhitzt und bis auf 60° abgekühlt; bei einer

Belastung von 300 Pfund schien die Durchbiegung bei der ersten Temperatur um ungefähr  $\frac{1}{20}$  grösser zu sein, als bei der zweiten.

### Widerstand des Stahls gegen Biegung.

§ 106. Mittelwerthe aus den Versuchen von Duleau mit Stahlstäben, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die Durchbiegungen gehören, wie in § 102, zu einer Belastung von 10 Kil.

Bezeichnung des Stahls.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Grösse der Durchbie- gung
	Meter	Millimtr.	Millimtr.	Millimtr.
Engl. Gussstahl mit der Marke Huntsman	0,98	13,3	5,9	32,05
dto. dto. . .	0,98	5,9	13,3	8,4
Cementstahl für Rasir- messer, mit der Marke Fortsman	0,68	14,5	7,8	8
dto. dto. . .	0,68	7,8	14,5	2,1
dto. dto. . .	1,845	25,7	21,6	2,8
dto. dto. . .	1,845	21,6	25,7	2,2
dto. dto. . .	1,845	28,5	21,9	2,6
dto. dto. . .	1,845	21,9	28,5	1,8
dto. dto. . .	1,35	54,8	25,5	0,55
dto. dto. . .	1,35	25,5	54,8	0,27
dto. dto. . .	1,35	52	26,6	0,5
dto. dto. . .	1,35	26,6	52	0,3

Nach diesen Versuchen ist der Widerstand des Stahls geringer, als der des Schmiedeisens; auch zeigen die Resultate weniger Regelmässigkeit.

§ 107. Resultate aus einigen Versuchen von Tredgold <sup>1)</sup> mit Stahlstäben, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die folgenden Zahlen sind in englischen Massen gegeben.

1) Repertory of arts and manufactures, May 1825.

Bezeichnung des Stahls.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Bela- stung in der Mitte	Grösse der Durch- biegung
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Zoll
Stahl, geschmiedet, zu Draht ausgezogen, ge- härtet und bis zu dem Härtegrade einer ge- wöhnlichen Feile nach- gelassen . . . . .	13	0,95	0,375	54 82 110	0,02 0,03 0,04
Weicher Stahl, der von der Feile leicht ange- griffen wird . . . . .	24	0,92	0,36	18,6 37 47	0,05 0,1 0,127

§ 108. Der erste Stab zeigte die nämliche Biegung bei gleicher Belastung: 1) nachdem der Stahl bis zu einem intensiven Strohgelb angelassen worden war; 2) nachdem er bis zur stahlblauen Farbe angelassen worden war; 3) nachdem er bis zum Rothglühen erhitzt und langsam abgekühlt worden war, wobei die Belastung von 110 Pfund noch keine bleibende Krümmung bewirkte; 4) nachdem er aufs Neue gehärtet und glashart geworden war. In diesem letztern Zustande des Stahls bewirkte eine Belastung von 350 Pfund eine bleibende Durchbiegung von 0,005 Zoll, welche um 0,005 Zoll zunahm, wenn man die Belastung um 10 Pfund vergrösserte. Der Stab brach bei einer Belastung von 580 Pfund.

Der zweite Stab zeigte ebenfalls bei gleicher Belastung die nämliche Biegung: 1) nachdem der Stahl gehärtet worden war, so dass die Feile keinen Eindruck darauf machte; 2) nachdem er bis zu einer gleichmässigen Strohfärbung angelassen worden war. In diesem Zustande bewirkte eine Belastung von 130 Pfund noch keine bleibende Krümmung; doch bewirkte dies eine Belastung von 150 Pfund. Zerbrochen wurde der Stab von 385 Pfund.



### Widerstand des Gusseisens gegen Biegung.

§ 109. Mittelwerthe aus den Versuchen von Rondelet <sup>1)</sup> mit Barren von Gusseisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Sämmtliche Barren hielten einen Zoll ins Gevierte.

Bezeichnung des Gusseisens.	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung
	Zoll	Pfund	Linien
Graues Gusseisen . . . . .	42	312	5,5
Weiches Gusseisen . . . . .	42	312	4,6
Graues Gusseisen . . . . .	21	450	1
Weiches Gusseisen . . . . .	21	450	0,875

Aus den Versuchen mit grauem Gusseisen erhält man für die Constante  $E$  den Mittelwerth

$$E = 9\,029\,000\,000$$

und aus den Versuchen mit weichem Gusseisen

$$E = 10\,653\,000\,000$$

§ 110. Mittelwerthe aus den Versuchen von Tredgold <sup>2)</sup> mit Barren von Gusseisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. (Englische Masse.)

Bezeichnung des Gusseisens.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Grösse der Durchbiegung
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Zoll
Graues, weiches Gusseisen, das von der Feile leicht und vom Hammer wenig angegriffen wurde . . .	34	1	1	20	0,01
Gusseisen, gegossen von Herrn Dawson .	77	1,5	3	440	0,075
Dieselbe Barre . . .	77	3	1,5	360	0,25
Gusseisen, gegossen von Herrn Bramah (weniger weich als das vorhergehende). . .	36	0,9	0,9	180	0,183
dto. . . . .	36	0,9	0,9	180	0,189
dto. . . . .	36	0,75	0,975	180	0,255

1) Art de bâtir, tome I. pag. 294.

2) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 45.

Die vom Experimentator als mittleres Resultat dieser Versuche angenommene Regel <sup>1)</sup> entspricht einem Werthe für die Constante  $E$  von

$$E = 12\,144\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§ 111. Mittelwerthe aus neueren Versuchen von Tredgold <sup>2)</sup> mit Barren von Gusseisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. (Engl. Masse).

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Grösse der Durch- biegung
1) Drei von Bramah gegossene Stücke .	Zoll 36	Zoll 0,9	Zoll 0,9	Pfund 40	Zoll 0,041
2) Zwei Barren aus altem Eisen von Park	33	1,3	0,65	60	0,1
3) Zwei Barren aus Eisen von Adelphi	33	1,3	0,65	60	0,1
4) Zwei Barren aus Eisen von Alfreton	33	1,3	0,65	60	0,1
5) Zwei Barren von altem Gusseisen . .	33	1,3	0,65	60	0,09
6) Legirung aus gleich Theilen von altem Parkeisen und gutem, altem Guss- eisen . . . . .	33	1,3	0,65	72	0,1
7) Legirung aus Eisen und $\frac{1}{16}$ Kupfer . .	33	1,25	0,675	60	0,1

Eine Belastung von 180 Pfund, welche mehrere Stunden hindurch dauerte, bewirkte bei den drei Stücken unter Nr. 1 nur eine fast unmerkliche Krümmung.

Die Barren unter den Nr. 2, 3 und 4 wurden von Belastungen von 162 Pfund nicht nachtheilig verändert; Belastungen von 182 Pfund bewirkten sehr kleine bleibende Krümmungen.

Die Barren unter Nr. 5 wurden von 180 Pfund gar nicht, von 190 Pfund fast gar nicht nachtheilig verändert.

1) A practical essay on the strength of cast iron, pag 40. Die von dem Experimentator mit a bezeichneten Zahlen sind die Reciproken des Widerstandes gegen Biegung. Dividirt man 12144000 durch die Zahl a, so erhält man den zugehörigen Werth für  $E$ , wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden.

2) Dasselbe Werk, pag. 76 und folg. der zweiten Auflage.

Die Barren unter den Nr. 6 und 7 wurden von 182 Pfund gar nicht, von 202 Pfund sehr wenig nachtheilig verändert.

Aus den Versuchen unter den Nr. 1, 2, 3 und 4 findet man im Mittel den Werth der Constante  $E$  zu

$$E = 11\,530\,000\,000 \text{ Kil.}$$

#### Viertes Kapitel.

**Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längensaxe dieses Körpers ist.**

§ 112. Werden die Längen-Elemente der Körper sehr wenig ausgedehnt oder zusammengedrückt, so bringen nach § 76 und 77 gleiche Kräfte auch gleiche Verlängerungen oder Verkürzungen hervor. Bei einem rechteckigen Querschnitt liegen daher die Fasern, deren Länge unverändert bleibt, in der halben Höhe dieses Schnittes. Sobald aber die Längenveränderungen der Fasern beträchtlicher werden, können diese durch dieselbe Kraft mehr oder weniger ausgedehnt, als zusammengedrückt werden, und die unveränderten Fasern werden alsdann derjenigen Seite ferner oder näher rücken, welche durch die Biegung convex wird. Können endlich die Fasern nicht weiter ausgedehnt oder zusammengedrückt werden ohne sie zu zerreißen, oder zu zerquetschen, so erfolgt der Bruch. Dies geschieht bei den einzelnen Materialien auf verschiedene Weise. Bei den Steinen, dem Glase und den gegossenen Metallen tritt eine plötzliche und vollständige Trennung auf der ganzen Höhe des Querschnitts ein; bei den Hölzern werden die Fasern an der concaven Seite zerquetscht, an der convexen Seite aber unregelmässig herausgerissen; bei den geschmiedeten Metallen endlich ist der Bruch nicht immer von einer gänzlichen oder theilweisen Trennung begleitet: nur die Gestalt des Körpers wird verändert in Folge von neuen Gleichgewichtslagen, welche die Moleküle in der Nähe des Bruchquerschnitts angenommen zu haben scheinen, ohne dabei ihren Zusammenhang zu verlieren.

Von dem Gleichgewichte zwischen den Kräften, welche den Körper zu zerbrechen streben, und den widerstehenden Kräften, welche in einem beliebigen Querschnitte durch die Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern hervorgerufen werden, hängen die Bedingungen für den Bruch in diesem Querschnitte ab. Um die widerstehenden Kräfte genau zu schätzen, müsste man 1) die Lage der Gleichgewichtsaxe kennen, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, so wie 2) den Ausdruck für die Kraft, welche in einer Faser durch eine beliebige Ausdehnung oder Zusammendrückung hervorgerufen wird. In Ermangelung dieser Kenntnisse, die man sich nur durch sehr feine Versuche (*expériences délicates*) verschaffen könnte, muss man seine Zuflucht zu Hypothesen nehmen, um wenigstens annähernd richtige Resultate zu erhalten.

§ 113. Die einfachste und im Allgemeinen von der Wahrheit am wenigsten abweichende Hypothese ist die, nach welcher man annimmt, dass die Widerstände der Fasern, welche den Ausdehnungen und Zusammendrückungen derselben proportional sind, so lange die Biegung sehr gering bleibt, dies auch noch in dem Augenblicke seien, in welchem der Bruch erfolgt. In diesem Augenblicke wird daher der Querschnitt des Körpers sich durchaus in demselben Zustande befinden, in welchem er in den §§ 77 u. folg. betrachtet wurde; nur muss man sich vorstellen, dass die am meisten ausgedehnte Faser an der convexen Seite, oder die am meisten zusammengedrückte Faser an der concaven Seite in einem solchen Grade ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, dass sie auf dem Punkte stehen, zerrissen oder zerquetscht zu werden.

Die Lage der Gleichgewichtsaxe, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, wird auch hier noch durch dieselbe geometrische Bedingung bestimmt, wie im § 78. Man nehme daher diese Axe als bestimmt an, und, unter Beibehaltung der sich auf Fig. 1 beziehenden Benennungen des § 77, nenne man ausserdem

*v* den Abstand der Gleichgewichtsaxe von derjenigen Faser an der convexen oder concaven Seite des

Körpers, welche auf dem Punkte steht, zerrissen oder zerquetscht zu werden;

$R$  die constante Kraft, deren man bedarf, um ein Prisma zu zerreißen, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist.

Beachtet man nun, dass der Widerstand der Fasern in dem Abstand  $v'$  von der Axe  $ad'$  gleich  $R\,dudv$ , und daher der Widerstand der Fasern in dem Abstände  $v$  von derselben Axe gleich  $\frac{R}{v}\,vdudv$  ist, so erhält man für die Summe der statischen Momente dieser Widerstände, bezogen auf die Axe  $ad'$ , den Ausdruck

$$\frac{R}{v} \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 do + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 do \right\}.$$

Wir werden diesen Ausdruck das Bruchmoment des Körpers nennen und ihn durch den Buchstaben  $\rho$  bezeichnen.

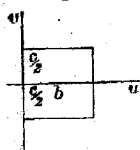
§ 114. Lässt sich der Querschnitt des Körpers in zwei symmetrische Hälften theilen durch eine Linie, die auf der Richtung der von Aussen einwirkenden Kraft normal steht, so ist diese Linie die Gleichgewichtaxe und die beiden Integrale sind einander gleich; man hat also

$$\rho = \frac{2R}{v} \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv$$

als Ausdruck für das Bruchmoment.

Vergleicht man diese Formeln mit denen des § 80 für das Elasticitätsmoment, so wird man erkennen, dass die ersteren aus den letzteren abgeleitet werden können, indem man  $R$  für  $E$  an die Stelle setzt und durch  $v'$  dividirt, d. h. durch den Abstand der Gleichgewichtaxe, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, von derjenigen Faser, welche ihr am fernsten liegt. Darnach findet man aus den Formeln der §§ 81 und folg. unmittelbar die jetzt aufzuführenden Ausdrücke.

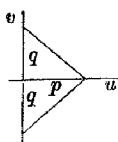
Fig. 9.



§ 115. Ist der Querschnitt ein Rechteck, Fig. 9, dessen Basis und Höhe durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, so ist  $v' = \frac{c}{2}$  und für das Bruchmoment erhält man den Ausdruck

$$\rho = \frac{2R}{c} \cdot \frac{bc^3}{12} = R \cdot \frac{bc^2}{6}$$

§ 116. Bilden den Querschnitt zwei congruente rechtwinklige Dreiecke, Fig. 10, deren Seiten durch  $p$  und  $q$  bezeichnet werden, so erhält man für das Bruchmoment den Ausdruck



$$\rho = \frac{R}{q} \cdot \frac{pq^3}{6} = R \cdot \frac{pq^2}{6}$$

§ 117. Ist der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $c$  in der Lage, dass die Axe, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, mit der Seite  $b$  den Winkel  $\phi$  bildet, so ist das Bruchmoment

$$\rho = R \cdot \frac{b^3 c \sin^2 \phi + bc^3 \cos^2 \phi}{6(b \sin \phi + c \cos \phi)}$$

Ist der Querschnitt ein Quadrat, so lässt sich dieser Ausdruck reduciren auf

$$\rho = R \cdot \frac{b^3}{6(\sin \phi + \cos \phi)};$$

und geschieht die Biegung in der Richtung einer der Diagonalen des Quadrats, so hat man

$$\rho = R \cdot \frac{b^3}{6\sqrt{2}}.$$

Bei einem Stabe mit quadratischem Querschnitt verhält sich daher der Widerstand gegen den Bruch in der Richtung einer der Diagonalen zu dem Widerstand gegen den Bruch in der Richtung einer der Seiten des Quadrats, wie  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  zu 1.

§ 118. Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $r$ , so erhält man für das Bruchmoment den Ausdruck

$$\rho = \frac{R}{r} \cdot \frac{r^4 \pi}{4} = R \cdot \frac{r^3 \pi}{4}$$

Die Bruchmomente des Quadrats und des eingeschriebenen Kreises verhalten sich zu einander wie 1 zu  $\frac{3\pi}{16}$ ; also eben so, wie die respectiven Elasticitätsmomente.

§ 119. Bei einem Rohre, dessen äusserer und innerer Durchmesser mit  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet werden, ist das Bruchmoment des innern, leeren Theils, diesen als ausgefüllt gedacht,

$$\frac{R}{r_1} \cdot \frac{r_2^4 \pi}{4},$$

und daher das Bruchmoment des Rohres,

$$\rho = R \cdot \frac{(r_1^4 - r_2^4) \pi}{4 r_1}.$$

Die Widerstände, welche ein voller Cylinder und ein Rohr, deren Querschnitte gleichen Inhalt haben, dem Bruche entgegensetzen, verhalten sich zu einander, wie

$$(r_1^2 - r_2^2)^{3/2} \text{ zu } \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1}$$

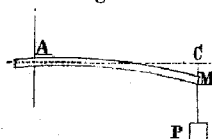
Sollten aber die Widerstände gleich sein, so müssen sich die Querschnitte verhalten, wie

$$\left( \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1} \right)^{2/3} \text{ zu } r_1^2 - r_2^2$$

§ 120. Da der Ausdruck für das Bruchmoment bei einer rechteckigen Bruchfläche bekannt ist, so kann man sich die Aufgabe stellen, in einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, für welches der in Rede stehende Ausdruck ein Maximum werde. Wird der Durchmesser des Kreises gleich 1 gesetzt, so sind die Seiten des verlangten Rechtecks, respective

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Fig. 11.



§ 121. Man betrachte jetzt einen prismatischen Stab, Fig. 11, der mit dem einen Ende, bei A, horizontal eingemauert sei, und an dessen andern Ende, bei M, sich ein Gewicht aufgehängt befindet.

Man nenne

- $\rho$  das Bruchmoment für den Querschnitt des Körpers, wie es sich nach den §§ 113 u. folg. berechnet;
- $P$  das Gewicht, welches an dem Endpunkt M des Körpers aufgehängt wurde;

$a$  den horizontalen Abstand des Querschnitts  $A$  von der Richtung des Gewichtes  $P$ ;

$s$  die Länge  $AM$  des Körpers;

$f$  die Durchbiegung oder den Krümmungspfeil  $CM$ .

Der Körper ist am meisten zum Bruche in dem Querschnitt  $A$  geneigt. Die Gleichgewichtsbedingung für den in Rede stehenden Fall ist

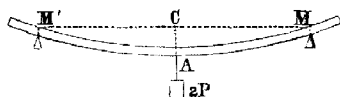
$$\rho = Pa, \text{ woraus } P = \frac{\rho}{a},$$

und wenn man annimmt, dass die Curve des Körpers die elastische Linie des § 86 sei, wo  $s = a + \frac{3f^2}{5a}$ , so

hat man

$$P = \frac{\rho}{s - \frac{3f^2}{5a^2}}$$

Fig. 13.



§. 122. Man betrachte jetzt einen prismatischen Stab, Fig. 13, welcher auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet worden sei.

Man nenne

$2P$  das in der Mitte des Stabes aufgehängte Gewicht;

$a$  die halbe Entfernung  $CM$  der Stützen von einander;

$f$  die Durchbiegung oder den Krümmungspfeil  $AC$ ;

$\alpha$  den Winkel, welchen die Tangente der Curve für den Punkt  $M$  oder  $M'$  mit der Horizontalen  $MM'$  bildet.

Der Stab ist in der Mitte, bei  $A$ , am meisten zum Bruche geneigt. Der Druck gegen die Stütze  $M$  ist aber (wenn man von der Reibung auf dieser Stütze absieht), eine Kraft, deren Richtung normal zu der Curve ist und deren verticale und horizontale Composante  $P$  und  $P \tan \alpha$  sind. Nimmt man daher an, dass die Curve die elastische Linie des § 86 sei, wo  $\tan \alpha = \frac{3f}{2a}$ , so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ausdrücken durch die Gleichung

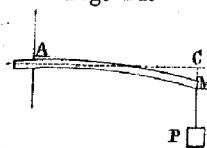
$$\rho = Pa + Pf \tan \alpha, \text{ oder } \rho = Pa \left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right),$$

woraus folgt



$$2P = \frac{2\rho}{a + f \tan \alpha}, \text{ oder } 2P = \frac{2\rho}{a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}}.$$

Fig. 14.



§ 123. Man betrachte einen prismatischen Stab, Fig. 14, dessen eines Ende eingemauert sei und der mit Gewichten belastet werde, die man auf seiner Länge nach einem willkürlichen Gesetze vertheilt.

Nennt man nun

$x$  die horizontale Entfernung eines beliebigen Punktes von dem Endpunkte  $A$ ;

$\rho$  den als Function von  $x$  ausgedrückten und für die Längeneinheit reducirten Werth des Gewichtes, welches in jenem Punkte zur Wirkung kommt;

$a$  die Entfernung  $AC$ ;

so hat man, um das Gleichgewicht auszudrücken,

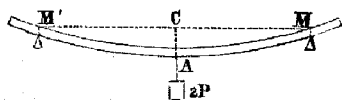
$$\rho = \int_0^a \rho x dx.$$

§. 124. Sind die von allen Längen-Elementen des Stabes getragenen Gewichte gleich, so ist  $\rho$  eine Constante und man hat

$$\rho = \frac{\rho a^2}{2} \text{ und } \rho a = \frac{2\rho}{a}.$$

Wird daher ein Stab, den man mit dem einen Ende eingemauert hat, von einem gleichförmig auf seiner Länge vertheilten Gewichte zerbrochen, so geschieht dies ebenfalls durch ein um die Hälfte kleineres Gewicht, wenn man dasselbe an dem andern Ende des Stabes aufhängt.

Fig. 15.



§ 125. Wird, wie im § 122, ein Stab, Fig. 15, horizontal auf zwei Stützen gelegt und mit gleichförmig auf seiner Länge vertheilten Gewichten belastet, wobei durch

$\rho$  die Belastung der Längeneinheit bezeichnet wird, so hat man  $\rho a$  und  $\rho a \tan \alpha$  als die verticale und horizontale Composante des Druckes, welchen die Stützen erleiden. Nimmt man daher an, dass die von dem Stabe

gebildete Curve die elastische Linie des § 90 sei, wo  $\tan \alpha = \frac{8f}{5a}$ , so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ausdrücken durch die Gleichung

$$\rho = pa \cdot a + pa \tan \alpha \cdot f - pa \cdot \frac{a}{2},$$

$$\text{oder } \rho = pa \cdot \left( \frac{a}{2} + f \tan \alpha \right) \text{ oder } \frac{pa^3}{2} \left( 1 + \frac{16f^2}{5a^2} \right);$$

$$\text{woraus } 2pa = \frac{4\rho}{a + f \tan \alpha}, \text{ oder } 2pa = \frac{4\rho}{a \left\{ 1 + \frac{16f^2}{5a^2} \right\}},$$

Vernachlässigt man das Quadrat von  $\frac{f}{a}$ , so folgt, dass ein Stab von einem auf seiner Länge gleichförmig vertheilten Gewichte, so wie von der Hälfte dieses Gewichtes, wenn sie in der Mitte des Stabes wirkt, in gleicher Weise zerbrochen wird.

§ 126. Wenn der horizontal auf zwei Stützen gelegte Stab zugleich mit einem Gewichte  $2P$  in der Mitte und dem constanten Gewichte  $p$  für jede Längeneinheit belastet wird, so lässt sich das Gleichgewicht ausdrücken durch die Gleichung.

$$\rho = (P + pa) \cdot a + (P + pa) \cdot f \tan \alpha - pa \cdot \frac{a}{2},$$

$$\text{oder } \rho = (P + pa) \left( a + f \tan \alpha \right) - \frac{pa^2}{2};$$

woraus folgt

$$2P = \frac{2\rho - pa(a + 2f \tan \alpha)}{a + f \tan \alpha}$$

In dem vorliegenden Falle ist, wenn man die Curve des Stabes als die elastische Linie des § 90 ansieht,

$$\tan \alpha = \frac{3P + 2pa}{8P + 5pa} \cdot \frac{4f}{a},$$

welcher Werth in die obigen Gleichungen eingesetzt werden muss.

§ 127. Um die vorstehenden Resultate auf einen gegebenen Körper anzuwenden, muss man für  $\rho$  den Ausdruck für das Bruchmoment substituiren, welches nach § 113 u. folg. dem Querschnitt des Körpers zukommt. Hierauf hat man der Constante  $R$  einen

Werth beizulegen, welcher der Natur des Körpers entspricht und aus den Beobachtungen gefunden werden muss.

Die Versuche, mittelst welcher man den Werth dieser Constante bestimmt, bestehen darin, einen prismatischen Stab horizontal auf zwei Stützen zu legen, ihn in der Mitte mit immer grösseren Gewichten zu belasten und sowohl das zerbrechende Gewicht, als die Durchbiegung (den Krümmungspfeil) in dem Augenblicke vor dem Bruche zu beobachten. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, dessen Seiten durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, so hat man nach § 115

$$\rho = R \cdot \frac{bc^2}{6}.$$

und nach § 122, wenn man von dem eignen Gewichte des Stabes absieht,

$$2P = \frac{2\rho}{a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}}.$$

Daher

$$2P = \frac{R \cdot bc^2}{3a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}},$$

woraus

$$R = 2P \cdot \frac{3a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}}{bc^2},$$

wobei  $2a$  die Entfernung der Stützen von einander,  $2P$  das in der Mitte wirkende Gewicht und  $f$  die Durchbiegung bezeichnen.

§ 128. Will man auf das eigne Gewicht des Stabes Rücksicht nehmen, so muss man den Ausdruck für  $2P$  im § 126 anwenden. Bezeichnet man das eigne Gewicht mit  $2\Pi$ , so erhält man aus jenem Ausdruck

$$2P = \frac{R \cdot bc^2 - 3\Pi(a + f \tan \alpha)}{3(a + f \tan \alpha)},$$

woraus folgt

$$R = \frac{3(2P + 2\Pi)(a + f \tan \alpha) - \Pi a}{bc^2},$$

man hat aber

$$\tan \alpha = \frac{3P + 2\Pi}{8P + 5\Pi} \cdot \frac{4f}{a}.$$

§ 129. Wenn die Stäbe nur eine geringe Länge besitzen, oder in dem Augenblicke des Bruchs nur eine unbedeutende Krümmung zeigen, so darf man die Glieder der zweiten Ordnung, welche bei Berücksichtigung der Krümmung in den obigen Formeln enthalten sind, vernachlässigen.

Man hat alsdann, wenn man von dem eignen Gewichte des Stabes absieht,

$$2P = R \cdot \frac{bc^2}{3a}, \text{ woraus } R = 2P \frac{3a}{bc^2},$$

und mit Berücksichtigung dieses Gewichtes,

$$2P = R \cdot \frac{bc^2}{3a} - \Pi, \text{ woraus } R = (2P + \Pi) \cdot \frac{3a}{bc^2}.$$

Es sollen jetzt die Versuche aufgeführt werden, die in der Absicht angestellt worden sind, den Widerstand der verschiedenen Materialien gegen den Bruch zu ermitteln, und aus denen sich daher der Werth der Constante  $R$  bestimmen lässt.

### Widerstand der Steine und Ziegel gegen den Bruch.

§ 130. Bei den Versuchen von Gauthey <sup>1)</sup> zerbrach ein Prisma aus hartem Kalkstein von Givry, welches 18 Linien lang und 8 Linien dick war, und auf zwei Stützen gelegt wurde, welche 18 Linien (?) von einander abstanden, unter einer Belastung von 143 Pfund, welche auf die Mitte des Prismas wirkte. Der Widerstand des weichen Kalksteins von Givry war nur  $\frac{1}{8}$  so gross.

§ 131. Nach den Versuchen von Barlow <sup>2)</sup> wird ein Prisma aus Ziegelsteinmasse, welches 4 Zoll engl. lang und 2 Zoll dick ist, und auf zwei Stützen gelegt wird, welche 3 Zoll von einander abstehen, zerbrochen unter einer Belastung in der Mitte von

343 engl. Pfund	für	gewöhnlichen	alten	Ziegelstein,
403	"	"	"	neuen
440	"	"	"	"
	"	"	"	sehr guten
	"	"	"	"

1) Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres. Journ. de physique, 1774.  
2) An essay on the strength and stress of timber, pag. 250.

§ 132. Resultate aus den Versuchen von Tredgold<sup>1)</sup> mit Prismen aus Marmor und Stein, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die folgenden Zahlen sind in englischen Massen gegeben.

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Prismen	Dicke der Prismen	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund
Weisser Bildsäulenmarmor, sehr rein, specif. Gewicht = 2,706 . . . . .	30	1,075	1,075	50
	15	1,08	1,05	110
	14	1,075	1,076	130
Portlandstein, braun, specif. Gewicht = 2,113 . . . . .	24	2	1,45	100
Weisser Sandstein, specif. Gewicht = 2,212 . . . . .	18	1,45	1,525	92
Stein von Dundee, specif. Gewicht = 2,621 . . . . .	14	1,45	1,5	414
Sandstein von Craigleith, specif. Gewicht = 2,362 . . . . .	14	1,55	1,55	137
Sandstein aus dem Steinbruch von Hailes . . . . .	14	1,55	1,5	123
Sandstein von Long-Annet . . . . .	9	1,525	1,45	160
Derselbe Stein . . . . .	7	1,55	1,55	233
Portlandstein . . . . .	12	2,07	1,55	270
Stein von Bath . . . . .	5,5	1	1	58

### Widerstand des Mörtels gegen den Bruch.

§ 133. Die Bestimmung des Widerstandes gegen den Bruch für verschiedene Mörtelarten mag man nachsehen in den Recherches sur les chaux de construction von Vicat.

### Widerstand der Hölzer gegen den Bruch.

§. 134. Ueber den Widerstand der Hölzer gegen den Bruch ist eine Menge von Beobachtungen veröffentlicht worden. Besonders hervorgehoben zu werden verdienen unter ihnen die Versuche von Buffon<sup>2)</sup> mit frisch geschlagenem Eichenholze. Die folgende Tabelle enthält die mittleren Resultate dieser Versuche.

Die Entfernung der Stützen von einander, welche oben mit 2a bezeichnet wurde, war um  $\frac{1}{12}$  kleiner, als die Längen der in der Tabelle angezogenen Stäbe.

1) The philosophical magazine and journal, vol. 56, pag. 200.

2) Histoire naturelle, partie expérimentale, XIe Mémoire.

Gevierte der Stäbe	Länge der Stäbe	Gewicht der Stäbe	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Durchbiegung im Augen- blicke des Bruchs.	
Zoll	Fuss	Pfund	Pfund	Zoll	Linien
4	7	58	5312	4	0
	8	66	4550	4	2
	9	74	4025	5	2
	10	83	3612	6	2
	12	99	2987	7	0
5	7	92	11525	2	6
	8	101	9787	2	9
	9	116	3309	3	3
	10	130	7125	3	10
	12	155	6075	5	8
	14	177	5300	8	1
	16	207	4350	8	1
	18	232	3700	8	1
	20	261	3225	9	5
	22	281	2975	11	3
	24	309	2162	12	3
	28	362	1775	20	0
6	7	127	18950		
	8	148	15525	2	5
	9	165	13150	2	8
	10	187	11250	3	3
	12	223	9100	4	1
	14	255	7475	4	4
	16	293	6362	5	8
	18	333	5562	7	11
	20	376	4950	9	2
7	8	203	26050	2	8
	9	226	22350	3	0
	10	253	19475	2	10
	12	302	16175	3	2
	14	351	13225	3	11
	16	405	11000	5	0
	18	452	9245	5	8
	20	503	8375	8	2
8	10	331	27750	2	8
	12	396	23450	3	0
	14	460	19775	3	6
	16	526	16375	4	6
	18	593	13200	4	3
	20	662	11480	6	3

Sucht man nach der Formel des § 128 den Werth für  $R$  mittels der Angaben über den Versuch mit einem Stabe von 6 Zoll ins Gevierte und 10 Fuss Länge, so findet man

$$R = 5\,862\,000 \text{ Kil.}$$

Der Versuch mit einem Stabe von 8 Zoll ins Gevierte und 14 Fuss Länge giebt

$$R = 5\,920\,200 \text{ Kil.}$$

Berechnet man die Werthe für  $R$  aus sämmtlichen Versuchen, so wird man nur solche Differenzen finden, die der Verschiedenheit der Güte der Hölzer oder den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können; doch würde man diese Uebereinstimmung nicht erhalten, wenn man nicht auf das eigne Gewicht der Stäbe und auf die Krümmung Rücksicht nähme, wie dies bei der Ableitung der Formel des § 128 geschehen ist.

§ 135. Versuche von Bélidor <sup>1)</sup> mit Stäben von Eichenholz.

Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Bemerkungen
Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	
1	1	18	406	Nicht eingemauert an den Enden
1	1	18	608	Eingemauert mit beiden Enden.
2	1	18	805	Nicht eingemauert.
1	2	18	1580	Desgl.
1	1	36	187	Desgl.
1	1	36	283	Desgl.
2	2	36	1585	Desgl.
20 Linien	28 Linien	36	1660	Desgl.

§ 136. Versuche von Rondelet <sup>2)</sup> mit Stäben aus Eichen- und Tannenholz.

Bezeichnung der Hölzer.	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Entfernung der Stützen von einander	Belastung bei welcher der Bruch erfolgte	Durchbiegung im Augenblicke des Bruchs
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Linien
Eichenholz .	2	2	24	2304	
	2	2	18	3105	
	2	3	24	5123	
	3	2	24	3475	
	1	1	42	312	22
Tannenholz .	1	1	21	585	7
	1	1	42	281	22

<sup>1)</sup> Science des ingénieurs, pag. 318.

<sup>2)</sup> Art de bâtir, tome I, pag 286 der sechsten Auflage, oder tome IV, pag 71 und 514 der fünften Auflage

§ 137. Mittlere Resultate aus den Versuchen des Obersten Beaufoy <sup>1)</sup>. Die Stäbe hielten 2 Zoll ins Gevierte, die Entfernung der Stützen von einander war 4 Fuss. (Engl. Masse).

Bezeichnung der Hölzer.	Specif. Gewicht	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
		Pfund
Danziger Eichenholz . . . . .	0,854	167
Rigaer Fichtenholz . . . . .	0,537	202
Holz der Weihrauchfichte . . . . .		272
Englisches Eichenholz . . . . .	0,922	258
Desgleichen . . . . .		211

Der in den §§ 122 u. folg. mit  $\alpha$  bezeichnete Winkel hält ungefähr 60°.

§ 138. Mittlere Resultate aus den Versuchen von Peake und Bavailler. <sup>2)</sup> Die Stäbe, welche 2 Zoll ins Gevierte hielten, waren mit dem einen Ende eingeklemmt (eingemauert), die Gewichte, durch welche die Stäbe zerbrochen wurden, waren in einem Abstände von 5 Fuss von jenem Ende angebracht. (Englische Masse).

Bezeichnung der Hölzer.	Specif. Gewicht	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
		Pfund
Rigaer Tannenholz, trocken. . . . .	0,633	153
Desgl. feucht . . . . .		172
Rotthannenholz aus Virginien . . . . .	0,558	189
Holz der Weihrauchfichte . . . . .	0,777	256
Weisstannenholz aus Canada . . . . .	0,678	109
Lärchenholz . . . . .	0,540	150
Danziger Lärchenholz . . . . .	0,648	156
Eschenholz . . . . .	0,782	217
Teakholz . . . . .	0,309	264

Die Durchbiegung betrug im Augenblick des Bruchs ungefähr 14 Zoll.

§ 139. Die folgende Tabelle ist ein Auszug einer andern, welche Barlow <sup>3)</sup> gegeben hat. Sie enthält die mittleren Resultate aus mit verschiedenen Holzarten angestellten Versuchen. Sämmtliche Stäbe hielten 2 Zoll ins Gevierte (Englische Masse).

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 47.

2) Dasselbe Werk, pag. 49.

3) Dasselbe Werk, pag. 178.



Bezeichnung der Hölzer.	Specif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte, bei welcher d. Bruch erfolgte	Durchbiegung im Augenblicke des Bruchs	Zahlen die dem Bruchwiderstande proportional sind
Teakholz . . . . .	0,745	Fuss 7	Pfund 938	Zoll 4,32	2488
Poonholz . . . . .	0,579	7	846	5,92	2266
Eichenholz, englisch . . . . .	0,969	7	450	5,90	1205
desgl. desgl. . . . .	0,934	7	637	8,10	1736
desgl. aus Canada . . . . .	0,872	7	673	6,00	1803
desgl. aus Danzig . . . . .	0,756	7	560	4,86	1477
desgl. vom Adriat. Meere . . . . .	0,993	7	526	5,73	1409
Eschenholz . . . . .	0,760	7	772	8,92	2124
Buchenholz . . . . .	0,696	7	593	5,73	1586
Ulmenholz . . . . .	0,553	7	386	6,93	1042
Holz der Weihrauchfichte . . . . .	0,660	7	622	6,00	1666
Rothtaunnenholz . . . . .	0,657	7	511	5,83	1368
Tannenholz aus Neuengland . . . . .	0,553	7	420	4,66	1116
desgl. aus Riga . . . . .	0,753	7	422	6,00	1131
desgl. desgl. . . . .	0,738	6	467	6,00	1081
desgl. aus dem Marforest . . . . .	0,696	7	436	6,00	1168
desgl. desgl. . . . .	0,693	6	561	6,42	1310
desgl. desgl. . . . .	0,703	6	561	6,42	1310
Lärchenholz . . . . .	0,531	7	325	8,58	890
desgl. . . . .	0,522	6	370	5,00	850
desgl. . . . .	0,556	6	501	5,00	1149
desgl. . . . .	0,560	6	510	5,00	1172
Sparren aus Norwegen (Tannenholz) . . . . .	0,577	6	655	4,00	1492

Die erste Probe von englischem Eichenholz war von geringerer Qualität.

Multiplieirt man die Zahlen der letzten Columnne mit 4217, so erhält man sehr nahe die Werthe der Constante  $R$ , wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden. Aus den Versuchen mit Eichenholz erhält man im Mittel

$$R = 6\,435\,000 \text{ Kil.},$$

und aus den Versuchen mit Tannenholz

$$R = 5\,111\,000 \text{ Kil.}$$

§ 140. Versuche von Tredgold<sup>1)</sup> und Ebbels mit Stäben aus verschiedenen Holzarten, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Sämmtliche Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte. (Englische Masse.)

<sup>1)</sup> Elementary principles of carpentry, pag. 44,

Bezeichnung der Hölzer.	Specif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einan- der	Bela- stung in d. Mitte, bei wel- cher der Bruch erfolgte	Durch- biegung im Augen- blicke d. Bruchs	Zahlen, die dem Bruch- wider- stande proportio- nal sind
		Fuss	Pfund	Zoll	
Englisches Eichenholz, von einem jungen Baume . . .	0,863	2	482	1,87	964
Eichenholz, altes Schiffsholz	0,872	2,5	264	1,5	660
desgl. v. einem alten Baume	0,625	2	218	1,38	436
desgl. von mittlerer Güte	0,748	2,5	284		710
desgl. grünes . . . . .	0,763	2,5	219		547
desgl. aus Riga . . . . .	0,688	2	357	1,15	714
Buchenholz, v. mittlerer Güte	0,690	2,5	271		677
Erlenholz . . . . .	0,555	2,5	212		530
Platanenholz . . . . .	0,648	2,5	243		607
Feigenmaulbeerbaumholz (Sycamore) . . . . .	0,590	2,5	214		535
Kastanienbaumholz, grünes	0,875	2,5	180		450
Eichenholz, v. ein. jung. Baume	0,811	2,5	324	2,5	810
desgl. von mittlerer Güte	0,690	2,5	254		635
desgl. . . . .	0,753	2,5	314	2,38	785
Ulmenholz, gemeines . . .	0,544	2,5	216		540
desgl. grünes (wied. gen.)	0,763	2,5	192		480
Akazienholz, grünes . . .	0,820	2,5	249		622
Mahagoniholz, spanisches, trocken . . . . .	0,852	2,5	170		425
desgl. aus Honduras, trock.	0,560	2,5	255		637
Nussbaumholz, grünes. . .	0,920	2,5	195		487
Pappelholz von der italie- nischen Pappel . . . . .	0,374	2,5	181		327
desgl. von der Silberpappel	0,511	2,5	228	1,5	570
Weidenholz . . . . .	0,405	2,5	146	3	365
Birkenholz . . . . .	0,720	2,5	207		517
Cedernholz v. Libanon, trock.	0,486	2,5	165	2,75	412
Tannenholz aus Riga . . .	0,480	2,5	212	1,3	530
desgl. aus Memel . . . .	0,553	2,5	218	1,15	545
desgl. aus Langesund (Norwegen) . . . . .	0,639	2	396	1,125	792
desgl. aus Schottland . .	0,529	2,5	233	1,75	582
desgl. desgl. . . . .	0,460	2,5	157		392
Weisstannenhz. a. Christiania	0,512	2	343	0,937	686
desgl. aus Amerika	0,465	2	285	1,312	570
desgl. aus England	0,555	2,5	186		465
Fichtenholz aus Amerika, von der Weymouthsfichte	0,460	2	329	1,125	658
Lärchenholz, eine ausge- suchte Probe . . . . .	0,640	2,5	253	3	632
desgl. von mittlerer Güte	0,622	2,5	223		557
desgl. von einem sehr jungen Baume . . . . .	0,396	2,5	129	1,75	322

Multiplieirt man die Zahlen der letzten Columne mit 12651, so erhält man aus jedem Versuche den resultirenden Werth der Constante  $R$ , wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden. Doch gelten diese Werthe ohne Berücksichtigung des Gewichtes der Stäbe und der Krümmung.

Aus den Versuchen mit Eichenholz erhält man im Mittel

$$R = 8\,501\,000 \text{ Kil.},$$

und aus den Versuchen mit Tannenholz,

$$R = 7\,097\,000 \text{ Kil.}$$

§ 141. Versuche von George Buchanan <sup>1)</sup> über die Biegung und den Bruch des Fichtenholzes (Memel fir). Die Entfernung der Stützen von einander betrug 5 Fuss. (Englische Masse.)

Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Durchbiegung	Bemerkung.
Zoll	Zoll	Pfund	Zoll	
2	2	170	0,5	
		357	1	Ward nach der Belastung wieder vollkommen gerade.
		442	1,5	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{8}$ Zoll.
		510	1,7	
2	2	595		Brach.
		170	0,5	
		344	1	Wie oben.
		450	1,5	Wie oben.
3	2	510		Brach.
		255	0,5	
		527	1	
		680		Begann zu brechen.
2	3	850		Brach.
		357	0,5	
		722	1	Ward nach der Entlastung wieder vollkommen gerade.
		1045	1,5	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{16}$ Zoll.
4	2	1190	2	Brach.
		340	0,5	
		654	1	
		1037	1,5	Brach.
2	3	1020		Brach.

§ 142. Um die nähern Umstände bei der Biegung und dem Bruch der Hölzer, wie die Ausdehnung und Verkürzung der Fasern und die Lage der neutralen Faserschicht, zu erforschen, sind von Ch. Dupin Ver-

<sup>1)</sup> The Edinburgh philosophical journal, part XII, 1825.

suche angestellt worden, deren Resultate indess noch nicht bekannt sind. Barlow theilt über diesen Gegenstand in seinem oben citirten Werke einige Untersuchungen mit, welche zeigen, dass in einem Holzstabe, wenn derselbe immer mehr gebogen wird, die Zusammendrückung der Fasern an der concaven Seite grösser ist, als die Ausdehnung der Fasern an der convexen Seite. Beim Beginn der Biegung ist das Verhältniss der Verkürzung der einen zur Verlängerung der andern der Einheit gleich, und es wächst nach und nach, bis es gleich 1,7 wird. Die neutrale Faserschicht nähert sich allmählich der convexen Seite. Barlow beobachtete sie bei den Stäben, mit welchen er seine Versuche anstellte, im Augenblicke des Bruchs gewöhnlich in  $\frac{5}{8}$  der Höhe des Querschnitts, von der concaven Seite aus gezählt.

Diese Eigenschaft des Holzes lässt sich durch einen bemerkenswerthen Versuch darthun, welchen Duhamel erdacht hat. Er besteht darin, einen Holzstab auf der concaven Seite mit der Säge quer einzuschneiden und den Schnitt mit einem Plättchen von hartem Holze auszufüllen. Die Tragkraft des Stabes nimmt etwas zu, wenn die Säge bis auf  $\frac{1}{3}$  der Dicke eindringt; sie bleibt dieselbe, wenn die Säge ungefähr bis auf die Hälfte eindringt, und sie wird etwas geringer, wenn die Säge bis auf  $\frac{3}{4}$  der Dicke eindringt. Dieser Versuch ist von Barlow mit dem nämlichen Erfolge wiederholt worden.

### Widerstand des Gusseisens gegen den Bruch.

§ 143. Die folgende Tabelle enthält die von Banks <sup>1)</sup> angestellten Versuche. Die Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte. Die Durchbiegung derselben betrug ungefähr einen Zoll im Augenblicke des Bruchs. (Engl. Masse.)

Entfernung der Stützen von einander	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	Mittlere Belastung
Fuss	Pfund	Pfund
3	756	
3	756	756
2,5	1008	1008
3	735,5	735,5
3	963	
3	958	972
3	994	
3	864	
3	874	869

1) Treatise on the power of machines, pag. 96.

Aus diesen Versuchen findet man im Mittel den Werth der Constante  $R$  für Gusseisen zu

$$R = 31\,810\,000 \text{ Kil.}$$

wobei stets der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden.

§ 144. Mittlere Resultate aus den in Creusot von Ramus <sup>1)</sup> angestellten Versuchen. Die Stäbe, welche mit dem einen Ende eingemauert waren, hielten 0,0812 Meter ins Gevierte. Der Hebelarm des zerbrechenden Gewichtes war 2,11 Meter.

Bezeichnung des Gusseisens.	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Kilogramm
Weisses Gusseisen (Roheisen) von Creusot, nach dem ersten Schmelzen . . . . .	586
Desgl., graues . . . . .	895
Mittel aus Versuchen mit grauem Gusseisen (Roheisen) aus verschiedenen Gegenden, umgeschmolzen . . . . .	873
Graues Gusseisen (Roheisen) von Creusot, umgeschmolzen . . . . .	911

Um aus diesen Beobachtungen den Werth für  $R$  zu finden, beachte man, dass wenn  $P$  das zerbrechende Gewicht,  $\Pi$  das Gewicht des Stabes und  $a$  den Hebelarm des Gewichtes  $P$  bezeichnen, man nach den §§ 115, 121 und 124 hat

$$(P + \frac{1}{2} \Pi) a = p = R \cdot \frac{bc^2}{6},$$

woraus

$$P = (2P + \Pi) \cdot \frac{3a}{bc^2}.$$

Wendet man diese Formel auf das mittlere Resultat der Versuche mit grauem Roheisen an, so erhält man

$$R = 22\,460\,000 \text{ Kil.};$$

doch ist dieser Werth etwas unzuverlässig, weil die Versuche nicht präcis genug beschrieben sind, um überzeugt zu sein, dass die Länge  $a$  des Hebelarms genau berechnet sei, und weil der Einfluss der Krümmung des Stabes vernachlässigt wird.

1) La Sidérotechnie, par M. Hassenfratz, tome 1, pag. 47.

§ 145. Resultate aus verschiedenen Versuchen, welche in der Schule für Brücken- und Wegbau (École des ponts et chaussées) zu Paris angestellt und von Gauthey <sup>1)</sup> mitgetheilt wurden.

Gevierte der Stäbe	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Zahlen, die dem Bruch- widerstande pro- portional sind
Meter	Meter	Kilogramm	
0,0271	0,122	3143	19,3
0,0271	0,244	1943	23,9
0,0541	0,244	9178	14,1
0,0541	0,353	5752	12,8
0,0541	0,244	13006	20,0
0,0541	0,487	7250	21,2

Multiplieirt man die Zahlen der letzten Columnne mit 1 500 000, so erhält man die Werthe der Constante  $R$ ; als Mittelwerth folgt aus diesen Versuchen

$$R = 28\,100\,000 \text{ Kil.}$$

§ 146. Versuche von Rondelet. <sup>2)</sup> Die Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte.

Bezeichnung des Eisens.	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Mittlere Bela- stung	Durchbiegung im Augen- blicke des Bruchs
	Zoll	Pfund	Pfund	Linien
Graues Roheisen	42	450	450	6,25
Desgl. . . . .		450		6,75
Weiches Roheisen	42	650	656	15,75
Desgl. . . . .		1062		14,25
Desgl. . . . .		350		4
Desgl. . . . .		561	795	10,5
Graues Roheisen	21	540		1
Desgl. . . . .		1050		2
Weiches Roheisen	21	1650	1461	5,25
Desgl. . . . .		1272		2

Aus dem mittleren Resultate der Versuche mit dem grauen Roheisen findet man für die Constante  $R$  den Werth

$$R = 17\,973\,000 \text{ Kil.}$$

Das mittlere Resultat der Versuche mit dem weichen Roheisen giebt für dieselbe Constante den Werth

<sup>1)</sup> Traité de la construction des ponts, tome II, pag. 150.

<sup>2)</sup> Art de bâtir, tome IV, pag. 514.

Navier's Baumechanik.

$$R = 29\,420\,000 \text{ Kil.}$$

§ 147. Versuche von G. Rennie <sup>1)</sup> mit Stäben aus Gusseisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Der Flächeninhalt des Querschnitts betrug bei sämtlichen Stäben, mit Ausnahme der beiden letzten, einen Quadratzoll. (Engl. Masse.)

Bezeichnung d. Eisens	Gewicht der Stäbe		Entfernung der Stützen von einander		Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Pfd.	Unz.	Fuss	Zoll	Pfund
Stab von einem Zoll ins Gevierte . . . . .	10	9	3		897
Desgl. . . . .	9	8	2	8	1086
Die Hälfte dieses Stabes			1	4	2380
Stab von einem Zoll ins Gevierte, auf eine Kante gelegt . . . . .	9	8	2	8	851
Die Hälfte dieses Stabes			1	4	1587
Stab von 2 Zoll Höhe bei $\frac{1}{2}$ Zoll Breite . . . . .	9	5	2	8	2185
Die Hälfte dieses Stabes			1	4	4508
Stab von 3 Zoll Höhe bei $\frac{1}{3}$ Zoll Breite . . . . .	9	15	2	8	3588
Die Hälfte dieses Stabes			1	4	6854
Stab von 4 Zoll Höhe bei $\frac{1}{4}$ Zoll Breite . . . . .	9	7	2	8	3979
Ein gleichseitiges Prisma, eine Kante nach oben	9	11	2	8	1437
Desgl., eine Kante nach unten . . . . .	9	7	2	8	840
Die Hälfte d. ersten Stabes			1	4	3059
Die Hälfte des zweiten Stabes . . . . .			1	4	1656
Stab, dessen Querschnitt ein $\perp$ , welches sich in ein Quadrat von 2 Zoll Seite zeichnen lässt. . . . .	10	0	2	8	3105
Stab, dessen Querschnitt eine halbe Ellipse, die sich in ein Rechteck zeichnen lässt, welches 4 Zoll hoch und $\frac{1}{4}$ Zoll breit ist. . . . .	7	0	2	8	4000
Stab, dessen Querschnitt eine halbe Parabel, gezeichnet in ein gleiches Rechteck, den Scheitel nach unten . . . . .			2	8	3860

1) Philosophical Transactions, 1818; oder Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

Nach andern Versuchen, welche mit Stäben angestellt wurden, die man an dem einen Ende horizontal einmauerte und am andern, 2 Fuss 8 Zoll davon entfernten, Ende mit Gewichten belastete, war das zerbrechende Gewicht für

einen Stab von 1 Zoll ins Gevierte. . . . 280 Pfd.

einen Stab von 2 Zoll Höhe bei  $\frac{1}{2}$  Zoll Breite 538

Das Resultat für den Stab mit quadratischem Querschnitt, welcher auf eine Kante gelegt wurde, entspricht ganz dem, was im § 117 über diesen Fall gesagt wurde. Aus den Versuchen mit Stäben quadratischen und rektangulären Querschnitts folgt für die Constante  $R$  im Mittel der Werth

$$R = 38\,580\,000 \text{ Kil.}$$

§ 148. Die folgende Tabelle enthält die Resultate von einigen neueren, von Tredgold <sup>1)</sup> veröffentlichten Versuchen mit gusseisernen Stäben, welche an dem einen Ende horizontal gehalten wurden. Die zerbrechenden Gewichte wirkten an einem mechanischen Hebelarm von 2 engl. Fuss.

Bezeichnung des Eisens.	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Zoll	Zoll	Pfund
Altes Eisen von Park . . . . .	1,3	0,65	184
Eisen von Adelphi . . . . .	1,3	0,65	173
Eisen von Alfreton . . . . .	1,3	0,65	153
Stab aus alten Gusstückchen (Ramasseisen) . . . . .	1,3	0,65	168
Legirung aus gleichen Theilen von altem Eisen von Park und gutem altem Gusseisen . . . . .	1,3	0,65	174
Legirung von Eisen mit $\frac{1}{16}$ Kupfer	1,25	0,675	194

Die fünf ersten Versuche geben im Mittel für Gusseisen

$$R = 31\,740\,000 \text{ Kil.}$$

§ 149. Versuche von George Buchanan <sup>2)</sup> mit Stäben aus Gusseisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die Entfernung der Stützen betrug 32 Zoll. (Englische Masse).

1) A practical essay on the strength of cast iron, pag 80 u. fgde. der zweiten Ausgabe.

2) The Edinburgh philosophical journal, part XII, 1825.



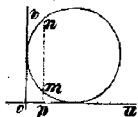
Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte.	Durch- biegung	Bemerkungen.
Zoll 1	Zoll 1	Pfund 357 765	Zoll 0,25 0,5	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{16}$ Zoll. Brach.
2	1	770 714 1062	0,25 0,37	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{16}$ Zoll. Brach.
		1530		

Aus diesen Resultaten lässt sich erkennen, dass der Widerstand gegen den Bruch beim Gusseisen ungefähr fünf Mal so gross ist, wie beim Eichenholze.

Ueber den Widerstand des Schmiedeiseus gegen den Bruch, wenn die Richtung der brechenden Kraft rechtwinklig auf der Länge des Körpers steht, fehlt es noch an guten Versuchen.

### Theorie des Widerstandes gegen den Bruch nach Galilei und nach Mariotte und Leibniz.

§ 150. Nach der Theorie von Galilei legte man die horizontale Gleichgewichtsaxe durch den tiefsten Punkt des Bruchquerschnitts, Fig. 16, und betrachtete die innere Kraft, welche in jedem Punkte dieses Querschnitts hervorgerufen wird, als constant für alle Punkte.



Nennt man nun

$R$  den Widerstand der Flächeneinheit;

$b$  die Breite des Querschnitts;

$f_1(u)$  und  $f_2(u)$  die Werthe  $pm$  und  $pn$  der Ordinate der Begrenzungscurve des Schnitts für dieselbe Abscisse  $u$ ;

$c$  die Höhe des Querschnitts;

so hat man

$$R \int_0^b du \int_{f_1(u)}^{f_2(u)} v dv,$$

als Ausdruck des Widerstandsmomentes gegen den Bruch. Für den Fall, in welchem der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $c$  ist, wird aus dem vorstehenden Ausdrucke

$$R \cdot \frac{bc^2}{2}.$$

Nach der Theorie, welche gewöhnlich Mariotte und Leibniz zugeschrieben wird, legte man ebenfalls die horizontale Gleichgewichtsaxe durch den tiefsten Punkt des Querschnitts, nahm jedoch die innere Kraft, welche in jedem Punkte dieses Schnitts hervorgerufen wird, als proportional dem Abstände dieses Punktes von der Gleichgewichtsaxe an. Das Widerstandsmoment gegen den Bruch war alsdann

$$\frac{R}{c} \int_0^b du \int_{f_1(u)}^{f_2(u)} v^2 dv;$$

aus demselben wurde für den Fall eines rechteckigen Querschnitts

$$R \cdot \frac{bc^2}{3}.$$

### Bemerkung über die Theorie des Widerstandes gegen den Bruch.

§ 151. Der im § 112 und folgd. vorgetragenen Theorie liegt die Hypothese zum Grunde, dass die Längenelemente im Augenblicke des Bruchs Widerstände leisten, welche der Ausdehnung und Zusammendrückung dieser Elemente proportional sind und die daher für gleiche Ausdehnungen und Zusammendrückungen auch gleich gross sind. Die Lage der Gleichgewichtsaxe, welche die unveränderlichen (neutralen) Fasern enthält, wird durch die in den §§ 77 und 78 enthaltene Bedingungsgleichung bestimmt, in der Weise, dass diese Axe sich in der halben Höhe des Querschnitts befindet, wenn der Schnitt in seiner Höhe in zwei symmetrische Hälften sich theilen lässt, wie dies beim Rechteck und beim Kreise der Fall ist.

Stimmte diese Hypothese mit der wirklichen Natur genau überein, so würden die Werthe, welche man für die Constante  $R$  aus den in den §§ 94 und folgd. mitgetheilten Versuchen über den Bruch mittelst der

vorhergehenden Formeln findet, durchaus nicht verschieden sein von den Resultaten, die man durch directe Versuche über das Zerreißen oder Zerdrücken (Zerquetschen) der Körper erhält. Findet diese Uebereinstimmung nicht statt, so hat man dies dem Umstande zuzuschreiben, dass die Fasern in dem Augenblicke, welcher dem Bruche eben vorhergeht, der Ausdehnung und Zusammendrückung nicht gleichen Widerstand leisten, wesshalb die Gleichgewichtsaxe ihre ursprüngliche Lage verlässt, so dass die Ausdrücke für das Bruchmoment nicht dem Zustande des Körpers entsprechen.

Man muss indessen beachten, 1) dass die wichtigsten, vorhin erhaltenen Ergebnisse nichts desto weniger wahr bleiben, so dass die Widerstände für rechteckige Querschnitte stets der Breite und dem Quadrat der Höhe, ebenso, wie für ähnliche Figuren überhaupt stets dem Würfel der homologen Dimensionen proportional sind. Nur bei Querschnitten von verschiedener Gestalt ändern sich die Verhältnisse der Widerstände. 2) In der Praxis wird durchaus nicht gefordert, die respectiven Widerstände der Materialien für denjenigen Zustand zu berechnen, in welchem sie sich kurz vor dem Bruche befinden; im Gegentheil wird, wie man in der Folge sehen wird, nur der Fall in Betracht gezogen, wo die Materialien erst sehr wenig gebogen worden sind und die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wurde, und alsdann zeigt sich der Widerstand in einer Weise, die augenscheinlich den vorhin gegebenen Resultaten gemäss ist.

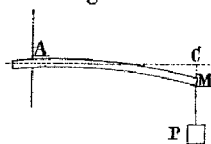
### **Bruch eines prismatischen Stabes von sehr geringer Länge.**

§ 152. Die obigen Betrachtungen können zufolge dem, was im § 79 bemerkt wurde, nur so lange ihre volle Anwendung finden, wie die Länge des prismatischen Stabes die Dimensionen des Querschnitts bedeutend übertrifft und dies findet in den meisten und wichtigsten Fällen wirklich statt.

Was diejenigen Fälle anlangt, in denen die Länge des prismatischen Körpers die Dimensionen des Querschnitts nur wenig übertrifft, oder gar von diesen übertroffen wird, so beschränken wir uns darauf eine kurze

Uebersicht dieses Stoffes zu geben, da noch keine genügende Versuche zur Ergründung desselben angestellt worden sind.

Man betrachte den Stab  $AM$  (Fig. 17) als mit dem einen Ende horizontal eingemauert, und nehme zuerst an, dass der Faden, an welchem das Gewicht  $P$  hängt, in der Ebene des Querschnitts  $A$  befestigt sei, d. h. in dem Schnitte, mit welchem die Einmauerung des Stabes beginnt. Das Gewicht  $P$  wird



alsdann nicht den Theil  $AM$  des Stabes zu biegen suchen, sondern es wird suchen, diesen Theil von dem eingemauerten zu trennen, und die Fasern, welche diese beiden Theile vereinigen, werden um eine gewisse Grösse ausgedehnt werden, bevor jene Trennung eintritt. In der Natur der Sache liegt es, die zur Hervorbringung dieser Ausdehnung erforderliche Kraft 1) dem Inhalt der Querschnittsfläche des Stabes und 2) der Grösse der in Rede stehenden Ausdehnung proportional anzunehmen. Ist daher der Querschnitt ein Rechteck, dessen horizontale und verticale Seite respective mit  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, und nennt man ferner

$\delta$  die (als sehr gering vorausgesetzte) verticale Ausdehnung der Theile des Stabes, welche sich in dem Querschnitt  $A$  befinden,

$D$  einen eigenen, constanten Coefficienten für den Widerstand des Stabes gegen das Hinweggleiten eines Theiles über den andern in der Ebene des Querschnitts,

so wird die in Rede stehende Kraft ausgedrückt durch  $D\delta bc$ . Man hat also für das Gleichgewicht die Gleichung

$$P = D\delta \cdot bc$$

zu schreiben, und man wird einsehen, dass der Bruch erfolgen muss, sobald die Ausdehnung  $\delta$  weit genug vorgeschritten ist, um die Trennung der beiden Theile des Stabes zu veranlassen. Das zerbrechende Gewicht würde demnach dem Inhalt der Querschnittsfläche proportional sein.

§ 153. Man kehre jetzt zu der Betrachtung des Stabes zurück, dessen einer, links von  $A$  befindlicher Theil eingemauert ist, während hingegen der andere,

rechts von  $A$  befindliche Theil frei ist und an seinem Endpunkte  $M$  ein Gewicht  $P$  vertical abwärts wirkt. Zufolge dem, was im § 77 bemerkt wurde, befindet sich der Theil  $AM$  im Gleichgewicht, wenn die innern, in dem Querschnitt  $A$  durch die Wirkung des Gewichtes  $P$  hervorgerufenen Kräfte verticale Composanten haben, deren Summe gleich  $P$  ist, und wenn ferner die horizontalen Composanten dieser Kräfte dem Drehvermögen des Gewichtes  $P$ , bezogen auf die horizontale Axe, welche den Querschnitt der neutralen Faserschicht bildet, das Gleichgewicht halten. Bisher wurde nur dieses letztere Gleichgewicht betrachtet, in dem vorliegenden Falle aber wird es nothwendig, das Gleichgewicht der verticalen Kräfte ebenfalls in Betracht zu ziehen. Nimmt man nun an, dass diese verticalen Kräfte in dem Querschnitte so hervorgerufen werden, wie es dem, was oben darüber gesagt wurde, gmäss ist (worin man sich nicht sehr von der Wahrheit entfernen kann, besonders so lange die Länge des Stabes sehr gering ist), so hat man zuerst die Gleichung

$$P = D\delta \cdot bc.$$

Was das Gleichgewicht gegen Drehung anlangt, so nenne man  $\rho$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $A$  der Curve, welche die Längenaxe des Stabes bildet; man hat alsdann, um dieses Gleichgewicht auszudrücken, da nach § 86 ja  $P(a-x) = \frac{E}{\rho}$  ist, hier die Gleichung

$$Pa = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{bc^3}{12},$$

wobei  $a$  die Länge  $AM$  bezeichnet und  $E$  die Bedeutung hat, welche dafür im § 77 angegeben wurde.

Erträgt der Stab die Wirkung des Gewichtes  $P$  ohne zu brechen, so hat man das Gleichgewicht in dem Querschnitt  $A$  als durch die beiden obigen Gleichungen ausgedrückt anzusehen. Ist die Länge des Stabes fast gleich Null, so ist nur die erste in Betracht zu ziehen; ist hingegen diese Länge sehr gross, so ist nur die zweite in Betracht zu ziehen. In den Fällen, welche zwischen diesen Extremen liegen, muss man auf beide Gleichungen Rücksicht nehmen, und man wird aus ihnen respective die Werthe der Grössen  $\delta$  und  $\rho$  erhalten,

welche für den Befestigungspunkt  $A$  respective den Grad der Ausdehnung der Molecüle in verticaler Richtung, sowie den Grad der Biegung angeben.

§ 154. Was den Bruch anlangt, so beachte man, dass wir denselben, in Gemässheit der Betrachtungen in § 112, als bedingt ansehen durch einen gewissen Grad von Ausdehnung derjenigen Theile des Stabes, deren Spannung am grössten geworden ist. Setzen wir nun den Gleichgewichtszustand des Querschnitts  $A$  als mit den früheren Betrachtungen übereinstimmend voraus, so ist klar, dass, als Folge der verticalen Senkung des Theils  $AM$ , so wie der Biegung desselben, die Fasern an der obern Seite des Stabes in dem Querschnitt  $A$  um einen Bruchtheil ihrer ursprünglichen Länge ausgedehnt sein werden, welcher sich ausdrücken lässt durch <sup>1)</sup>

$$\sqrt{\delta^2 + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{2}e\right)^2};$$

oder, wenn man für  $\delta$  und  $\rho$  ihre Werthe aus den obigen Gleichungen einführt, durch

$$\frac{P}{bc} \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}.$$

Da nun die Grösse dieser Ausdehnung den Bruch bedingt, so folgt daraus, dass das Gewicht, welches den Stab zerbrechen würde, dem Ausdrücke

$$\frac{bc}{\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}}$$

proportional sein muss

An den Grenzen ist diese Formel vollkommen gültig: ist die Länge des Stabes sehr gering, so kann man das Glied, welches mit dem Verhältnisse  $\frac{a^2}{c^2}$  behaftet ist, vernachlässigen, und der Bruchwiderstand ist dann dem

<sup>1)</sup> Nach § 77 beträgt die Ausdehnung der Längeneinheit durch die Biegung  $\frac{v}{\rho}$ ; diese Ausdehnung wird als horizontal angenommen und giebt daher mit der verticalen Ausdehnung  $\frac{1}{2}$  componirt die folgende resultirende Ausdehnung, wobei im vorliegenden Falle noch  $\frac{c}{2}$  statt  $v$  zu setzen ist.

Ausdrücke  $bc$  proportional; ist die Länge sehr gross im Verhältniss zur Höhe  $c$ , so kann man hingegen das Glied  $\frac{1}{D^2}$  vernachlässigen, und der Bruchwiderstand ist dann dem Ausdrücke  $\frac{bc^2}{a}$  proportional, wie in diesem Falle die Erfahrung lehrt. In den mittleren Fällen wird die in Rede stehende Formel wahrscheinlich sehr nahe mit dem Naturgesetze übereinstimmen, vorausgesetzt, dass es gelänge, die Constanten  $\frac{1}{D^2}$  und  $\frac{36}{E^2}$  so zu bestimmen, dass sie den Resultaten entsprechen, welche man durch Versuche auf directem Wege erhält.

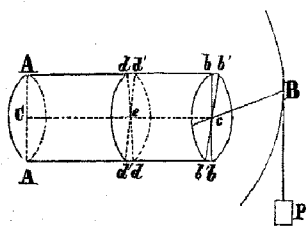
§ 155. Untersucht man statt eines mit dem einen Ende eingemauerten Stabes, ein Prisma, welches horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wird, so lassen sich die obigen Betrachtungen auch hier anwenden, wenn man mit  $a$  die Hälfte der Entfernung der Stützen von einander und mit  $P$  die Hälfte des in der Mitte des Stabes wirkenden Gewichtes bezeichnet.

### Fünftes Kapitel.

#### Widerstand eines prismatischen Körpers gegen die Torsion.

§ 156. Um die Theorie dieser Art des Widerstandes aufzustellen, wird man sich ähnlicher Betrachtungen bedienen können, wie bei der Theorie des Widerstandes gegen Biegung.

Es sei Fig. 18 ein prismatischer, mit dem einen Ende



horizontal eingemauerter Stab, an dessen anderem Ende eine Kraft  $P$  mit dem Hebelarm  $Bc$  wirkt, welche den Stab um die Axe  $Cc$  zu drehen sucht. Man nehme an, dass durch die Wirkung der Torsion ein Durchmesser  $bb'$  des Endquerschnitts, auf welchen die Kraft  $P$  zunächst

einwirkt, nach  $\delta\delta'$  gekommen sei; der zu  $bb$  parallele Durchmesser  $AA$  des eingemauerten Endes wird keine Verdrehung erlitten haben, und man wird einsehen, dass alle Durchmesser der zwischenliegenden Querschnitte, wie z. B.  $dd$ , eine Verdrehung erlitten haben werden, welche ihrer Entfernung von dem eingemauerten Ende proportional ist. Durch diese Verdrehungen werden die Molecüle, welche in zwei auf einander folgenden Querschnitten vor der Torsion sich berührten, um eine gewisse Grösse von einander entfernt worden sein, die man proportional annehmen kann: 1) der Entfernung dieser Molecüle von der Axe  $Cc$  und 2) der Differenz der von jedem Halbmesser in den zwei auf einander folgenden Querschnitten durchlaufenen Winkel, welche Differenz im geraden Verhältniss zu dem Winkel  $bc\delta'$  und im umgekehrten Verhältniss zu der Länge  $Cc$  des Stabes steht. Setzt man die Torsion als sehr gering voraus, so kann man die Widerstände, welche durch diese Verdrehungen hervorgerufen werden, den Verdrehungen selbst proportional annehmen. Uebrigens muss das Moment des Widerstandes in jedem Querschnitte des Stabes dem Moment des Gewichtes  $P$  gleich sein. Man betrachte jetzt einen beliebigen Querschnitt und nenne

- $a$  die Länge des Stabes von dem festen Querschnitt  $AA$  bis zu dem Querschnitt  $bb$ , in welchem die Kraft  $P$  wirkt;
- $\theta$  den, als sehr klein vorausgesetzten, Winkel  $bc\delta'$ , welchen die Durchmesser dieses Endquerschnitts durchlaufen;
- $r$  die Entfernung eines beliebigen Punktes in einem Querschnitt von dem Mittelpunkte  $e$  dieses Schnitts;
- $\varphi$  den Winkel, welchen die Linie  $r$  mit dem Durchmesser dieses Querschnitts bildet;
- $r = f(\varphi)$  die Gleichung der Curve, welche den Umfang des Schnittes bildet;
- $R$  den Hebelarm  $Bc$ , an welchem das Gewicht  $P$  wirkt um die Torsion hervorzubringen;
- $G$  einen constanten, jedem Materiale eigenthümlichen Coefficienten für den Widerstand gegen die Torsion.



Da der Inhalt des Flächenelementes an dem Endpunkte des Halbmessers  $r$  in dem in Rede stehenden Querschnitt gleich  $r d\varphi dr$  oder  $d\varphi \cdot r dr$  ist, so hat man

$$G \cdot \frac{\theta}{a} d\varphi \cdot r^2 dr$$

als Ausdruck für den Widerstand dieses Elementes gegen die Torsion; und um das Gleichgewicht zwischen der Summe der Momente aller ähnlichen Widerstände und dem Momente der Kraft  $P$  auszudrücken hat man die Gleichung

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} r^3 dr,$$

oder

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot [f(\varphi)]^4 d\varphi.$$

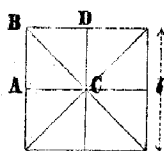
§ 157. Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $r$ , so hat man  $f(\varphi) = r$ , und die vorstehende Formel giebt

$$PR = \frac{G\theta}{a} \cdot \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi = G \cdot \frac{r^4 \pi}{2a} \cdot \theta,$$

woraus

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{2aR}{r^4 \pi}.$$

Fig. 19.



§ 158. Bei einem quadratischen Querschnitt (Fig. 19), dessen Seite gleich  $b$  ist, hat man für eins der acht gleichen Dreiecke den Ausdruck für den Widerstand gegen die Torsion zu suchen. Die Gleichung der Geraden  $AB$  ist  $r = \frac{b}{2\cos\varphi}$ . Es ist übrigens

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{1}{3} \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

und daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{4}{3}.$$

Das Widerstandsmoment (Torsionsmoment) des Dreiecks  $ABC$  ist also

$$\frac{G\theta}{a} \cdot \frac{b^4}{4 \cdot 16} \cdot \frac{4}{3},$$

und daher das Torsionsmoment des Quadrats

$$PR = G \cdot \frac{b^4}{6a} \cdot \theta,$$

woraus

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{6aR}{b^4}.$$

Es verhält sich demnach der Widerstand des Quadrats zu dem des eingeschriebenen Kreises wie  $1 : \frac{3\pi}{16}$ .

§ 159. Für den Fall eines rechteckigen Querschnitts haben Untersuchungen, die sich auf Betrachtungen stützen, welche hier nicht wiedergegeben werden können, gelehrt, dass die obige Hypothese, nach welcher der Widerstand jedes Flächenelementes des Querschnitts der Entfernung dieses Elementes von dem Mittelpunkt des Schnitts proportional angenommen wurde, nicht genau mit der Wahrheit übereinstimmt. Man muss sich für diesen Fall einer genaueren Methode bedienen, nach welcher man für das Torsionsmoment eines homogenen Stabes mit rechteckigem Querschnitt, dessen Breite und Höhe respective durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, den Ausdruck <sup>1)</sup>

1) Diesen Ausdruck giebt Cauchy in den Exercices de mathématiques, 4<sup>e</sup> année, pag. 59.

Die Differentialgleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung fester Körper ausdrücken und die Grundlage in Rede stehenden Untersuchungen abgeben, hat, für den Fall eines homogenen Körpers, zuerst der Verfasser gegeben in einer Abhandlung, die der Akademie der Wissenschaften zu Paris im Jahre 1821 vorgelegt und in dem Bande VII ihrer Memoiren abgedruckt wurde. Diese Materie ist später der Gegenstand sehr ausgedehnter Untersuchungen geworden, die man hauptsächlich in einer Abhandlung von Lamé und Clapeyron findet, die der Akademie der Wissenschaften im Jahre 1828 vorgelegt und im Journal für Mathematik von Crelle (Bd. 7) abgedruckt wurde; man findet diese Untersuchungen ferner in einer Abhandlung von Poisson, abgedruckt in dem Bande VIII der Memoiren der Akademie, und in den Exercices de mathématiques von Cauchy.

Wir müssen bemerken, dass alle in den vorhergehenden Kapiteln gegebenen Formeln durchaus mit den Resultaten übereinstimmen, die man durch diese neuen Untersuchungen erhalten hat. Sind die Körper homogen und kann man den Druck der atmosphärischen Luft in Bezug auf die übrige Belastung vernachlässigen, so wird man für die Constante, welche im § 77 durch  $E$  bezeichnet wurde, stets denselben numerischen Werth erhalten, man mag diese nun durch directe Versuche zu bestimmen suchen, indem man einen prismatischen Stab in der Richtung seiner Länge ausdehnt (in

$$PR = G \cdot \frac{\delta^3 c^3 \theta}{3(b^2 + c^2)a}$$

findet, woraus

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{3(b^2 + c^2)aR}{\delta^3 c^3}$$

§ 160. Aus den Resultaten in den vorhergehenden Paragraphen lässt sich der Torsionswinkel eines prismatischen Stabes für eine gegebene Kraft berechnen, wenn der Werth der Constante  $G$  aus vorher angestellten Versuchen ermittelt worden ist. Bei diesen Versuchen hat man den Torsionswinkel eines Körpers, das Gewicht, welches die Torsion hervorbringt, und den Hebelarm dieses Gewichtes zu gleicher Zeit zu beobachten. Für  $G$  findet man aus den Formeln in § 156 u. figde.<sup>1)</sup> bei einem kreisförmigen Querschnitt des Stabes

$$G = P \cdot \frac{2aR}{r^4 \pi \theta};$$

bei einem quadratischen Querschnitt

$$G = P \cdot \frac{baR}{\delta^3 \theta};$$

und bei einem rechteckigen Querschnitt

$$G = P \cdot \frac{3(b^2 + c^2)aR}{\delta^3 c^3 \theta}.$$

welchem Falle man  $E = \frac{P\delta}{\Omega}$  hat, wenn  $P$  das ausdehnende Gewicht,  $\Omega$

den Inhalt der Querschnittsfläche und  $\delta$  die Ausdehnung der Längeneinheit bezeichnen); oder man mag die Constante  $E$  nach § 91 und folgd. zu bestimmen suchen, indem man einen Stab mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt sich biegen lässt.

Was die Constante  $G$  anlangt, welche in den Formeln über die Torsion vorkommt, so ist sie mit der Constante  $E$  durch die Beziehung  $G = \frac{2}{5} \cdot E$  verbunden, wofern man die Körper als homogen voraussetzen und die Wirkung des atmosphärischen Druckes vernachlässigen darf.

- 1) Es ist ohne Zweifel überflüssig, zu bemerken, dass man in allen diesen Formeln für  $\theta$  die Zahl zu setzen hat, welche für den Halbmesser = 1 die Länge des Bogens angiebt, welche dem Torsionswinkel entspricht. Ist daher der in Rede stehende Winkel in Graden angegeben, so ist die Zahl der Grade mit  $\frac{\pi}{180}$  oder mit  $\frac{\pi}{360}$  zu multipliciren, je nach dem es Sexage- mal- oder Centesimalgrade sind.

# Widerstand des Schmiede Eisens gegen die Torsion.

§ 161. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der von Duleau über die Torsionsfestigkeit des Schmiede Eisens angestellten Versuche.<sup>2)</sup> Das Gewicht, welches die Torsion hervorbringt, ist 10 Kilogramm und es wirkt an einem Hebelarm von 0,32 Meter.

Bezeichnung des Eisens.	Länge der Stäbe	Dimensionen des Querschnitts	Torsionswinkel	Zahlen, die dem Widerstande proportional sind
	Meter	Met. Durchm.	Sexag. Grd.	
Rundeisen von Périgord	2,81	0,0142	13,4	12,57
Desgl. . . . .	3,17	0,0197	6	11,47
Englisches Rundeisen mit der Marke Dowlais	2,40	0,0198	4	12,41
Rundeisen aus dem Departement de l'Arriège	3,57	0,0215	4,8	11,16
Desgl. . . . .	2,89	0,0215	4,5	9,6
Rundeisen aus Périgord	3,19	0,0221	3,32	11,99
Desgl. . . . .	2,89	0,0230	3	10,96
Englisches Rundeisen	3,24	0,0235	2,34	14,48
Rundeisen von Périgord	2,94	0,0265	1,82	10,48
Desgl. . . . .	3,35	0,0267	1,87	11,23
Desgl. . . . .	2,92	0,0357	0,625	9,19
Rundeisen aus dem Departement de l'Arriège	2,77	0,0268	1,65	10,39
		Seiten		
Englisches Quadrateisen mit der Marke C 2	4,12	0,0200	6,5	17,46
Desgl. . . . .	2,52	0,0200	4	17,36
Rundeisen von Périgord	2,52	0,0204	3,08	15,27
Desgl. . . . .	3,39	0,0326	0,62	15,40
Englisches Flacheisen	2,91	0,0340	11,4	
		0,0086		
		0,0340		
Desgl. . . . .	1,55	0,0086	5,62	
		0,0340		
Flacheisen von Périgord	2,91	0,0105	7,2	
		0,0340		
Englisches Flacheisen der Marke B	1,45	0,0678	0,85	
		0,0147		

1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 49.

Um aus jedem Versuche den Werth der Constante  $G$  zu erhalten, hat man die Zahlen der letzten Columnne mit 583 600 000 bei den Versuchen mit Rundeisen, und mit 343 770 000 bei den Versuchen mit Quadrateisen zu multipliciren, wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden. Das Mittel aus den Zahlen der letzten Columnne bei den Versuchen mit Rundeisen ist 11,33 woraus für  $G$  folgt

$$G = 6\,612\,300\,000 \text{ Kil.}$$

Das Mittel aus den Zahlen der letzten Columnne bei den Versuchen mit den Quadrateisen ist 16,03 woraus für  $G$  folgt

$$G = 5\,510\,600\,000 \text{ Kil.}$$

Die Verschiedenheit dieser beiden Resultate hat sicher zum grossen Theile in der abweichenden Güte des Eisens ihren Grund. <sup>1)</sup>

### Widerstand verschiedener Materialien gegen die Torsion.

§ 162. Versuche von Savart über den Widerstand verschiedener Materialien gegen die Torsion. <sup>2)</sup> Der Hebelarm der Kräfte, welche die Torsion bewirkten und deren Werth unten aufgeführt ist, war stets 0,111 Meter. Der Kreisbogen, auf welchem die Torsionswinkel gemessen wurden, war in Centesimalgrade eingetheilt, so dass der Bogen, welcher zu einem Torsionswinkel von  $1^0$  gehört, gleich  $\frac{3,1416}{200}$  ist.

Da aus den Versuchen hervorging: 1) dass die Torsionsbogen (innerhalb solcher Grenzen, dass der Stab seine ursprüngliche Gestalt wieder annahm, sobald

1) Nach dem, was am Ende der Note zu § 159 gesagt ist, müsste, wenn man nach § 102 für die Constante  $E$  den Werth 20 000 000 000 Kil. annimmt, der Werth der Constante  $G$   $\frac{2}{5}$  dieser Zahl, oder 8 000 000 000 Kil., sein. Dieses Resultat stützt sich übrigens auf die Voraussetzung, dass das Eisen homogen sei, d. h. in jedem Sinne einen gleichen Widerstand leiste. Nach den Versuchen von Duleau über die Torsion müsste man der Constante  $G$  einen geringeren Werth beilegen: wir wollen nicht entscheiden, ob für diesen Mangel an Uebereinstimmung der Grund in der qualitativen Verschiedenheit des Eisens, in der fehlenden Gleichartigkeit desselben, oder in der Beobachtungsweise des Experimentators zu suchen ist.

2) Annales de chimie et de physique, août 1829.

die drehenden Kräfte aufhörten, auf ihn einzuwirken) genau den drehenden Kräften proportional waren; und 2) dass bei gleichen Kräften die Torsionsbogen genau der Länge der Stäbe proportional waren; so sind hier nur die mittleren Resultate aus den Beobachtungen aufgeführt, welche dazu dienen können, diese beiden Sätze zu erweisen.

Bezeichnung des Materials.	Querschnitt	Länge der Stäbe	Gewicht, welches eine Torsion von 10 her- vorbringt
	Millimeter	Meter	Kilogr.
Gyps . . . . .	Rechteck, Seit. 27,1 u. 6,98 17,21 u. 5,19	0,3743	0,120 0,0303
Eichenholz . . .	Rechteck, Seit. 46,63 u. 10,59 23,32 u. 5,295 96 u. 5,37 96 u. 2,54 96 u. 1,7	0,5235  0,5764	0,355 0,022 0,105 0,0114 0,00393
Gussstahl z. Draht ausgezogen . .	Quadrat, Seite 5,72 Rechteck, Seite 15,6 u. 5,6	1,0000 1,4000	0,1584 0,2752
Kupfer, gewalztes Blech . . . . .	Rechteck, 51,87 u. 1,17	0,2194	0,098
Desgl. Draht . .	Kreis, Durchmesser 2,4 4,58 6,91 9,04 Quadrat, Seite 4,68 5,66 9,18 5,66 Gleichseitiges Dreieck, Seite 4,35 7,8 8,8	0,694    0,649   0,6567 0,6383	0,00297 0,04117 0,207 0,580 0,0595 0,1275 0,880 0,126 0,00835 0,086 0,1415
Messingdraht . .	Kreis, Durchmesser 6,72 Rechteck, Seit. 3,56 u. 0,2 Quadrat . . . Seite 5,72	0,649 0,997 1,302	0,160 0,0555 0,101
Glas . . . . .	Rechteck, Seit. 54,4 u. 1,516 25,46 u. 1,516	0,63 0,315 0,315	0,07 0,140 0,034

Der erste Versuch mit dem Stahl giebt für die Constante  $G$  den Werth 6 273 400 000 Kilogramm, und der zweite den Werth  $G = 5 490 000 000$  Kil. Diese

Resultate bestätigen übrigens die Genauigkeit der Formeln, welche in § 157 u. flgde. gegeben sind.

§ 163. Einige Versuche über die Torsion, welche Bevan veröffentlicht hat, findet man noch in den Philosophical Transactions, 1829, Theil I.

### Sechstes Kapitel.

#### Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch durch die Torsion.

§ 164. Die Torsion eines Stabes muss den Bruch desselben nach sich ziehen, wenn die Molecüle, welche am weitesten von einander entfernt worden sind, dies nicht noch weiter werden können, ohne ihren Zusammenhang zu verlieren. Nimmt man nun an, dass bis zu dem Augenblicke, in welchem der Bruch erfolgt, die Widerstände der Elemente des Stabes in denjenigen Beziehungen zu einander stehen, welche in § 156 angenommen wurden, so lässt sich für das Moment des Widerstandes gegen den Bruch der folgende Ausdruck ableiten. Behält man die Benennungen des § 156 bei, und nennt man ausserdem

$r'$  den grössten Werth für  $r$  in dem Querschnitte des Stabes;

$T$  ein Gewicht, welches für die Flächeneinheit den Widerstand gegen die Torsion im Augenblicke des Bruchs ausdrückt;

so ist  $\frac{Tr}{r}$  der Widerstand gegen die Torsion im Augenblicke des Bruches für die Punkte eines Querschnitts, welche in der Entfernung  $r$  von der Axe des Stabes liegen. Man hat also

$$\frac{T}{r} r \cdot d\varphi \cdot r^2 dr$$

als Widerstand eines Flächenelements des Querschnitts und daher für das Gleichgewicht die Gleichung

$$PR = \frac{T}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} r^3 dr = \frac{T}{r} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4 d\varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für  $PR$  mit demjenigen in § 156, so erkennt man, dass die Werthe des Bruchmomentes sich von den Werthen, welche wir in § 157 u. flgde. fanden, werden ableiten lassen, indem man  $T$  für  $\frac{G\theta}{a}$  schreibt und mit  $r'$  dividirt.

§ 165. Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, so findet man den Werth des Bruchmomentes zu

$$PR = T \frac{r^3 \pi}{2}.$$

§ 166. Ist der Querschnitt ein Quadrat mit der Seite  $b$ , so ist  $r' = \frac{b}{\sqrt{2}}$ , und daher das Bruchmoment

$$PR = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

Das Bruchmoment des Quadrates verhält sich zu dem des eingeschriebenen Kreises, wie  $1 : \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$ .

§ 167. Was den Fall eines rechteckigen Querschnitts anlangt, so folgt aus den Untersuchungen, welche in § 159 erwähnt wurden, dass, wenn man mit  $b$  und  $c$  die Seiten des Querschnitts bezeichnet, man für das Bruchmoment den Ausdruck

$$PR = T \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$$

erhält. 1)

1) Diesen Ausdruck hat Cauchy nicht gegeben; er lässt sich indess ableiten mit Hilfe derselben Analyse, deren er sich bediente, um den Fall zu behandeln, in welchem ein Stab mit rechteckigem Querschnitt eine Torsion erleidet. Die Formeln, welche hier für den Fall, in welchem der Querschnitt kreisförmig oder quadratisch ist, gegeben wurden, sind durchaus genau.

Wir sehen in allen Fällen den Bruch als dadurch bestimmt an, dass ein Längenelement des Körpers in einem grössern Grade ausgedehnt oder zusammengedrückt worden ist, als es die Natur des Körpers leidet und zufolge dessen ein Trennen oder ein Zerquetschen der Theile eintritt. Hiernach muss, wenn man homogene und in jedem Sinne gleichen Widerstand leistende Körper voraussetzt, nothwendig ein bestimmtes Verhältniss zwischen den beiden Constanten  $T$  und  $R$  (in § 113 u. flgde.) bestehen;

dieses Verhältniss ist  $T = \frac{4R}{5}$ . Doch darf man nicht erwarten, dass

Verhältnisse dieser Art stets durch die Versuche bestätigt werden, liege dies nun an der fehlenden Gleichartigkeit der Körper, oder daran, dass im Augenblicke des Bruchs die innern Widerstände sich nicht so verhalten, wie es bei den analytischen Auflösungen vorausgesetzt wurde, welche Auflösungen sich wesentlich auf die Annahme stützen, dass die Gestalt der Körper nur sehr wenig verändert worden sei.



§ 168. Die Länge des Stabes hat durchaus keinen Einfluss auf den Widerstand gegen den Bruch durch die Torsion; je länger der Stab ist, desto grösser wird nur der Torsionswinkel im Augenblicke des Bruchs geworden sein. Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich die Kräfte berechnen, deren man bedarf, um einen prismatischen Stab durch Torsion zu zerbrechen, wenn man den Werth der Constante  $T$  aus früheren Beobachtungen bestimmt hat. Dieser Werth lässt sich aus den gegebenen Grössen eines jeden Versuches ableiten, und zwar, wenn der Querschnitt ein Kreis ist, nach der Formel

$$T = P \cdot \frac{2R}{r^3 \pi},$$

wobei  $P$  das zerdrehende Gewicht,  $R$  den Hebelarm dieses Gewichtes und  $r$  den Halbmesser des zerdrehten Cylinders bezeichnen; ist hingegen der Querschnitt ein Quadrat oder ein Rechteck, so sind die Formeln

$$T = P \frac{6R}{b^3 \sqrt{2}}, \text{ oder } T = P \frac{3R \sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 c^2},$$

anzuwenden, wobei  $b$  und  $c$  die Seiten des Querschnitts bezeichnen.

Es sollen jetzt die Erfahrungsergebnisse aufgeführt werden, aus denen sich der Werth der Constante  $T$  ableiten lässt.

### Widerstand des Gusseisens gegen den Bruch durch die Torsion.

§ 169. Nach einem Resultate, welches Banks <sup>1)</sup> als das Mittel aus mehreren Versuchen angiebt, wird ein gusseiserner Stab von 1 engl. Zoll ins Gevierte durch ein Gewicht von 631 engl. Pfund zerdreht, wenn dieses an einem Hebelarm von 2 engl. Fuss wirkt.

Aus diesem Resultate findet man nach der zweiten Formel in dem vorhergehenden Paragraphen den Werth der Constante  $T$  zu

$$T = 45\,060\,000 \text{ Kil.},$$

wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden.

<sup>1)</sup> A Treatise on the power of machines.

Bibl. d. TU.  
Braunschweig

§ 170. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der von Dunlop <sup>1)</sup> in Glasgow mit cylindrischen Stäben angestellten Versuche. Die Länge des Hebelarmes, an welchem die Gewichte wirkten, betrug 14 Fuss 2 Zoll. (Engl. Masse.)

Länge der Stäbe	Durchmesser der Stäbe	Zerdrehendes Gewicht
Zoll	Zoll	Pfund
2 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	2	250
2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	384
3	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	408
3	2 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	700
4	3 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	1170
5	3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	1240
5	3 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	1662
5	4	1938
6	4 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	2158

Den Werth der Constante  $T$  findet man aus diesen Versuchen zu

$$T = 20\,305\,000 \text{ Kil.}$$

§ 171. In der folgenden Tabelle findet man die Resultate der von G. Rennie <sup>2)</sup> über die Torsion des Gusseisens und verschiedener anderer Metalle angestellten Versuche. Die Länge des Hebelarmes, an welchem die Gewichte wirkten, betrug 2 Fuss. (Engl. Masse.)

Bezeichnung d. Materials.	Länge der Stäbe	Seite des quadrat. Querschnitts	Zerdrehendes Gewicht
	Zoll	Zoll	Pfd. Unzen
Gusseisen, horizontal gegoss.		<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	9 15
desgl., vertical gegossen		<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	10 10
desgl., horizontal gegossen	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	7 3
desgl., desgl.	<sup>3</sup> / <sub>4</sub>	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	8 1
desgl., desgl.	1	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	8 8
desgl., vertical gegossen	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	10 1
desgl., desgl.	<sup>3</sup> / <sub>4</sub>	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	8 9
desgl., desgl.	1	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	8 5
desgl., desgl.	6	<sup>1</sup> / <sub>4</sub>	9 12

<sup>1)</sup> Dr. Thomson's Annals of philosophy, Theil XIII, pag. 200.

<sup>2)</sup> Philosophical Transactions, 1818; oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

Bezeichnung d. Materials.	Länge der Stäbe	Seite des quadratisch. Quer- schnitts	Zerdrehendes Gewicht	
	Zoll	Zoll	Pfd.	Unzen
Gusseisen, horizontal gegoss.	10	$\frac{1}{2}$	93	12
desgl., desgl.		$\frac{1}{2}$	74	0
desgl., desgl.		$\frac{1}{2}$	52	0
Stahl . . . . .		$\frac{1}{4}$	17	1
Schmiedeisen, englisches . .		$\frac{1}{4}$	10	2
desgl., schwedisches . . .		$\frac{1}{4}$	9	8
Kanonenmetall, hartes . . .		$\frac{1}{4}$	5	0
Gelbguss, (Messing), feines .		$\frac{1}{4}$	4	11
Kupfer, gegossen . . . . .		$\frac{1}{4}$	4	5
Zinn . . . . .		$\frac{1}{4}$	1	7
Blei . . . . .		$\frac{1}{4}$	1	0

Aus den Versuchen mit Gusseisen folgt im Mittel für die Constante  $T$  der Werth

$$T = 41\,360\,000 \text{ Kil.}$$

§ 172. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Versuche, welche Bramah mit gusseisernen Stäben quadratischen Querschnitts anstellte. Diese Stäbe waren an dem einen Ende befestigt und an dem andern Ende wirkten die zerdrehenden Gewichte an einem Hebelarm, dessen Länge 3 Fuss betrug <sup>1)</sup>. (Englische Masse.)

Bezeichnung d. Materials.	Länge der Stäbe	Seite des quadratisch. Quer- schnitts	Zerdrehendes Gewicht
	Fuss	Zoll	Pfund
1) Gusseisen mit $\frac{1}{16}$ Kupfer	1	$1\frac{1}{16}$	215
2) desgl. . . . .	2	$1\frac{1}{16}$	213
3) Legirung aus gleichen Theilen von altem Eisen von Adelphi und von Al- freton . . . . .	1	$1\frac{1}{16}$	330
4) desgl. . . . .	1	$1\frac{1}{16}$	310
5) desgl. . . . .	2	$1\frac{1}{16}$	280
6) Gusseisen . . . . .	1	1	238
7) desgl. . . . .	2	1	218

<sup>1)</sup> A practical essay on the strength of cast iron, pag. 97.

Aus den Versuchen 3, 4, 6 und 7 erhält man für die Constante  $T$  im Mittel

$$T = 25\,860\,000 \text{ Kil.}$$

---

### Siebentes Kapitel.

#### **Maximum des Widerstandes, welchen man in der Praxis von den Materialien mit Sicherheit erwarten darf.**

§ 173. Aus den Untersuchungen in den vorhergehenden Paragraphen kennt man die Gesetze, nach welchen die Biegung und der Bruch der Materialien erfolgen, d. h. den Grad der Krümmung und der Torsion, welchen ein prismatischer Stab durch die Wirkung einer gegebenen Kraft erleidet, so wie die Kraft, deren man bedarf, um den Stab zu zerbrechen. Dies genügt indess noch nicht, um die Dimensionen der Theile einer Construction bestimmen zu können; denn man muss in der That versichert sein können, dass die Kräfte, welche auf die einzelnen Theile wirken, nicht allein nicht unmittelbar den Bruch derselben veranlassen, sondern dass selbst die fortwährende oder häufig wiederkehrende Wirkung dieser Kräfte in den Theilen der Construction keine solche nachtheilige Veränderungen hervorbringen wird, welche mit der Zeit zunehmen und die Zerstörung des Ganzen herbeiführen können. Man muss, wo möglich, die Construction so anlegen, dass keine anderen Ursachen der Vergänglichkeit übrig bleiben, als diejenigen, welche von den chemischen Veränderungen der Materialien abhängen, und die man durch conservirende Mittel fern zu halten suchen muss. Die in Rede stehenden Rechnungen werden freilich keine so grosse Genauigkeit darbieten können, als diejenigen, mit welchen wir uns beschäftigt haben.

Wir werden jetzt die wichtigsten Erfahrungsergebnisse über diesen Gegenstand auführen.

## Widerstand der Steine gegen Zerdrücken.

§ 174. Steine in kleinen Würfeln fangen an, sich zu spalten, bei Belastungen, welche etwas mehr als die Hälfte derjenigen betragen, die in den obigen Tabellen als die zerdrückenden Gewichte angegeben sind. Zum Zerdrücken reicht übrigens schon eine geringere Kraft hin, wenn diese Kraft lange Zeit hindurch wirkt <sup>1)</sup> Es folgen hier die Angaben von Rondelet <sup>2)</sup> über den Druck, welchen eine Fläche von 25 Quadratcentimeter bei denjenigen Bauwerken erleidet, die für die kühnsten gehalten werden.

Pfeiler (der Kuppel) der Peterskirche in Rom	409 Kil.
Pfeiler der Paulskirche in London . . . .	484 "
Pfeiler des Invalidenhauses in Paris . . . .	369 "
Pfeiler des Pantheons (Genovefakirche) in Paris	736 "
Säulen der Paulskirche, <i>extra muros</i> in Rom	494 "
Pfeiler des Thurms der Kirche zu Saint-Méry	735 "
Säulen der Allerheiligenkirche in Angers <sup>3)</sup> .	1107 "

§ 175. Nach Perronet <sup>4)</sup> sind die oberen Schichten der Pfeiler der Neuilly-Brücke mit einem Gewichte von ungefähr 20 000 Pfund für den Quadratfuss belastet, und nach den Versuchen von Soufflot müsste der Druck 240 000 Pfund betragen, um die Steine zu zerdrücken.

§ 176. Nach Telford und Nimmo <sup>5)</sup> tragen Bausteine 250 000 bis 850 000 Pfund, und Ziegelsteine 300 000 Pfund für den Quadratfuss. (Engl. Masse.) In der Praxis belastet man sie mit  $\frac{1}{6}$  dieses Gewichts und darüber. Der Pfeiler in der Mitte des Kapitelsaals zu Elgin ist mit mehr als 40 000 Pfund für den Quadratfuss belastet und hat ausserdem mehrere Jahrhunderte hindurch einen schweren, mit Blei gedeckten Dachstuhl getragen. Die Gewölbsteine eines Bogens können ohne Gefahr einen Druck von 50 000 Pfund für den Quadratfuss ertragen. (610 Kil. für eine Fläche von 25 Quadratcentimeter.)

1) Rondelet, Art de bâtir, tome IV., pag. 151.

2) Art de bâtir, tome IV. pag. 133.

3) Diese Säulen sind aus sehr hartem Kalkstein von röthlich grauer Farbe und muschligem Bruch aufgeführt. Ein Würfel, dessen Kante gleich 5 Centimeter ist, wird durch ein Gewicht von 10 940 Kil. zerdrückt.

4) Mémoire sur la réduction de l'épaisseur des piles in den Mémoires de l'Académie des sciences, 1777.

5) The Edinburgh Cyclopaedia, Art. Bridge.

§ 177. Die Pfeiler, welche die Ketten der Hängebrücke zu Argentat tragen, bestehen aus Mauerwerk von Schiefersteinen von mittlerer Härte. Bei der Prüfung der Brücke wurden sie mit 4,5 Kil. für den Quadratcentimeter belastet; die bleibende Belastung beträgt 3,78 Kil. <sup>1)</sup>.

§ 178. Nach den Erfahrungen, welche man bei ausgeführten Werken gemacht hat, darf man die Bausteine mit keinem grösseren Gewichte belasten, als  $\frac{1}{10}$  desjenigen, wodurch kleine Würfel bei angestellten Versuchen zerdrückt werden. Selbst diese Annahme würde keine gänzliche Sicherheit gewähren, wenn die Steine nicht so behauen und gelagert würden, dass sie auf der ganzen Oberfläche der Fugen einen sehr gleichmässigen Druck erfahren, oder, wenn sie, je nach ihrer Art, geneigt wären, sich zu spalten und in Trümmer zu zer springen. In diesem letzteren Falle müsste der Druck geringer sein.

Die Belastung muss ebenfalls geringer sein, wenn es sich um Säulen oder Pfeiler handelt, deren Höhe im Verhältniss zu den Dimensionen des Querschnitts bedeutend ist, und die leicht eine etwas schiefe Stellung annehmen können, in Folge dessen die Last auf die oberen Kanten wirkt. Man sehe hierüber die in § 8 aufgeführten Versuche.

### **Widerstand der Hölzer gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung.**

§ 179. Nach den in den §§ 12 und 13 aufgeführten Erfahrungsergebnissen ist der Widerstand der Fasern der Hölzer gegen Zerdrücken ganz verschieden von dem Widerstande derselben gegen Ausdehnung; indem der erstere nicht die Hälfte des letzteren beträgt. Dieser Umstand steht in Uebereinstimmung mit dem in § 142 Gesagten. Bei Eichen- oder Tannenholz (Fichtenholz) kann man den Widerstand gegen Zerdrücken ungefähr zu 4 Kil. für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts annehmen; der Widerstand gegen Ausdehnung beträgt ungefähr 8 Kil. In der Praxis darf jedoch der Druck nicht über  $\frac{1}{10}$  desjenigen betragen, durch welchen die

<sup>1)</sup> Description du pont suspendu d'Argentat par Mr. Vicat, pag. 9.

Materialien zerdrückt werden. Nach dieser Regel lassen sich die Dimensionen der Grundpfähle, so wie die Entfernung derselben von einander berechnen: sie stimmt mit den Angaben überein, welche Perronet <sup>1)</sup>, auf Erfahrungen gestützt, gemacht hat.

§ 180. Bei der von Emmery ausgeführten Seinebrücke zu Ivry, mit hölzernen Bogen auf Steinpfeilern, so wie bei den vom Verfasser ausgeführten Brücken derselben Art zu Asnières und Argenteuil tragen die gebogenen Stücke, welche den Haupttheil der Gespärre bilden, allein durch die Wirkung des eigenen Gewichtes der Construction, an den Anfängen einen Druck von 0,1 Kil. für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts. Da bekannt ist, dass diese Brücken in der Regel sich schon zu senken anfangen, bevor die Holzstücke gänzlich verdorben sind, so wird man die in Rede stehenden Stücke keiner grösseren Belastung aussetzen dürfen.

Bei einer zufälligen Vermehrung der Belastung um 200 Kil. für den Quadratmeter der Fläche der Brückenbahn, nimmt der eben angegebene Druck um die Hälfte zu.

**Widerstand der Hölzer gegen Biegung, durch eine rechtwinklig gegen die Längenaxe gerichtete Kraft.**

§ 181. Der Maximalwerth der zulässigen Belastung eines Stabes muss hier bestimmt werden durch die Bedingung, dass die Biegung, welche die Belastung verursacht, so wie die daher entstehenden Ausdehnungen und Verkürzungen der Längenfaser nicht im Stande sein dürfen, die physische Beschaffenheit der Hölzer nachtheilig zu verändern; es darf demnach die Krümmung des Stabes nicht mit der Zeit zunehmen, und nach der Entlastung muss der Stab seine natürliche Gestalt wieder gewinnen. Spezielle Versuche, nach denen sich die in Rede stehende Grenze für die Hölzer mit Sicherheit bestimmen liesse, giebt es nicht.

Nach den in § 134 u. folg. aufgeführten Resultaten hat man für Eichenholz den Werth der Constanten  $R$  im Mittel zu  $R = 6\,000\,000$  Kil. Die Erfahrung an ausgeführten Bauwerken lehrt, dass bei den Hölzern die Belastung nicht über  $\frac{1}{10}$  derjenigen betragen darf, welche

1) Oeuvres de Perronet, Mémoire sur les pieux et pilotis. Pfähle von 0,25 und 0,32 Meter im Durchmesser dürfen mit nicht mehr als 25 000 und 50 000 Kil. belastet werden.

den Bruch verursachen würde <sup>1)</sup> Bezeichnet man nun mit  $R$  den grössten Werth der zulässigen Belastung der Längensfasern eines Stabes, für die Flächeneinheit, so erhält man für Eichenholz  $R = 600\,000$  Kil. In jedem einzelnen Falle wird man das Maximum der für ein Stück zulässigen Belastung finden, indem man  $R$  für  $R$  in die Formeln in § 113 u. folgd. einsetzt.

Nimmt man, in Uebereinstimmung mit den in § 95 u. folg. aufgeführten Versuchen, den Werth der Constante  $E$  für Eichenholz zu  $E = 1\,000\,000\,000$  Kil. an, so erhält man für eine Belastung von  $600\,000$  Kil. eine Ausdehnung oder Verkürzung der Längensfasern  $0,0006$ . Diese Längenveränderung muss als die grösste angesehen werden, welche man ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze hervorbringen kann. Nach Tredgold <sup>2)</sup> ist für Eichenholz eine Belastung von  $3960$  Pfund engl. für den engl. Quadratzoll ( $2\,780\,000$  Kil. für den Quadratmeter) und eine Ausdehnung um  $\frac{1}{430} = 0,0023$  noch zulässig; doch scheinen diese Werthe nicht auf Constructionen anwendbar, bei denen grosse Dauerhaftigkeit gefordert wird.

Die Tragfähigkeit des Rothtannen- und Fichtenholzes ist mindestens eben so gross, wie die des Eichenholzes; die des Weisstannenholzes ist etwas geringer.

### Widerstand des Schmiede Eisens gegen Ausdehnung.

§ 182. Aus den im § 38 u. folgd. aufgeführten Versuchen folgt, dass schmiedeiserne Stäbe, welche in ihrer Längenrichtung ausgedehnt werden, durch eine Kraft zerrissen werden, welche im Mittel  $40$  Kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts beträgt. Nach einer aufmerksamen Prüfung der Versuchsergebnisse und nach dem Beispiele ausgeführter Werke ist für diese Stäbe keine grössere bleibende Belastung zulässig, als  $6$  bis  $7$  Kil. für den Quadratmillimeter; besteht die Totalbelastung aus einem bleibenden und einem vorübergehend hinzukommenden Theile, so darf die Totalbelastung nicht über  $8$  bis  $10$  Kil. für den Quadratmillimeter betragen.

1) Rondelet, Art de bâtir, tome IV., pag. 83.

2) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 279 der zweiten Ausgabe.



# **Widerstand des Schmiedeiseus gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längenaxe gerichtete Kraft.**

§ 183. Nimmt man, in Uebereinstimmung mit dem eben Gesagten, die Grenze der Biegung prismatischer Stäbe dadurch bestimmt an, dass die Längenfasern höchstens einen Zug von 6 Kil. für den Quadratmillimeter erleiden, so hat man für Schmiedeisen der Constante  $R'$  den Werth 6 000 000 Kil. beizulegen (s. § 181), und darnach die grössten zulässigen Belastungen vermittelst der Formeln in § 113 u. folgd. zu berechnen, indem man  $R'$  für  $R$  an die Stelle setzt.

Nach § 102 hat man für Schmiedeisen  $E=20000\ 000\ 000$  Kil.; folglich wird eine Belastung von 6 000 000 Kil. in den Fasern eine Längenveränderung um 0,0003 hervorbringen, und diese ist als die grösste anzusehen, welche man noch hervorbringen kann, ohne die Elasticität des Eisens nachtheilig anzugreifen. Der Werth, welchen Duleau als die grösste zulässige Belastung für Schmied-eisen angieht, folgt, indem man ebenfalls die Grenze zu 0,0003 annimmt <sup>1)</sup>. Dieser Bruch entspricht den kleinsten Resultaten, welche der genannte Ingenieur aus seinen Versuchen erhielt, und deren Mittel ungefähr 0,00065 ist. Diese letztere Ausdehnung wird durch eine Kraft von 13 Kil. für den Quadratmillimeter hervorgebracht, d. h. von einem Drittel derjenigen Kraft, durch welche der Stab zerrissen werden würde. Nach Tredgold erträgt das Eisen ohne nachtheilige Veränderung einen Zug von 17 800 engl. Pfund für den engl. Quadratzoll (12,4 Kil. für den Quadratmillimeter) und eine Ausdehnung um  $\frac{1}{1400} = 0,00071$  <sup>2)</sup>.

## **Widerstand des Gusseisens gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung. <sup>3)</sup>**

§ 184. Das Gusseisen leistet dem Zerdrücken einen sehr grossen Widerstand, wenn die Stücke zu kurz sind,

1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 79.

2) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 104 der zweiten Ausgabe.

3) Man sehe auch die Versuche von Hodgkinson im Anhange.

um sich biegen zu können. Nach den in § 18 u. folg. aufgeführten Versuchen beträgt das zerdrückende Gewicht ungefähr 100 Kil. für jeden Quadratmillimeter. Versuche, nach denen man die Grenze der in der Praxis zulässigen Belastungen des Gusseisens mit Sicherheit bestimmen könnte, giebt es nicht; aber es ist sehr wahrscheinlich, dass man bis zu einem Viertel des zerdrückenden Gewichtes hinaufgehen darf.

§. 185. Nach den in § 61 u. folgd. aufgeführten Versuchen beträgt der Widerstand des Gusseisens gegen Ausdehnung 13 bis 14 Kil. für jeden Quadratmillimeter. Dieser Widerstand ist also bedeutend geringer, als der gegen Zerdrücken. In der Praxis sind Belastungen zulässig, welche ebenfalls ein Viertel des eben angegebenen Gewichtes betragen; doch werden auf solche Weise angewandte Gussstücke wenig Sicherheit gewähren, wenn die Construction heftigen Stößen ausgesetzt sein sollte.

### **Widerstand des Gusseisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längsaxe gerichtete Kraft.**

§ 186. Nach den in § 143 u. folg. aufgeführten Versuchen hat man für den Werth der Constante  $R$  bei Gusseisen von guter Qualität im Mittel  $R = 30\,000\,000$  Kil. Man kann Gussstücke mit einem Viertel des Gewichtes belasten, welches den Bruch hervorbringen würde, und also  $R' = 7\,500\,000$  Kil. annehmen. Die grössten zulässigen Belastungen sind dann nach den Formeln in § 113 u. folgd. zu berechnen, indem man  $R'$  für  $R$  an die Stelle setzt.

Nimmt man, in Uebereinstimmung mit den in §§ 109 und 110 aufgeführten Versuchen, für weiches Gusseisen  $E = 11\,000\,000\,000$  Kil., so entspricht einer Kraft von  $7\,500\,000$  Kil. eine Ausdehnung um  $0,00068$  und diese wird hier als die Grenze angesehen, bis zu welcher man gehen darf, ohne das Gusseisen nachtheilig zu ver-

---

1) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 151,

ändern. Nach Tredgold <sup>1)</sup> ist diese Grenze  $\frac{1}{1204} = 0,00083$  und die grösste Kraft, welche das Gusseisen ohne nachtheilige Veränderung ertragen kann, gleich 15 300 engl. Pfund für den engl. Quadratzoll (10,7 Kil. für den Quadratmillimeter).

Alle bisherigen Untersuchungen gelten nur unter der Voraussetzung, dass die auf die Materialien wirkenden Kräfte durch Druck und nicht durch Stoss wirken. Die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchungen über den Widerstand der Materialien gegen den Stoss findet man im Anhang.

Gl  
au

best  
Ges  
dies  
als  
ane  
jede  
Sod  
dere  
schi

Glei

### Zweiter Abschnitt.

**Gleichgewicht und Widerstand der Körper, welche aus adhären den Materien bestehen. Theorie des Erddruckes. Construction der Futtermauern.**

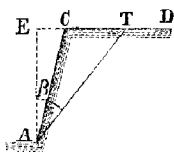
§ 187. Die Körper, welche wir hier betrachten, bestehen aus Erde, Sand oder Mauerwerk. Um die Gesetze für das Gleichgewicht und den Widerstand dieser Körper aufzustellen, betrachtet man sie zunächst als homogene Massen, deren Theile durch Adhärenz aneinander haften und einer Trennung derselben in jeder Richtung einen gleichen Widerstand entgegensetzen. Sodann wird die Untersuchung auf Körper ausgedehnt, deren Theile eine regelmässige Form besitzen und schichtenweise gelagert sind.

### Erstes Kapitel.

**Gleichgewicht eines Erdkörpers, der nach einer Seite hin ohne Stützfläche ist und von einer Ebene begrenzt wird.**

§ 188. Der zu untersuchende Körper, Fig. 20, sei oben durch eine Horizontalebene

CD und vorne durch eine schiefe Ebene AC begrenzt; man betrachte ihn in dem Augenblicke, in welchem ein Theil ACT auf dem Punkte steht, sich von dem Ganzen in der Ebene AT, durch ein Herabgleiten auf dieser Ebene, zu trennen. Es



handelt sich darum, die Neigung der Ebene  $AC$  so zu bestimmen, dass keine Lostrennung eines Theils von dem Ganzen stattfinden kann. Man nenne nun

$h$  die Höhe  $AE$  des durch  $AC$  begrenzten Theils;

$m$  die Tangente des Winkels  $EAC$ ;

$\beta$  den Winkel  $EAT$ ;

$\Pi$  das Gewicht einer Volumeinheit der Materie, aus welcher der Körper besteht;

$\gamma$  die Kraft, deren man für jede Flächeneinheit bedarf, um zwei Theile des Körpers durch Hingeweggleiten über einander zu trennen (die Cohäsion);

$f$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten eines Theils auf dem andern.

Es folgt jetzt für das Gewicht des Prisma's  $CAT$

$$\frac{\Pi \cdot h^2}{2} (\tan\beta - m);$$

für die Kraft, welche dasselbe längs  $AT$  hinab zu schieben sucht,

$$\frac{\Pi \cdot h^2}{2} (\tan\beta - m) \cos\beta;$$

und für die Kraft, welche diesem Gleiten widerstrebt,

$$\frac{f \cdot \Pi \cdot h^2}{2} (\tan\beta - m) \sin\beta + \frac{\gamma h}{\cos\beta}$$

Das Gleichgewicht wird daher ausgedrückt durch die Gleichung

$$(\tan\beta - m) (1 - f \tan\beta) = \frac{2\gamma}{\Pi h} (1 + \tan\beta^2),$$

woraus

$$m = \tan\beta - \frac{2\gamma}{\Pi h} \cdot \frac{1 + \tan\beta^2}{1 - f \tan\beta}$$

§ 189. Bestimmt man den Werth von  $\beta$ , für welchen der vorstehende Ausdruck ein Maximum wird, so erhält man den kleinsten möglichen Werth für  $m$  und zugleich die Richtung, nach welcher eine Lostrennung erfolgen würde, wenn man für  $m$  einen geringern Werth annähme, als denjenigen, für welchen Gleichgewicht besteht.

Dieser Werth von  $\beta$  bestimmt sich durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{1}{f} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\Pi h} (1 + f^2)}{\frac{2\gamma}{\Pi h} + f}} \right\};$$

und setzt man diesen Werth in den Ausdruck für  $m$ , so erhält man

$$m = \frac{1}{f} + \frac{2}{f^2} \left\{ \frac{2\gamma}{\Pi h} - \sqrt{\frac{2\gamma}{\Pi h} \left( \frac{2\gamma}{\Pi h} + f \right) (1 + f^2)} \right\}$$

als die Grenze der Neigung, welcher man der begrenzenden Ebene  $AC$  ertheilen darf, ohne das Herabgleiten eines Theiles zu befürchten.

Löst man die Gleichung für  $h$  auf, so erhält man die grösste Höhe, auf welcher sich der Körper bei der Böschung  $m$  erhalten kann.

§ 190. Ist  $h$  sehr klein, so erhält man für  $m$  einen negativen Werth; man könnte also dem Körper eine entgegengesetzte Böschung geben, ohne ein Zusammenstürzen zu befürchten; um so mehr wird man den Körper durch eine verticale Ebene begrenzen können. Setzt man nun  $m = 0$ , so erhält man

$$h = \frac{4\gamma}{\Pi} \left( f + \sqrt{1 + f^2} \right)$$

welcher Ausdruck die Höhe angibt, auf welche der Körper, vertical abgestochen, sich noch im Gleichgewichte halten würde. Setzt man für  $h$  grössere Werthe, so erhält man für  $m$  wachsende positive Werthe bis zu einer bestimmten Grenze welche man erhält, wenn man  $h$  unendlich gross annimmt; diese Grenze ist

$$m = \frac{1}{f}.$$

Sie giebt die Böschung, welche die Materie von selbst annehmen würde, wenn man die Cohäsion der Theile vernichtet und das Gleichgewicht nur durch die Reibung erhalten denkt.

§ 191. Vernachlässigt man die Cohäsion der Theile und setzt daher  $\gamma = 0$ , so erhält man

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{1}{f}, \quad m = \frac{1}{f}$$

so dass der Körper nach dem Winkel der natürlichen Böschung abgestochen werden muss.

Setzt man  $f=0$ , oder nimmt man die Kraft, mit welcher zwei Theile eines Körpers an einander haften als von dem Drucke unabhängig und nur dem Inhalt der Berührungsfläche proportional an, so erhält man

$$\text{tang } \beta = \frac{\Pi h}{4\gamma}, m = \frac{\Pi^2 h^2 - 16\gamma^2}{8\Pi\gamma h}.$$

§ 192. Nennt man  $\tau$  den Winkel, dessen Tangente  $\frac{1}{f}$  ist, so lässt sich der Ausdruck für  $h$  in § 190 schreiben

$$h = \frac{4\gamma}{\Pi \text{tang } \frac{\tau}{2}},$$

woraus

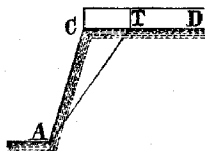
$$\gamma = \frac{1}{4} \Pi h \text{tang } \frac{\tau}{2}.$$

Es giebt  $h$  die grösste Höhe an, auf welcher die Masse, vertical abgestochen, sich noch im Gleichgewicht erhält. Ist  $\gamma=0$ , so ist auch diese Höhe gleich Null; ist  $f=0$ , so ist sie gleich  $\frac{4\gamma}{\Pi}$ .

Den Werth  $f$  erhält man, indem man die Böschung beobachtet, welche die Materie des Körpers nach überwundener Cohäsion von selbst annimmt:  $f$  ist die Tangente des Winkels, welchen die Böschungsebene mit dem Horizonte bildet, und  $\tau$  ist der Winkel, welchen dieselbe Ebene mit der Verticalen bildet. Beobachtet man sodann die Höhe, bis zu welcher der Körper sich vertical abstechen lässt, ohne zusammen zu stürzen, so erhält man das Gewicht  $\gamma$  vermittelst der obigen Gleichung.

§ 193. Kehrt man zu der Entwicklung in § 188 zurück und nimmt man, unter Beibehaltung der früheren Benennungen, die Oberfläche  $CD$  des Körpers (Fig. 21)

Fig. 21.



als gleichmässig mit Materie belastet an, die sich durch verticale Ebenen trennen lässt, welche durch die oberen Grenzlinien  $T$  der Bruchebenen gehen, und nennt man  $p$  den Druck, welcher sich daraus für die Flächeneinheit der Ebene  $CD$  ergibt, so erhält man für die Kraft, welche das Her-

abgleiten eines Theils längs  $AT$  zu bewirken sucht,

$$(ph + \frac{1}{2} \Pi h^2) (\tan \beta - m) \cos \beta;$$

für diejenige Kraft aber, welcher das Gleiten zu verhindern sucht,

$$f(ph + \frac{1}{2} \Pi h^2) (\tan \beta - m) \sin \beta + \frac{\gamma h}{\cos \beta};$$

setzt man diese beiden Grössen einander gleich, so erhält man

$$(\tan \beta - m) (1 - f \tan \beta) = \frac{2\gamma(1 + \tan \beta^2)}{2p + 11h}.$$

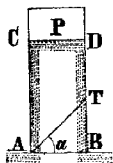
Vergleicht man diesen Ausdruck mit demjenigen, welcher in § 188 gefunden wurde, so sieht man, dass die Formeln in § 189 sich auch auf den vorliegenden Fall anwenden lassen, sobald man  $2p + \Pi h$  für  $\Pi h$  schreibt.

## Zweites Kapitel.

**Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, der von zwei Seitenebenen begrenzt wird und auf dessen Oberfläche eine Last gleichförmig vertheilt ist.**

§ 194. Wir wollen, der grösseren Einfachheit wegen, einen zwischen zwei parallelen Verticalebenen eingeschlossenen Körper (Fig. 22) betrachten, und annehmen,

Fig. 22. dass der Bruch dieses Körpers nach der Richtung  $AT$  erfolgen müsse.



Man nenne:

$h$  die Höhe  $AC$  des Körpers;

$a$  die Dicke  $AB$  oder  $CD$ ;

$\alpha$  die Neigung der Bruchebene  $AT$  gegen den Horizont;

$P$  ein über die Oberfläche  $CD$  gleich-

mässig vertheiltes Gewicht, bezogen auf die Längeneinheit des Körpers;

$\Pi$ ,  $f$  und  $\gamma$  behalten die in § 188 angegebenen Bedeutungen.



Die Kraft, welche ein Herabgleiten des obern Theils längs  $AT$  zu bewirken sucht, ist

$$(P + \Pi ah - \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha) \sin \alpha;$$

diejenige Kraft, welche diesem Gleiten entgegenwirkt, ist

$$f(P + \Pi ah - \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha) \cos \alpha + \frac{\gamma a}{\cos \alpha}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so findet man

$$(P + \Pi ah - \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha) (\tan \alpha - f) = \gamma a (1 + \tan^2 \alpha),$$

woraus man erhält:

$$P + \Pi ah = \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha + \gamma a \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha - f}.$$

§ 195. Sieht man  $\alpha$  als veränderlich an und bestimmt darnach den Minimalwerth für  $P + \Pi ah$ , so erfährt man daraus zugleich die Richtung, in welcher der Bruch des Körpers erfolgen würde, wenn die Belastung diejenige, für welche Gleichgewicht statt findet, etwas überträte, so wie die grösste Höhe, welche man dem Körper geben, und das grösste Gewicht, womit man ihn belasten darf.

Der Werth von  $\tan \alpha$ , für den die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ein Minimum wird, ist

$$\tan \alpha = f + \sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{\Pi a + 2\gamma}},$$

und dieser Werth in die Gleichung substituirt giebt:

$$P + \Pi ah = f\left(\frac{\Pi a^2}{2} + 2\gamma a\right) + \sqrt{2\gamma a(\Pi a^2 + 2\gamma a)(1+f^2)}$$

als Ausdruck des grössten Werthes, den man  $P + \Pi ah$  beilegen darf, ohne den Bruch des Körpers herbeizuführen.

§ 196. Sieht man von dem Gewichte des oberen Theiles des Körpers  $ACDT$  des Körpers ab, so wird aus diesen Formeln

$$\tan \alpha = f + \sqrt{1+f^2}; \quad P = 2\gamma a(f + \sqrt{1+f^2}).$$

§ 197. Nimmt man ferner  $f = 0$ , oder den Widerstand von dem Drucke unabhängig und nur dem Inhalt der Bruchfläche proportional an, so hat man

$$\tan \alpha = 1; \quad P = 2\gamma a,$$

welche Resultate Coulomb <sup>1)</sup> gegeben hat. Der Bruch erfolgt demnach in einer unter einem halben rechten Winkel gegen den Horizontal geneigten Ebene und der Werth von  $P$  ist der Dicke des Körpers proportional. In diesen Formeln sind die Gesetze für das Zerdrücken eines Steinprismas enthalten, wenn die zerdrückende Kraft auf die obere Seite des Prismas wirkt.

§ 198. Die bisherigen Resultate setzten eine gleichmässige Zusammensetzung des Körpers voraus, wie sie sich bei Erdmassen, Béton oder kleinen unregelmässig gelagerten und durch Mörtel verbundenen Bruchsteinen findet. In diesem letztern Falle hat man für  $f$  und  $\gamma$  die Werthe in die Formel einzusetzen, welche der Mörtelmasse entsprechen. Besteht indess der Körper aus grösseren, regelmässig behauenen und in horizontalen Schichten gelagerten Steinen, so muss die Bruchfuge durch diese Steine selbst hindurch gehen und daher müssen hier für  $f$  und  $\gamma$  die Werthe genommen werden, welche der Masse der Steine selbst entsprechen; es liegt hierin der Grund für die grössere Festigkeit, die man erlangt, wenn man die in Rede stehende Construction anwendet.

---

### Drittes Kapitel.

**Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, gegen dessen eine Seitenfläche eine Kraft wirkt.**

§ 199. Man betrachte den von zwei parallelen Seiten eingefassten Körper  $ABCD$  (Fig. 23 auf folgender Seite), auf welchen eine in  $E$  angreifende Horizontalkraft wirkt. Diese Kraft kann den Bruch des Körpers auf zweifache Weise verursachen, indem sie nämlich entweder den

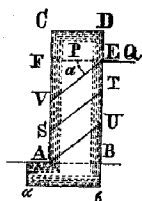
---

1) Mémoires des savants étrangers, 1773.

obern Theil über den untern hinweggleiten lässt, oder den ersteren umstürzt. Diese beiden Fälle des Bruchs müssen einzeln untersucht werden.

### Erster Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Gleiten erfolgt.

§ 200. Der Bruch muss nach einer beliebigen Richtung innerhalb des Theiles  $ABEF$  erfolgen, und es handelt sich darum, für die in  $E$  angreifende Horizontalkraft den kleinsten Werth zu ermitteln, unter der Bedingung, dass diese Kraft den Bruch bewirken soll. Man nenne



$a$  die Dicke  $AB$  des Körpers;  
 $h$  die Höhe  $AF$  oder  $BE$  des Angriffspunktes der Horizontalkraft;

$P$  das Gewicht des oberen Theiles  $CDEF$ , bezogen auf die Längeneinheit des Körpers;

$Q$  den Werth der in  $E$  angreifenden Horizontalkraft, bezogen auf die Längeneinheit des Körpers;

$\alpha$  den Winkel, welche die Bruchfrage mit dem Horizonte bildet;

$h$  den Abstand  $ST$ ;

$\gamma$  die Kraft, deren man für jede Flächeneinheit bedarf, um zwei Theile durch Hinweggleiten über einander zu trennen (die Cohäsion);

$f$  den Reibungscoefficienten für zwei Theile des Körpers, welche über einander hinweggleiten;

$\sigma$  den Winkel, dessen Tangente  $f$  ist (den Reibungswinkel).

Die Kraft, welche das Gleiten auf  $ST$  hervorzubringen sucht, ist

$$Q \cos \alpha + (P + \Pi a h - \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \sin \alpha;$$

die Kraft, welche dem Gleiten widerstrebt, ist

$$-f Q \sin \alpha + f (P + \Pi a h - \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \cos \alpha + \gamma \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich und sucht  $Q$ , so erhält man die Formel (1).

$$Q = \frac{\frac{1}{2} (2P + \Pi a h - \Pi a^2 \tan \alpha) (f - \tan \alpha) + 2\gamma a \cdot (1 + \tan \alpha^2)}{1 + f \tan \alpha}$$

Dieser Ausdruck giebt den Werth der Kraft  $Q$  für den Fall, dass die Kräfte, welche den Bruch des Körpers

zu bewirken suchen, und die geleisteten Widerstände sich im Gleichgewicht halten sollen. Die Grössen  $h$  und  $\alpha$  sind unbestimmt: man darf den Körper keiner grösseren Horizontalkraft aussetzen, als der, welche der Minimalwerth von  $Q$  in der Gleichung (1) angiebt, wenn man darin  $h$  und  $\alpha$  veränderlich setzt.

§ 201. Wenn man  $\gamma$  gleich Null hätte, so würde es genügen  $\tan \alpha = f$  zu nehmen, um den Werth von  $Q$  gleich Null zu machen. Ist also die Cohäsion gleich Null, so kann der Körper die Wirkung einer Horizontalkraft nicht ertragen.

§ 202. Man wird übrigens bemerken, dass das Glied, welches  $h$  enthält in der Gleichung (1), positiv oder negativ wird, je nachdem  $\tan \alpha$  kleiner oder grösser als  $f$  wird. Ist daher die Neigung der Bruchfuge  $ST$  gegen den Horizont geringer, als die Neigung der Ebene, auf welcher die Theile des Körpers sich vermöge der Reibung allein im Gleichgewichte halten (welche Neigung durch  $\sigma$  bezeichnet wurde und gewöhnlich der Reibungswinkel genannt wird), so hat man für  $h$  den grössten möglichen Werth zu nehmen. Ist hingegen die Neigung der Bruchfuge gegen den Horizont grösser als der Reibungswinkel, so hat man für  $h$  den kleinsten möglichen Werth zu nehmen. Man muss daher annehmen, dass die Bruchfuge entweder durch den Punkt  $E$ , oder durch den Punkt  $A$  geht; und diese beiden Fälle müssen jeder für sich betrachtet werden. Was die Neigung der Bruchfrage anlangt, so wird man sogleich sehen, auf welche Weise sich dieselbe bestimmen lässt.

§ 203. Man nehme zunächst an, der Bruch erfolge in der Richtung  $AU$ , indem er bei  $A$  zuerst eintritt. Man setze  $h = H$  in der Gleichung (1) und setze, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned} A &= 2(fP + f\Pi aH + \gamma a) \\ B &= f\Pi a^2 + 2P + 2\Pi aH \\ C &= \Pi a^2 + 2\gamma a. \end{aligned}$$

Man erhält dadurch

$$Q = \frac{1}{2} \frac{A - B \tan \alpha + C \tan^2 \alpha}{1 + f \tan \alpha}. \quad (m)$$

Setzt man für die Cohäsion zuerst Null, sodann allmählich wachsende Werthe, so giebt es anfangs Werthe, für  $\tan\alpha$ , welche  $Q=0$  machen. Diese Werthe sind in der Formel

$$\tan\alpha = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad (n)$$

enthalten.

Ist  $\gamma$  nicht gross genug, um diese Werthe imaginär zu machen, so sind stets beide Werthe positiv, und jede Annahme für  $\tan\alpha$ , welche zwischen denselben liegt, giebt für  $Q$  ein negatives Resultat. Es kann also der Körper nur dann die Wirkung einer Horizontalkraft ertragen, wenn die durch den Ausdruck (n) gegebenen Werthe imaginär sind, oder wenn, wofern sie reell sein sollten, der kleinste derselben grösser als  $\frac{H}{a}$  ist, d. h. ein Bruchfuge andeutet, welche über  $AE$  hinaus liegt. Es ist in der That jede innerhalb des Winkels  $BAE$  angenommene Bruchfuge zulässig; aber man darf nicht annehmen, dass der Bruch jenseit dieser Linie  $AE$  eintrete. Sind die aus der Formel (n) erhaltenen Ausdrücke reell, und der kleinste derselben grösser als  $\frac{H}{a}$ ,

so substituirt man  $\tan\alpha = \frac{H}{a}$  in die Gleichung (m), wodurch man in diesem Falle den grössten Horizontalschub erhalten wird, welchen der Körper ertragen kann.

§ 204. Werden beide Werthe, welche man aus der Formel (n) erhält, imaginär, so hat man daraus zu schliessen, dass es ein positives Minimum für  $Q$  giebt, welches aufgesucht werden muss. Der Werth von  $\tan\alpha$ , für welchen der Ausdruck (m) ein Minimum wird, ist

$$\tan\alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f} \sqrt{\frac{f^2 \cdot A + f \cdot B + C}{C}}, \quad (o)$$

der für  $\tan\alpha$  desto kleinere Werthe giebt, je grösser  $\gamma$  wird. Wird der Werth, welchen man für  $\tan\alpha$  erhält, grösser als  $\frac{H}{a}$ , so zeigt dies an, dass die Bruchfuge über  $AE$  hinaus liegt, und in der Formel (m) müsste man offenbar  $\tan\alpha = \frac{H}{a}$  setzen, woraus man den gesuchten

Werth für  $H$  erhalten würde. Wenn aber der aus der Formel (o) erhaltene Werth für  $\tan \alpha$  kleiner als  $\frac{H}{a}$  ist, so muss man diesen Werth in die Gleichung (m) substituiren.

§ 205. Man muss indess bemerken, dass der Werth für  $\tan \alpha$ , da derselbe abnimmt, wenn  $\gamma$  mehr und mehr zunimmt, kleiner als  $f$  werden kann. Setzt man  $\gamma$  unendlich gross, so giebt die Formel (o) in der That

$$\tan \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + f^2}}{f} \text{ oder } \alpha = \frac{1}{2}\sigma;$$

so dass dann die Bruchfuge den Reibungswinkel halbt. Nach dem aber, was in § 202 gesagt ist, muss dieses letzte Resultat verworfen werden: denn wenn  $\tan \alpha < f$  ist, so muss die Bruchfuge so hoch, wie möglich, d. h. vom Punkte  $E$  ausgehend, angenommen werden: für einen gleichen Werth von  $\alpha$  erhält man alsdann einen geringeren Werth für  $Q$ . Man muss daher, wenn die Formel (o) für  $\tan \alpha$  einen kleineren Werth als  $f$  giebt, zu anderen Formeln greifen, die bei der Voraussetzung, die Bruchebene gehe vom Punkte  $E$  aus, bestehen.

§ 206. Man nehme jetzt an, der Bruch erfolge nach der Richtung  $EV$ , indem er bei  $E$  zuerst eintritt.

Die Kraft, welche das Gleiten hervorzubringen sucht, ist

$$Q \cos \alpha + (P + \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \sin \alpha,$$

und die Kraft, welche dem entgegenstrebt, ist

$$-f Q \sin \alpha + f(P + \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \cos \alpha.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, und sucht daraus den Werth für  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{1}{2} \frac{(2P + \Pi a^2 \tan \alpha)(f - \tan \alpha) + 2\gamma a(1 + \tan^2 \alpha)}{1 + f \tan \alpha} \quad (p)$$

Setzt man der Kürze wegen

$$A = 2(fP + \gamma a),$$

$$B = f \Pi a^2 - 2P,$$

$$C = \Pi a^2 - 2\gamma a,$$

so reducirt sich diese Formel auf

$$Q = \frac{A + B \tan \alpha - C \tan^2 \alpha}{1 + f \tan \alpha}$$

§ 207. Setzt man  $\gamma$  zuerst gleich Null oder verschwindend klein, so giebt es einen Werth von  $\tan\alpha$ , für welchen  $Q$  gleich Null wird. Diesen Werth giebt der Ausdruck

$$\tan\alpha = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2C}, \quad (q)$$

woraus man  $f$  für  $\tan\alpha$  erhält, wenn  $\gamma = 0$  ist, so wie immer grössere Werthe in dem Masse, in welchem  $\gamma$  grösser wird. Ist der aus der Formel (q) erhaltene Werth kleiner als  $\frac{H}{a}$ , d. h. zeigt er eine Bruchfuge innerhalb des Winkels  $BEF$  an, so folgt daraus offenbar, dass der Körper die Wirkung einer Horizontalkraft nicht ertragen kann. Wird aber der Ausdruck (q) grösser als  $\frac{H}{a}$  oder imaginär, so kann der Körper einer solchen Wirkung widerstehen. Damit also überhaupt der Körper der Wirkung einer Horizontalkraft widerstehen kann, ist es nöthig und genügt es auch, dass der aus der Formel (q) gefundene Werth und der kleinste der in der Formel (n) enthaltenen Werthe beide grösser als  $\frac{H}{a}$  sind. Da aber hier die Werthe von  $\tan\alpha$ , welche nothwendig kleiner als  $f$  sind, in Frage kommen, so entspricht der Ausdruck (n) dem für den Widerstand des Körpers ungünstigsten Fall und man braucht daher nur den kleinsten Werth, welchen man aus der Formel (n) erhält, auf die angegebene Bedingung zu prüfen.

§ 208. Nachdem man ermittelt hat, dass der Körper die Wirkung einer Horizontalkraft ertragen kann, handelt es sich darum, den Werth von  $\tan\alpha$  zu bestimmen, für welchen jene Kraft ein Minimum wird. Diesen Werth giebt die Formel

$$\tan\alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f} \sqrt{\frac{-f^2 A + fB + C}{C}}, \quad (r)$$

aus welcher man desto kleinere Werthe erhält, je grösser  $\gamma$  ist. So lange diese Werthe grösser als  $\frac{H}{a}$  sind, müsste man daraus folgern, dass die Bruchfuge jenseit der Linie  $AE$  läge, was unzulässig ist; man muss dann  $\tan\alpha = \frac{H}{a}$

in die Gleichung (p) substituiren, und dadurch den gesuchten Werth für  $Q$  finden. Wird aber der Werth kleiner als  $\frac{H}{a}$ , so giebt dies die Bruchfuge  $EV$  innerhalb des Winkels  $AEF$  an, und man muss dann diesen Werth in die Gleichung (p) substituiren.

Man muss indess beachten, dass die Gleichung (r), welche, wenn  $\gamma$  unendlich wird, eben so wie die Gleichung (o),  $\tan \alpha = \tan \frac{1}{2} \sigma$  giebt, Werthe für  $\tan \alpha$  geben kann, welche zugleich kleiner als  $\frac{H}{a}$  und grösser als  $f$  sind. Sollte dieser Fall eintreten, so darf man, in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, nicht mehr die Formel (p) anwenden, sondern man muss auf die Formel (l) zurückkommen, in welche man für  $\tan \alpha$  den aus der Formel (o) erhaltenen Werth substituirt und dadurch den kleinsten möglichen Werth für  $Q$  erhält, welcher in der Anwendung zulässig ist.

§ 209. Fassen wir das Vorhergehende kurz zusammen! Ist der Bruch eines Körpers durch das Herabgleiten eines Theils zu untersuchen, und will man die grösste Horizontalkraft  $Q$  bestimmen, der dieser Körper widerstehen kann, so prüfe man die aus der Formel (n) erhaltenen Werthe von  $\tan \alpha$ . 1) Sind diese Werthe reell und kleiner als  $\frac{H}{a}$ , so kann der Körper keiner Kraft widerstehen. 2) Sind diese Werthe reell und grösser als  $\frac{H}{a}$ , so setze man  $\tan \alpha = \frac{H}{a}$  in die Formel (m), aus welcher man für  $Q$  den gesuchten Werth findet. 3) Sind die genannten Werthe imaginär, so berechne man den Werth von  $\tan \alpha$  nach der Formel (o) und substituire diesen in die Formel (m); man berechne gleichfalls den Werth von  $\tan \alpha$  nach der Formel (r) und substituire diesen in die Formel (p): von den beiden Werthen für  $Q$ , welche man auf diese Weise erhält, wähle man nachher den kleinsten.

§ 210. Die vorhergehenden Resultate setzen eine gleichmässige Zusammensetzung des Körpers voraus. Sie gelten also für Körper aus Erde, Béton, oder kleinen unregelmässig gelagerten Bruchsteinen, wobei man für  $f$  und  $\gamma$  die dem Mörtel entsprechenden Werthe zu nehmen hat.



Bei einem Körper, der aus grossen und regelmässig behauenen Steinen besteht, welche in geordneten Schichten gelagert sind, giebt es zuweilen gewisse Richtungen, in denen der Bruch des Körpers leichter erfolgt, als in andern. Wenn z. B. der Körper aus horizontalen Schichten besteht, so wird der Bruch in der Fuge eintreten, welche unmittelbar unter dem Angriffspunkte  $E$  der Kraft  $Q$  liegt. Das Gleichgewicht wird stattfinden, wenn

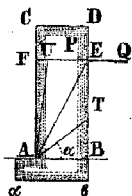
$$Q = fP + \gamma a$$

ist, wobei man für  $\gamma$  den Werth zu setzen hat, welcher dem Mörtel entspricht.

Wenn die Steine so gelagert sind, dass es in den Richtungen, in welchen das Gleiten eintreten kann, keine zusammenhängenden Fugen giebt, so untersuche man die Grösse der Oberfläche der Steine, welche zerbrochen werden müssen, damit ein Gleiten eintreten kann und berechne hieraus den Widerstand der Cohäsion.

### Zweiter Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Umsturz erfolgt.

§ 211. Man nehme an, dass der Bruch des Körpers nach einer schiefen Richtung  $AT$ , (Fig. 24), erfolge, und der obere Theil  $ACDT$  umstürze, indem er sich um die Kante  $A$  dreht. Man behalte die Benennung des § 202 bei und bezeichne ferner mit



$R$  die absolute Cohäsion der Materie des Körpers oder die Kraft, deren man bedarf, um zwei Theile des Körpers durch einen Zug rechtwinklig zur Bruchfrage, zu trennen; man erhält alsdann für das Moment der Kraft, welche den Umsturz des oberen

Theils zu bewirken sucht,

$QH.$

Nimmt man für das Moment des Widerstandes gegen den Bruch in  $AT$  einen Ausdruck, an welcher mit dem in § 150 nach der Hypothese Mariotte's gefundenen über-

einstimmt, so erhält man für das Moment der Kräfte, welche dem Umsturze widerstreben,

$$\frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi a^3}{3} \tan \alpha + \frac{Ra^2}{3 \cos \alpha}.$$

Setzt man diese beiden Momente einander gleich, so erhält man

$$QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi a^3}{3} \tan \alpha + \frac{Ra^2}{3 \cos \alpha}.$$

§ 212. Sucht man den Werth von  $\tan \alpha$ , für welchen die rechte Seite der Gleichung ein Minimum wird, so erhält man zugleich die Richtung, in welcher der Bruch erfolgen würde, wenn das Moment  $QH$  etwas grösser würde, als dasjenige, für welches Gleichgewicht besteht, so wie den grössten Werth, welchen man diesem Momente beilegen darf. Der aus dieser Bedingung folgende Werth von  $\tan \alpha$  ist,

$$\tan \alpha = \frac{\Pi a}{2R};$$

substituirt man denselben in die vorstehende Gleichung, so erhält man für die gesuchte Grenze

$$QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi^2 a^4}{12R} + \frac{Ra^2}{3}.$$

Löst man die Gleichung für  $a$  auf, so erhält man die geringste Dicke, welche eine Mauer haben darf, um der Wirkung der Kraft  $Q$  widerstehen zu können.

§ 213. Ist die Cohäsion sehr gross, so hat man offenbar

$$\tan \alpha = 0, \quad QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} + \frac{Ra^2}{3}.$$

Der Bruch tritt dann in der Basis  $AB$  ein. Man nimmt an, dass der Körper an dieser Basis mit der durch  $R$  ausgedrückten Kraft hafte.

§ 214. Je mehr  $R$  abnimmt, desto mehr nimmt  $\alpha$  zu und die Bruchebene entfernt sich mehr und mehr von  $AB$ . Wird aber der Werth von  $\tan \alpha$  aus § 212 grösser als  $\frac{H}{a}$ , d. h. müsste die Bruchebene jenseit  $AE$  liegen, so darf man die bisherige Formel nicht mehr anwenden, da die Kraft  $Q$  keine Trennung in dem obern Theile  $CDEF$  des Körpers bewirken kann.

§ 215. Wird der Werth von  $\tan \alpha$  aus § 212 grösser als  $\frac{H}{a}$ , so folgert man daraus, dass die Richtung des Bruches eine gebrochene, wie  $AUE$  sein wird. Gleichzeitig ergibt sich der Widerstand gegen den Bruch aus der Cohäsion, welche in beiden Theilen der Bruchebene statt findet. Setzt man die Cohäsion gleich Null, wie es in der Praxis in den meisten Fällen geschehen muss, so ist  $AU$  fast als zusammenfallend mit  $AF$  anzunehmen und daher der Werth, welchen man der Kraft  $Q$  beilegen kann, aus der Gleichung

$$QH = \frac{Pa}{2},$$

zu bestimmen. Die letzte Gleichung giebt die Grenze für den geringsten Widerstand des Körpers, wenigstens, wenn man annimmt, dass die Theile des Körpers nicht zerdrückt werden sollen.

§ 216. Haftet der Körper an seiner Basis nicht mit derselben Kraft, mit welcher die Theile desselben zusammenhalten, so dass man für die Cohäsion in der Ebene  $AB$  einen Werth  $K$  hat, welcher kleiner als  $R$  ist, so erhält man durch die Gleichung

$$QH = \frac{Pa}{2} + \frac{Ha^2}{2} + \frac{Ka^2}{2}$$

eine neue Grenze, welche das Moment  $QH$  nicht überschreiten darf, ohne den Körper umzustürzen.

§ 217. Ist der Körper aus regelmässig behauenen und in horizontalen Schichten gelagerten Steinen aufgeführt, so lassen sich die bisherigen Resultate anwenden, ohne merklich modificirt zu werden, wenn man für  $R$  den Werth nimmt, welcher dem Mörtel zugehört, der das Bindemittel der Steine abgiebt.

Die Art des Bruches, welche so eben untersucht worden ist, kommt in den meisten Fällen vor, da der Bruch durch Gleiten durch verschiedene Constructionen verhindert werden kann und im Allgemeinen eine grössere Kraft erfordert, als der Bruch durch Umsturz.

§ 218. Sind die Seiten des Körpers gegen den Horizont geneigt, oder discontinuirlich und greifen mehrere Kräfte in verschiedenen Punkten an, so wäre es unzweckmässig, den Widerstand durch allgemeine Formeln

ausd  
und  
den  
stan  
rech  
und  
Körp

erle

hand  
dure  
an,  
Glei  
Wid

F



vertl

Körp  
dann  
kraft  
stän  
der  
Ab  
Cons  
an V

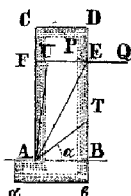
1)  
Körp  
Profil

ausdrücken zu wollen, um darauf die Lehre vom Grössten und Kleinsten anzuwenden. Man müsste alsdann, von den vorhergehenden Erörterungen geleitet, den Widerstand für verschiedene hypothetische Bruchflächen berechnen, aus diesen den ungünstigsten Fall auswählen und sich vergewissern, dass selbst in diesem Falle der Körper den nöthigen Widerstand leisten würde.

**Ueber den Druck, den die Theile des Körpers erleiden und den Widerstand, welchen diese leisten müssen, um nicht zerdrückt zu werden.**

§ 219. Man betrachte den in § 211 u. folgd. behandelten Fall, in welchem der Bruch des Körpers als durch Umsturz geschehend angenommen wird, und nehme an, die Construction sei so entworfen, dass einfaches Gleichgewicht zwischen der Horizontalkraft  $Q$  und dem Widerstande besteht, welcher von dem Gewichte des umzustürzenden Theils und von der Cohäsion herrührt. Die Richtung der einzigen Resultante aller dieser Kräfte, wird durch die Kante  $A$  gehen, (Fig. 25), da dies die feste Axe ist, um welche die Drehung vor sich gehen würde. Allein dann könnte diese Kante zerdrückt werden; und damit das Zerdrücken nicht erfolgen kann, müssen die Kräfte, die auf diesen Theil des Körpers, als auf den am meisten exponirten, wirken, auf eine Fläche von einiger Ausdehnung

Fig. 25.



vertheilt werden.

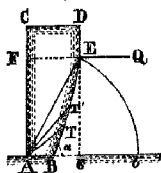
Aus dieser Bedingung folgt, dass von Seiten des Körpers ein Ueberschuss an Widerstand existiren muss, damit die Richtung der Resultante aus der Horizontalkraft  $Q$  und den dieser Kraft entgegengesetzten Widerständen durch einen Punkt  $\delta$  gehe, welcher innerhalb der Basis des Körpers in einer endlichen Entfernung  $Ab$  von der Kante  $A$  liegt <sup>1)</sup>. Gesetzt, man habe die Construction so bestimmt, dass man einen Ueberschuss an Widerstand erhält, und man wolle ermitteln, ob der

1) Ist  $M$  das Moment der Kraft  $Q$  und  $M'$  das Widerstandsmoment des Körpers, so muss  $M' = \delta M$  sein; Français findet aus den Vauban'schen Profilen  $\delta = 1,8$ .

Stein die nöthige Festigkeit besitze; so wird man die Richtung der gemeinschaftlichen Resultante aufsuchen aus den Kräften, welche den Körper umzustürzen suchen und den Kräften, welche dem widerstreben, so wie den Punkt  $b$ , in welchem die Richtung der Resultante die Basis  $AB$  trifft. Man wird hierauf untersuchen, ob die von der Basis des Körpers aufgenommene Kraft auf einem grössern Theil dieser Basis als  $Ab$  vertheilt werden muss. Nimmt man daher an, dass auf diesen Theil  $Ab$  eine Kraft wirke, welche der in Rede stehenden Resultante gleich ist, so erhält man dadurch eine Grenze für den auf den Stein ausgeübten Druck, über welche man nicht hinausgehen darf.

### Körper von gleichem Widerstande gegen den Bruch durch Umsturz.

Fig. 26.



§ 220. Man sucht die Curve  $BE$ , (Fig. 26), nach welcher der Körper profilirt sein muss, wenn der Widerstand gegen den Bruch in einer beliebigen Richtung  $AT$  innerhalb des Winkels  $BAE$  überall derselbe sein soll. Man nenne  $M$  das Moment der Kraft  $Q$ , weniger das Moment des Theils  $ACDE$  des Körpers, diese Momente in

Bezug auf den Punkt  $A$  genommen;

$H$  die Höhe  $\beta E$  des Angriffspunktes der Kraft  $Q$ ;

$a$  die Länge der Linie  $AE$ ;

$\alpha$  den Winkel  $BAE$ ;

$\alpha'$  den Winkel  $BAT$ ;

$\rho$  den Halbmesser  $AT$ ;

$\Pi$  und  $R$  behalten die oben angegebenen Bedeutungen.

Sieht man  $\alpha$  und  $\rho$  als die Polarcoordinaten der Curve  $BE$  an und nennt man  $\alpha'$  und  $\rho'$  die Coordinaten eines beliebigen Punktes, welche höher als  $T$  liegt, so hat man

$$\frac{1}{3} \Pi \rho'^3 \cos \alpha' d\alpha'$$

als das Moment des Gewichtes eines dreieckigen Elementes der Fläche  $ATE$ . Bei der Voraussetzung, dass der Bruch in  $AT$  eintrete, hat man daher die Gleichgewichtsgleichung

$$M - \frac{1}{3} \Pi \int_{\alpha}^A \rho'^3 \cos \alpha' d\alpha' = \frac{R \rho^2}{3}.$$

Differentiirt man nach  $\alpha$ , so erhält man

$$-\Pi \rho^3 \cos \alpha d\alpha = 2R \rho d\rho, \quad 1)$$

woraus

$$\frac{\Pi}{2R} \sin \alpha = -\frac{1}{\rho} + \text{Const.};$$

oder weil für  $\alpha = A$ ,  $\rho = c$  wird,

$$\rho = \frac{2Rc}{2R + \Pi(\sin A - \sin \alpha)c},$$

oder

$$\rho = \frac{2Rc}{2R + \Pi(H - c \sin \alpha)},$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Curve.

§ 221. Nimmt man die Cohäsion sehr gross an, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\rho = c,$$

d. h. die Curve wird zum Kreisbogen  $Eb$  mit dem Mittelpunkt  $A$ .

§ 222. Nimmt man die Cohäsion sehr klein an, so wird offenbar die Curve sich von der Geraden  $EA$  nicht merklich unterscheiden. Hätte man in diesem Falle dem Körper ein rechteckiges Profil gegeben, so würde der Theil  $EA\beta$  zu der Solidität des Ganzen nichts beitragen.

Die eben entwickelte Theorie findet besonders Anwendung bei der Construction der Strebepfeiler, deren man sich bei den Gebäuden des gothischen Styls bedient.

### Versuche über den Widerstand des Mauerwerkes gegen den Bruch durch Umsturz.

§ 223. Séguin der Aeltere<sup>2)</sup> und besonders Vicat<sup>3)</sup> haben über diesen Widerstand einige Versuche

1) Es sei  $\int \rho'^3 \cos \alpha' d\alpha' = b + f(\alpha)$ , so ist

$$\int_{\alpha}^A \rho'^3 \cos \alpha' d\alpha' = f(A) - f(\alpha) \text{ und (weil } f(A) \text{ eine Constante)}$$

$$d. \int_{\alpha}^A \rho'^3 \cos \alpha' d\alpha' = -d. f(\alpha) = -\rho^3 \cos \alpha d\alpha.$$

2) Des ponts en fil de fer, pag. 110 der zweiten Ausgabe.

3) Influence du mode d'attache des chaînes sur la résistance des piliers des ponts suspendus. Annales des ponts et chaussées, tome III.

Navier's Baumechanik.



$\varpi$  <sup>1)</sup>  $f$  und  $\gamma$  behalten die in § 188 angegebenen Bedeutungen.

Die Kraft, welche das Gleiten des Prisma's  $BAT$  längs  $AT$  zu bewirken sucht, ist

$$\frac{\varpi h^2}{2} \left\{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\} \cdot \cos(\beta - \varepsilon);$$

die Kraft, welche dieses Gleiten zu verhindern sucht, ist

$$Q \sin \beta + f Q \cos \beta + \frac{f \varpi h^2}{2} \left\{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\} \left\{ \sin(\beta - \varepsilon) + \frac{\gamma h}{\cos(\beta - \varepsilon)} \right\}.$$

Setzt man diese beiden Kräfte einander gleich und sucht den Werth von  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{\frac{\varpi h^2}{2} \left\{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\} \left\{ \cos(\beta - \varepsilon) - f \sin(\beta - \varepsilon) \right\} - \frac{\gamma h}{\cos(\beta - \varepsilon)}}{\sin \beta + f \cos \beta}$$

oder, wenn man für  $f$  seinen Werth  $\frac{\cos \tau}{\sin \tau}$  setzt,

$$Q = \frac{\varpi h^2}{2} \left\{ \tan(\tau - \beta) + \tan \varepsilon \right\} \left\{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\} \cos \varepsilon \frac{\gamma h \sin \tau}{\cos(\tau - \beta) \cos(\beta - \varepsilon)}.$$

Sucht man den Werth von  $\beta$ , für welchen die rechte Seite der Gleichung ein Maximum wird, so erfährt man zugleich die Richtung, nach welcher die Erde sich trennen würde, wenn die Kraft  $Q$  etwas zu klein wäre, so wie den geringsten Werth, welchen man dieser Kraft beilegen darf. Das Maximum findet statt, wenn

$$\tau - \beta = \beta - \varepsilon \text{ oder } 2\beta = \tau + \varepsilon$$

ist, woraus folgt, dass die Ebene, in welcher die Trennung erfolgen würde, den Winkel  $BAF$  halbt, den die Wand mit der natürlichen Böschung der Erde einschliesst.

Dass auf diese Weise bestimmte Prisma nennt man das Prisma des grössten Druckes <sup>2)</sup>.

1)  $\varpi$  in der Bedeutung des II in § 188.

2) Das Princip, nach welchem das Prisma des grössten Druckes bestimmt wird, verdanken wir Coulomb (Mémoires des savans étrangers, 1773). Das obige Theorem hat Prony für den Fall einer verticalen Wand (in den Recherches sur la poussée des terres 1812) und Français für den Fall einer geneigten Wand (in den Mémoires de l'officier du génie, Nr. 4, 1820) gegeben.



§ 226. Substituirt man den Ausdruck für  $\beta$  in den für  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} \left\{ \tan \frac{1}{2}(\tau - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\}^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{(\cos \frac{1}{2}(\tau - \varepsilon))^2}$$

als den gesuchten Werth des Erddruckes.

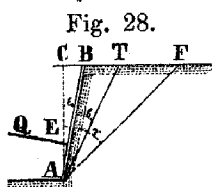


Fig. 28.

§ 227. Ist die Wand  $AB$  (Fig. 28) nach der Seite des Körpers geneigt, so muss der Winkel  $\varepsilon$  mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden. Das Prisma des grössten Druckes wird durch die Gleichung

$$2\beta = \tau - \varepsilon$$

bestimmt, und der Werth des Erddruckes ist

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} \left\{ \tan \frac{1}{2}(\tau + \varepsilon) - \tan \varepsilon \right\}^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{(\cos \frac{1}{2}(\tau + \varepsilon))^2}.$$

§ 228. Ist die Wand vertical, also  $\varepsilon = 0$ , so hat man, um das Prisma des grössten Druckes zu bestimmen

$$2\beta = \tau;$$

der Werth des Erddruckes ist

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} \left( \tan \frac{\tau}{2} \right)^2 - 2\gamma h \tan \frac{\tau}{2}.$$

§ 229. Setzt man zur Abkürzung

$$t = \tan \frac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon) \pm \tan \varepsilon,$$

und für den Fall, in welchem die Wand vertical ist,

$$t = \tan \frac{1}{2}\tau,$$

so dass  $t$  das Verhältniss der Basis des Prisma's des grössten Druckes zu der Höhe desselben ausdrückt, so erhält man für den Erddruck

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} t^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{(\cos \frac{1}{2}(\tau \pm \varepsilon))^2},$$

und für den Fall, in welchem die Wand vertical ist,

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} t^2 - 2\gamma h t.$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn  $h = 0$  wird; nimmt  $h$  zu, so wird er negativ, darauf wieder Null,

wenn  $h$  einen Werth erreicht, welchen wir  $h'$  nennen wollen; dieser ist

$$h' = \frac{2\gamma}{\omega} \cdot \frac{\sin \tau}{t^2 (\cos \frac{1}{2}(\tau + \varepsilon))^2 \cos \varepsilon} 1);$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$h' = \frac{4\gamma}{\omega t}, \text{ woraus } \gamma = \frac{1}{4} \omega h' t.$$

Die Erde kann also bei der Höhe  $h'$  sich selbst im Gleichgewicht halten, was mit dem Resultate des § 192 übereinstimmt. Jenseit dieser Grenze wächst  $Q$  mit  $h$  zugleich ohne Ende.

§ 230. Der Ausdruck für  $Q$  kann auf die Form

$$Q = \frac{\omega h}{2} t^2 (h - h') \cos \varepsilon,$$

und, wenn die Wand vertical ist, auf die Form

$$Q = \frac{\omega h}{2} t^2 (h - h')$$

gebracht werden.

§ 231. Um nun in der Wand den Angriffspunkt der Kraft  $Q$  zu finden, beachte man, dass auf einen Theil der Wand, zu dem der Theil  $z$  der Höhe  $h$  gehört, der Druck ist

$$\frac{\omega z}{2} t^2 (z - h') \cos \varepsilon.$$

Differentiirt man nach  $z$ , so erhält man

$$\frac{\omega dz}{2} t^2 (2z - h') \cos \varepsilon$$

für den Druck auf den Theil der Wand, zu welchem der Theil  $dz$  der Höhe  $h$  gehört. Das Moment dieses Druck-Elementes in Bezug auf die Kante  $A$  (Fig. 27 und 28) erhält man, indem man mit  $\frac{h-z}{\cos \varepsilon}$  multiplicirt.

Nimmt man die Summe der Momente dieser Druck-Elemente und dividirt dieselbe durch den Totaldruck, so erhält man

$$\frac{\int_0^h \{-2z^2 + (2h + h')z - hh'\} dz}{h(h-h') \cos \varepsilon} = \frac{h}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{h - \frac{3}{2} h'}{h - h'}$$

1) Man sehe hier im Anhang die Formel von Français und die danach berechnete Tabelle für Erdaushebungen und Erdanfräge.

für die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft  $Q$  von dem untern Punkte  $A$  der Wand. <sup>1)</sup>

Ist die Wand vertical, so ist diese Entfernung

$$\frac{1}{3}h \cdot \frac{h - \frac{2}{3}h'}{h - h'}.$$

§ 232. Die Neigung der Ebene, welche das Prisma des grössten Druckes begrenzt, ist von der Cohäsion unabhängig. Setzt man die Cohäsion gleich Null, also  $h' = 0$ , so wird der Druck

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} t^2 \cos \varepsilon;$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} t^2.$$

Die Entfernung des Angriffspunktes von  $Q$  von der untern Grenze der Wand ist

$$\frac{h}{3 \cos \varepsilon},$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$\frac{1}{3}h,$$

wie bei den tropfbar-flüssigen Materien.

§ 233. Setzt man zugleich Cohäsion und Reibung gleich Null,  $h' = 0$ ,  $\tau = 90^\circ$ , so ist

$$t = \tan(45^\circ \mp \frac{1}{2}\varepsilon) \pm \tan \varepsilon,$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$t = 1.$$

1) Navier bemerkt hier Folgendes: Diese Formel weicht von der von Prony und Français in den oben citirten Memoiren gegebenen insofern ab, als diese Gelehrten das Integral für das Moment des Druckes zwischen den Grenzen  $h'$  und  $h$  nehmen. Man beachte, dass, wenn auch die Summe der Druck-Elemente für die Höhe  $h$  gleich Null ist, doch daraus nicht folgt, dass auch die Summe der Momente dieser Drücke gleich Null sein müsse. Man wird also das Integral, nach dem Vorgange von Coulomb in seinem Memoire von 1773, zwischen den Grenzen 0 und  $h$  nehmen müssen. Verfährt man auf diese Weise, so verschwindet die Anomalie, welche Prony in Nr. 28 seiner Recherches sur la poussée des terres findet.

Man sehe über diese Frage den Anhang und die Vorrede des Uebersetzers zur ersten Auflage.

In diesem Falle ist der Druck

$$Q = \frac{\omega h^2}{2},$$

was mit den bekannten Eigenschaften der tropfbarflüssigen Materien übereinstimmt.

**Druck der Erde gegen eine ebene Wand, wenn dieselbe eine auf ihrer Oberfläche gleichförmig vertheilte Last trägt.**

§ 234. Kehrt man zu der Rechnung des § 225 zurück und nimmt an, dass der Erdkörper auf seiner oberen horizontalen Endfläche gleichförmig mit Materien belastet sei, welche sich in Verticalebenen ablösen, die durch die oberen Grenzen  $T$  der Bruchflächen (Fig. 27 u. 28) gehen, und nennt man ferner

$p$  das von der Einheit der Oberfläche getragene Gewicht;

so hat man in den Formeln des genannten Paragraphen  $ph + \frac{1}{2} \omega h^2$  für  $\frac{1}{2} \omega h^2$  zu setzen. Der Winkel für das Prisma des grössten Druckes wird stets derselbe bleiben. Für den Druck wird man aus § 229 erhalten

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{(\cos \frac{1}{2}(\tau + \varepsilon))^2}$$

und für den Fall, in welchem die Wand vertical ist,

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2 - 2\gamma ht.$$

§ 235. Nennt man  $h''$  den Werth von  $h$ , für welchen  $Q=0$  wird, so hat man

$$h'' = h - \frac{2p}{\omega},$$

und die Formeln, welche in § 230 für  $Q$  und in § 231 für die Entfernung des Angriffspunktes von  $Q$  von der untern Grenze der Wand gefunden wurden, werden auf den vorliegenden Fall Anwendung finden können, sobald man  $h''$  für  $h$  schreibt.

§ 236. Setzt man, wie in § 232, die Cohäsion der Erdmasse gleich Null, so erhält man für den Druck

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2 \cos \varepsilon,$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2.$$

Der Abstand des Angriffspunktes von  $Q$  von der untern Grenze der Wand ist

$$\frac{h}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\omega h + 3\rho}{\omega h + 2\rho},$$

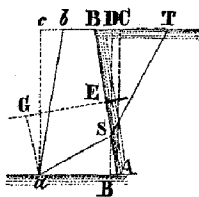
und bei einer verticalen Wand

$$\frac{1}{3} h \cdot \frac{\omega h + 3\rho}{\omega h + 2\rho}.$$

§ 237. Hat man statt der Erde eine Flüssigkeit, so kann man auf diesen Fall die obigen Ausdrücke für  $Q$  anwenden, wenn man  $\varepsilon = 90^\circ$  setzt, woraus für eine verticale Wand  $t = 1$  folgt. Der obige Werth für die Entfernung des Angriffspunktes des Druckes entspricht in gleicher Weise den Erdmassen, deren Cohäsion gleich Null gesetzt wird, wie den flüssigen Materien.

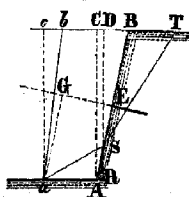
**Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke widersteht.**

Fig. 29.



das Herabgleiten auf einer geneigten Ebene, welche

Fig. 30.



letztere Art des Bruches untersucht werden.

Man behalte die Bezeichnungen aus § 225 u. folgd. bei und nenne ferner

§ 238. Man nehme an, der Bruch der Mauer  $ABba$  (Fig. 29 und 30) könne in der schiefen Richtung  $aS$  erfolgen. Der Bruch kann eintreten, indem entweder der Theil  $SBba$  auf der Bruchfläche herabgleitet, oder, indem dieser obere Theil durch eine Drehung um die Kante  $a$  umgestürzt wird. Der Bruch durch

durch die Dicke der Mauer geht, lässt sich durch verschiedene Constructions verhindern, und auch abgesehen hiervon, wird doch diese Art des Bruches im Allgemeinen nicht eintreten, wenn die Mauer die erforderliche Dicke besitzt, um dem Bruche durch Umsturz zu widerstehen.<sup>1)</sup> Es soll hier desshalb nur die

<sup>1)</sup> Man vergleiche § 217.

- $a$  die Breite  $Aa$  der Basis der Mauer;  
 $h$  die verticale Höhe  $AC$ ;  
 $m$  das Verhältniss der Basis zur Höhe für die Böschung der äussern Seite der Mauer;  
 $\Pi$  das Gewicht einer Volumeneinheit der Mauermasse;  
 $R$  die Cohäsion der Mauermasse für die Flächeneinheit (siehe § 211);  
 $F$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten der Erde an der innern Fläche der Mauer;  
 $\varepsilon$  den Winkel, welchen die innere Fläche  $AB$  mit der Verticalen einschliesst;  
 $z$  die unbestimmte Höhe  $SD$ .

Denkt man sich nun den Erddruck gegen  $BS$  als eine in  $E$  angreifende, rechtwinklig gegen die Mauer gerichtete Kraft, so ist nach § 230 der Werth desselben

$$\frac{1}{2} \omega z f^2 (z - h') \cos \varepsilon.$$

Die Entfernung  $SE$  ist nach § 231

$$\frac{z}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{z - \frac{3}{2} h'}{z - h'},$$

woraus für den Hebelarm  $aG$  der in Rede stehenden Kraft folgt

$$\frac{h - z}{\cos \varepsilon} + \frac{z}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{z - \frac{3}{2} h'}{z - h'} + a \sin \varepsilon.$$

Der Ausdruck für das Moment des Erddruckes ist demnach

$$\frac{1}{2} \omega z f^2 (z - h') \cos \varepsilon \left\{ \frac{h - z}{\cos \varepsilon} + \frac{z}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{z - \frac{3}{2} h'}{z - h'} + a \sin \varepsilon \right\},$$

wobei die oberen und die unteren Zeichen beziehlich für die Fälle gelten, welche durch Fig. 29 und 30 dargestellt werden. Der obige Ausdruck gilt auch für den Fall, in welchem die Erdmasse gleichmässig belastet ist, wenn man nach § 235  $h''$  für  $h'$  schreibt.

§ 239. Das Moment der Kräfte, welche dem Umsturz widerstreben, bezogen auf die Kante  $a$ , besteht aus folgenden Theilen:

1. das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Rechteck  $ACca$  darstellt, nämlich

$$\frac{1}{2} \Pi a^2 h;$$

2. minus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck  $abc$  darstellt, nämlich

$$\frac{1}{8} \Pi m^2 h^3;$$

3. minus oder plus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck  $ACB$  darstellt,

$$\frac{1}{2} \Pi h^2 \tan \varepsilon (a \mp \frac{1}{3} h \tan \varepsilon);$$

4. minus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck  $aRS$  darstellt,

$$\frac{1}{3} \Pi (h - z) \left\{ a \mp (h - z) \tan \varepsilon \right\}^2;$$

5. minus oder plus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck  $ARS$  darstellt,

$$\frac{1}{2} \Pi (h - z)^2 \tan \varepsilon \left\{ a \mp \frac{2}{3} (h - z) \tan \varepsilon \right\};$$

6. das Moment des Widerstandes gegen den Bruch in  $aS$ ,

$$\frac{1}{3} R \left\{ (h - z)^2 + [a \mp (h - z) \tan \varepsilon]^2 \right\};$$

7. das Moment der Reibung und Adhärenz der Erde an der innern Seitenfläche der Mauer,

$$\frac{1}{2} F \omega z l^2 (z - h') \cos \varepsilon . a \cos \varepsilon .$$

§ 240. Das Gleichgewicht der Mauer wird für einen gegebenen Werth von  $z$  sich dadurch ausdrücken lassen, dass man diese Momentensumme dem Momente des Erddruckes gegen  $RS$  gleichsetzt. Löset man darauf diese Gleichung für  $a$  auf und bestimmt den Werth von  $z$ , für welchen  $a$  ein Maximum wird, so erfährt man zugleich die Richtung, in welcher der Bruch der Mauer erfolgen würde, wenn die Dicke  $a$  etwas zu klein wäre, so wie den kleinsten Werth, welchen man dieser Dicke beilegen darf.

§ 241. Wir wollen annehmen, die innere Seitenfläche der Mauer sei vertical, und die Cohäsion der Erde, so wie der Mauermasse sei Null; daraus folgt  $\varepsilon = 0$ ,  $h' = 0$ ,  $R = 0$ . Ferner wollen wir die Reibung der Erde an der innern Seite der Mauer gleich Null, also  $F = 0$ , setzen. Gibt es in diesem Falle keine

Belastung auf der horizontalen Oberfläche der Erdmasse, so ist das Moment des Erddruckes, bezogen auf die Kante  $a$ ,

$$\frac{1}{2} \omega z^2 t^2 (h - \frac{2}{3} z);$$

und das Moment der Stabilität der Mauer ist

$$\frac{1}{2} \Pi a^2 h - \frac{1}{3} \Pi a^2 (h - z) - \frac{1}{6} \Pi m^2 h^3.$$

Setzt man diese beiden Grössen einander gleich und sucht  $a$ , so findet man

$$a = \sqrt{\frac{\omega z^2 t^2 (3h - 2z) + \Pi m^2 h^3}{\Pi (h + 2z)}}.$$

Differentiirt man und setzt dann den ersten Differentialquotienten gleich Null, so erhält man, um den Werth von  $z$  zu bestimmen, für welchen  $a$  ein Maximum wird, die Gleichung

$$8 \omega t^2 \Pi z^3 - 6 \omega t^2 \cdot \Pi h^2 z + 2 \Pi^2 m^2 h^3 = 0.$$

Der hieraus gefundene Werth, in die vorhergehende Gleichung gesetzt, giebt die kleinste mögliche Dicke für die Basis der Mauer.

§ 242. Ist die äussere Seitenfläche der Mauer ebenfalls vertical,  $m = 0$ , so reducirt sich der vorstehende Ausdruck für  $a$  auf

$$a = \sqrt{\frac{\omega z^2 t^2 (3h - 2z)}{\Pi (h + 2z)}}.$$

Der Werth von  $z$ , für welchen  $a$  ein Maximum wird, ist

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{3h},$$

und die kleinste Dicke, welche man der Mauer geben darf, ist

$$a = ht \sqrt{\frac{9\omega}{(12 + 8\sqrt{3}) \Pi}}.$$

Es ist also die Höhe  $RS$  ungefähr  $\frac{1}{8}$  der Höhe der Mauer und die kleinste Dicke ist nahe gleich

$$0,59 \cdot ht \sqrt{\frac{\omega}{\Pi}}.$$



**Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, dass eine Drehung der ganzen Mauer um die äussere Kante ihrer Basis erfolgen könne.**

§ 243. Wir betrachten jetzt die Mauer als einen Körper, der auf einer Basis steht, zu welcher er keine Adhärenz besitzt, während die Cohäsion der Mauermasse gross genug angenommen wird, um eine Trennung der Masse verhindern zu können, im Falle der Erddruck die Mauer, durch eine Drehung um die äussere Kante ihrer Basis, umstürzen würde. Behält man die Benennungen des § 238, welche sich auf Fig. 29 und 30 beziehen, bei, so findet man das Moment des Erddruckes auf  $AB$  aus dem in dem genannten Paragraphen entwickelten Ausdrücke, wenn man  $z = h$  setzt, nämlich

$$\frac{1}{2} \varpi t^2 \left\{ \frac{1}{3} h^2 (h - \frac{3}{2} h') \mp ah (h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\}.$$

Das Moment der Kräfte, welche den Umsturz zu verhindern suchen, findet man ebenfalls aus dem in § 239 entwickelten Ausdrücke, wenn man  $z = h$ ,  $R = 0$ ,  $F = 0$  setzt, nämlich

$$\frac{1}{4} \Pi h \left\{ a^2 \mp ah \tan \varepsilon + \frac{1}{3} h^2 (\tan^2 \varepsilon - m^2) \right\}.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich und löset die Gleichung für  $a$  auf, so erhält man

$$\begin{aligned} a = \pm \frac{1}{2} \left\{ h \tan \varepsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 (h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\} \\ + \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ h \tan \varepsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 (h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\}^2 \\ + \frac{\varpi}{3\Pi} t^2 h (h - \frac{3}{2} h') - \frac{1}{3} h^2 (\tan^2 \varepsilon - m^2) } \end{aligned}$$

als die Breite, welche man der Basis der Mauer zu geben hat.

Dieser Ausdruck wird auch in dem Falle gelten, dass die horizontale Oberfläche der Erdmasse belastet ist, wenn man nur  $h''$  für  $h'$  schreibt und für  $h'$  den in § 135 angegebenen Werth nimmt.

§ 244. Ist die innere Seitenfläche der Mauer vertical,  $\epsilon = 0$ , so erhält man für  $a$

$$a = \sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi} t^2 h (h - \frac{3}{2} h') + \frac{1}{3} m^2 h^2},$$

wo  $t = \tan \frac{1}{2} \tau$  ist, in Uebereinstimmung mit § 229.

§ 245. Ist die äussere Seitenfläche der Mauer ebenfalls vertical,  $m = 0$ , so hat man

$$a = t \sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi} \cdot h (h - \frac{3}{2} h')}.$$

§ 246. Wird die Cohäsion der Erdmasse gleich Null angenommen, so muss man, wenn die horizontale Oberfläche der Erde belastet ist, nach § 235,  $-\frac{2\rho}{\varpi}$  für  $h'$  in den allgemeinen Ausdruck für  $a$  in § 243 setzen. Giebt es aber keine Belastung, so hat man  $h' = 0$  zu setzen. Aus dem Ausdrucke in § 243 wird alsdann

$$a = \pm \frac{1}{2} h \left\{ \tan \epsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 \sin \epsilon \cdot \cos \epsilon \right\} \\ + h \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \tan \epsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 \sin \epsilon \cdot \cos \epsilon \right\}^2 + \frac{\varpi}{3\Pi} t^2 - \frac{1}{3} (\tan^2 \epsilon - m^2)}.$$

§ 247. Ist die innere Seite der Mauer vertical, während die Cohäsion der Erde gleich Null angenommen wird, so hat man

$$a = h \sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi} t^2 + \frac{1}{3} m^2}.$$

§ 248. Sind endlich beide Seiten der Mauer vertical, während die Cohäsion der Erde gleich Null angenommen wird, so hat man

$$a = ht \sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi}};$$

so dass die geringste Dicke, welche man der Mauer geben darf, nahe gleich  $0,577 \cdot ht \sqrt{\frac{\varpi}{\Pi}}$  ist, ein Resultat, welches von dem des § 242 nicht merklich verschieden ist.

§ 249. Die in den drei vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln lassen sich auf den Fall, in welchem man statt der Erde eine Flüssigkeit hat, anwenden, wenn man  $\tau = 90^\circ$  setzt, woraus  $t = 1$  folgt, wenn die innere Seite der Mauer vertical ist.

**Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, dass ein Fortgleiten der Mauer auf ihrem Fundamente erfolgen könne.**

§ 250. Man kann die Mauer auch als einen Körper betrachten, der auf einer horizontalen Basis steht und mit dieser durch eine schwache Adhärenz verbunden ist, während der Erddruck ihn auf derselben fortzuschieben sucht, ohne eine Trennung in der Mauermasse zu bewirken. Unter Beibehaltung der in § 238 angenommenen Benennungen, welche sich auf Fig. 29 und 30 beziehen, nenne man

$\Phi$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten der Mauer auf der Basis  $Aa$ ;

$\Gamma$  die zwischen dieser Basis und der Mauermasse bestehende Adhärenz.

Die Kraft, welche das Gleiten hervorzubringen sucht, ist die horizontale Composante des Erddruckes  $Q$ , dessen Werth in § 230 angegeben wurde, d. h.

$$\frac{1}{2} \omega h t^2 (h - h') \cos \varepsilon^2.$$

Das Gewicht der Mauer ist

$$\Pi \left\{ ah - \frac{1}{2} h^2 (m \pm \tan \varepsilon) \right\},$$

und daher die Kraft, welche das Gleiten zu verhindern sucht,

$$\pm \frac{1}{2} \Phi \omega h t^2 (h - h') \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \Phi \Pi \left\{ ah - \frac{1}{2} h^2 (m \pm \tan \varepsilon) \right\} + \Gamma a$$

Setzt man diese beiden Kräfte einander gleich, so drückt man damit die Bedingung für das Gleichgewicht dieses Systemes aus; löset man die Gleichung für  $a$  auf, so erhält man

$$a = \frac{\frac{1}{2} \omega t^2 (h - h') \cos \varepsilon^2 (1 \mp \Phi \tan \varepsilon) + \Phi \Pi h (m \pm \tan \varepsilon)}{\Phi \Pi h + \Gamma}$$

als den Ausdruck für die geringste Breite, welche man der Basis der Mauer geben darf.

Dieser Ausdruck wird auch für den Fall gelten, dass die horizontale Oberfläche der Erdmasse belastet ist, wenn man  $h''$  für  $h'$  schreibt, und für  $h''$  den in § 235 angegebenen Werth nimmt.

§ 251. Ist die innere Seitenfläche der Mauer vertical,  $\epsilon = 0$ , so ist der Werth von  $a$

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varpi t^2 (h - h') + \Phi \Pi m h}{\Phi \Pi h + \Gamma},$$

in welcher Formel  $t = \tan \frac{1}{2} \tau$  ist, zufolge § 229.

§ 252. Ist die äussere Seitenfläche der Mauer ebenfalls vertical,  $m = 0$ , so hat man

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varpi t^2 (h - h')}{\Phi \Pi h + \Gamma}.$$

§ 253. Wird die Cohäsion der Erdmasse gleich Null angenommen, so muss man, wenn die horizontale Oberfläche der Erde belastet ist, nach § 235,  $-\frac{2\rho}{\varpi}$  für  $h'$  in die beiden vorhergehenden Ausdrücke setzen. Giebt es aber keine Belastung, so hat man  $h' = 0$  zu setzen. Nimmt man zugleich die Cohäsion (die Adhärenz) zwischen der Mauer und der Basis gleich Null an, so wird aus dem Ausdrücke in § 250

$$a = \frac{h}{2} \left\{ \frac{\varpi}{\Phi \Pi} t^2 \cos^2 (1 \mp \Phi \tan \epsilon) + m \pm \tan \epsilon \right\}.$$

§ 254. Ist die innere Seite der Mauer vertical, während die Cohäsion Null ist, so hat man

$$a = \frac{h}{2} \left\{ \frac{\varpi}{\Phi \Pi} t^2 + m \right\}.$$

§ 255. Sind endlich beide Seiten der Mauer vertical, während die Cohäsion Null ist, so hat man

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varpi t^2}{\Phi \Pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varpi}{\Phi \Pi} \left( \tan \frac{\tau}{2} \right)^2.$$

§ 256. Die Formeln in den drei vorhergehenden Paragraphen werden auch für den Fall gelten, dass statt der Erde das Wasser den Druck ausübt, wenn man  $\tau = 90^\circ$  setzt, woraus  $t = 1$  folgt, wenn die innere Seite der Mauer vertical ist.

Alle seit § 238 gefundenen Resultate gelten sowohl für eine Mauer, die aus einer homogenen Masse besteht, als für eine Mauer, die aus Steinen aufgeführt ist, welche in horizontalen Schichten gelegt sind.

### Fünftes Kapitel.

#### Berechnung der Fundamente, wenn die Mauern auf einem zusammendrückbaren Grunde stehen.

§ 257. Wenn man das Fundament einer Mauer nicht auf einem festen Boden, der sich nicht merklich zusammendrücken lässt, hat legen können, so wird der daraus sich ergebende Nachtheil weniger bedeutend sein, wenn die Mauer, vermöge der Zusammendrückbarkeit des Baugrundes, sich in verticaler Richtung senkt, ohne sich nach der einen oder andern Seite zu neigen. Das Fundament muss daher so angelegt werden, dass die Mauer kein Bestreben haben kann, sich schief zu stellen. Wir gehen dabei von der Voraussetzung aus, dass der Baugrund, so weit derselbe von dem Fundamente bedeckt wird, überall gleich stark zusammendrückbar sei.

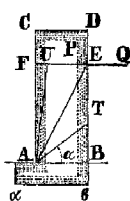
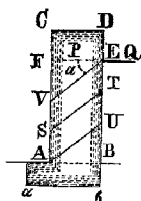
Wirken auf die Mauer nur vertical gerichtete Kräfte, so wird der genannten Bedingung Genüge geleistet, wenn der Schwerpunkt des Gewichtes der Mauer und der Gewichte, womit diese belastet ist, sich in der Verticallinie befindet, welche durch den Schwerpunkt der Grundfläche des Fundamentes geht.

§ 258. Allgemein: wirken auf die Mauer vertical und horizontal gerichtete Kräfte, so ist kein Bestreben zu einer Drehbewegung vorhanden, wenn die Resultante dieser Kräfte durch den Schwerpunkt der Grundfläche des Fundamentes geht, d. h. wenn die Summe der Momente dieser Kräfte, bezogen auf diesen Schwerpunkt, gleich Null ist <sup>1)</sup>.

1) Diese Theorie wird in einem von Lambel, französischen Festungsbau-director (directeur des fortifications), im Jahre 1816 abgefassten und 1822 veröffentlichten Memoire vorgetragen. Ebenso in dem Memoire von Français im Mémorial de l'officier du génie, Nr. 4.

Fig. 31.

Fig. 32.



§ 259. Als Beispiel nehmen wir die durch Fig. 31 und 32 dargestellte Mauer, deren Gleichgewicht in § 200 u. folgd. untersucht wurde, wobei wir ein rechteckiges Profil des Fundamentes voraussetzen. Wenn man unter Beibehaltung der früheren Benennungen

$a'$  die Breite  $a\beta$  des Fundamentes;

$h$  die Höhe  $B\beta$  desselben nennt, so erhält man für das Moment des Gewichtes der Mauer und des Fundamentes, bezogen auf die Mitte der Basis  $a\beta$

$$\frac{1}{2} (P + \Pi ah) (a' - a),$$

und für das Moment der Horizontalkraft  $Q$ , bezogen auf denselben Punkt

$$Q (h + h').$$

Die Breite  $a'$  muss daher aus der Gleichung

$$Q (h + h') = \frac{1}{2} (P + \Pi ah) (a' - a)$$

bestimmt werden; es folgt

$$a' = a + \frac{2Q(h+h')}{P + \Pi ah}.$$

§ 260. In jedem andern Falle, und besonders, wenn die Mauern dem Erd- und Wasserdrucke zu begegnen haben, wird man keine Schwierigkeit darin finden, die Breite der Fundamente so zu bestimmen, dass der in Rede stehenden Bedingung Genüge geschieht, da die in dem vorhergehenden Kapitel gefundenen Resultate die Grösse und Richtung des Druckes angeben. Man wird es so anordnen, dass das Moment dieses Druckes, bezogen auf den Mittelpunkt der Grundfläche des Fundamentes, gleich sein wird dem Momente des Gewichtes der Mauer, bezogen auf denselben Punkt.



§ 263. Unter allen Erdarten nimmt feiner, trockener Sand die grösste Böschung an. Nach einem Versuche von Gadroy <sup>1)</sup> ist diese Böschung  $\frac{5}{3}$ , woraus  $f=0,6$  und  $\tau=59^0$  folgt.

§ 264. Nach den Versuchen von Rondelet <sup>2)</sup> beträgt der Winkel, welchen die Böschungsebene mit dem Horizonte bildet, bei feinem, sehr trockenem Sande und pulverisirtem Sandstein  $34^0,5$  woraus  $f=0,69$  und  $\tau=55^0,5$  folgt.

Nach den nämlichen Versuchen <sup>3)</sup> beträgt der Winkel, welchen die Böschungsebene mit dem Horizonte bildet, bei gewöhnlicher, gut getrockneter und pulverisirter Erde wenigstens  $46^0 50'$ , woraus  $f=0,94$  und  $\tau=43^0 10'$  folgt. Feuchtet man dieselbe Erde etwas an, so wird dieser Winkel höchstens gleich  $54^0$ , woraus  $f=1,38$  und  $\tau=36^0$  folgt.

§ 265. Nach Barlow <sup>4)</sup> ist die Böschung des leichtesten Sandes  $\frac{5}{4}$ , woraus  $f=0,8$  und  $\tau=51^0$  folgt. Nach demselben Experimentator ist die Böschung der dichtesten und festesten Dammerde  $\frac{5}{7}$ , woraus  $f=1,4$  und  $\tau=35^0$ .

§ 266. Nach Colonel Pasley <sup>5)</sup> ist die Böschung der nicht cohärirenden Erde (loose shingle, aufgelöster Schiefer genannt), deren er sich bei seinen Versuchen bediente und welche vollkommen trocken war, gleich  $\frac{6,25}{5}$ , woraus  $f=0,8$  und  $\tau=51^0$  folgt.

§ 267. Wir werden jetzt die Versuche aufführen, welche in der Absicht angestellt wurden, direct den

1) *Traité expérimental et analytique de la poussée des terres*, par M. Mayniel, pag. 1.

2) *Art de bâtir*, tome IV., pag 174.

3) *Idem*, pag. 178, 179.

4) *An essay on the strength and stress of timber*, pag. 249.

5) *A course of military instruction*, vol. III. pag. 562. Dieses Werk enthält eine Reihe von Versuchen über die Wirkung der Erde gegen die Bekleidungen. In Kleinen angestellte Versuche sind offenbar nicht geeignet, von dieser Wirkung eine klare Vorstellung zu verschaffen, da die einzelnen Elemente dieser Wirkung sich mit der Höhe der Bekleidungen in verschiedenen Verhältnissen ändern. Indessen tritt keines der von dem Experimentator erhaltenen Resultate mit der in den vorhergehenden Kapiteln aufgestellten Theorie in Widerspruch. Diese Resultate zeigen nur, dass die Reibung und Adhärenz der Erde an der Innern Seitenfläche der Mauern, welche bei den Rechnungen in § 238 u. folgd. vernachlässigt wurden, merkliche Wirkungen hervorbringen, wenn die Höhe der Bekleidungen sehr klein ist, wie sie dies bei jenen Versuchen war. Die von Mayniel in seinem *Traité de la poussée des terres* beschriebenen Versuche können zu ähnlichen Bemerkungen Veranlassung geben.



Druck zu messen (welche Sand und andere nicht cohärirende Materien, welche zuweilen halbflüssige Materien genannt werden) gegen den Boden oder die Seitenwände der sie enthaltenden Gefässe ausüben.

Nach den Beobachtungen von Delanges <sup>1)</sup> ist der Winkel, welchen die natürliche Böschung mit dem Horizonte bildet, für

sehr feinen Flusssand . . . . .	33°
Hirsekörner . . . . .	23°
Vogeldunst . . . . .	22° 30'
Bleischrot, dreimal so dick . . . . .	25°

Das Gewicht eines Kubikzolls ist für

Sand . . . . .	7,3 Drachm.
Hirse . . . . .	4,2 "
Vogeldunst . . . . .	39,3 "

§ 268. Druck der halbflüssigen Körper auf den Boden eines cylindrischen Gefässes mit verticaler Axe. Der Boden war beweglich und der von demselben getragene Druck wurde durch eine Waage gemessen.

Dimensionen der Gefässe.	Höhe der halbflüssigen Körper	Druck auf den Boden der Gefässe für			
		Sand		Hirse	Vogeldunst
	Zoll	Drachm. Gr.		Drachm. Gr.	Drachm. Gr.
Höhe: 6 Zoll, Durchmesser: 2 Zoll	2	21	15	18 0	177 0
	4	28	0	26 30	220 0
	6	35	0	33 45	
Höhe: 6 Zoll, Durchmesser: 3 Zoll	2	76	39	49 0	
	6	139	0	88 0	

Der Druck ist geringer als das Gewicht der in dem Gefässe enthaltenen Materie (für Sand ungefähr  $\frac{1}{3}$ , für Hirse und Vogeldunst ungefähr  $\frac{1}{2}$  dieses Gewichtes); auch ist er nicht der Höhe proportional.

Bei einer Wiederholung dieser Versuche mit conischen Gefässen fand man den Bodendruck geringer als bei den cylindrischen Gefässen, so dass es scheint, als fände

<sup>1)</sup> Statica e meccanica de' semifluidi, Memorie di matematica e fisica della Società italiana, IV., 1788. Es finden sich in diesem Memoire sehr interessante Beobachtungen über die Bewegung des Sandes beim Ausflusse aus einem Gefässe durch eine Seiten- oder Bodenöffnung.

in diesem Falle das Hinabgleiten der auf den Boden drückenden, verticalen Säule mehr Hindernisse, als wenn diese Säule unmittelbar von festen Wänden umgeben wäre.

Man hat zu ermitteln gesucht, ob die halbflüssigen Körper einen Verticaldruck von unten nach oben ausübten, konnte jedoch keine merkliche Wirkung beobachten.

§ 269. Druck der halbflüssigen Körper gegen eine verticale Wand. Man nahm zu diesen Versuchen eine kleine parallelepipedische Kiste, deren eine Seitenwand um ihre untere Kante drehbar war, während die gegenüber befindliche Wand sich so stellen liess, dass man die Länge der Kiste abändern konnte. Die Breite und Höhe war 6 Zoll. Die Gewichte, welche dem Seitendruck der halbflüssigen Körper das Gleichgewicht hielten, wirkten in einer Entfernung von 7 Zoll 7 Linien von der Drehungsaxe der beweglichen Wand.

Höhe des halbflüssigen Körpers	Länge des halbflüssigen Körpers	Gewichte, welche dem Seitendrucke das Gleichgewicht halten für		
		Sand	Hirse	Vogelndunst
Zoll	Zoll	Drachm. Gr.	Drachm. Gr.	Drachm. Gr.
2	4			14 0
2	6	2 22	2 45	
4	6			69 30
4	10	9 30	14 30	
6	2	23 0	27 7	
6	4			206 0
6	6	24 45	27 22	
6	8	24 52	31 30	206 0
9	16	24 45	32 0	

§ 270. Geschieht der Ausfluss eines halbflüssigen Körpers durch eine Oeffnung im Boden eines Gefässes, so bleibt, wenn die Höhe hinreichend gross ist, die obere Grenzfläche des Körpers zuerst eben und horizontal, während sie sich bis zu einem gewissen Niveau senkt, wo in der Mitte eine Depression und endlich die conische Gestalt eintritt, welche der natürlichen Böschung entspricht. Die Ausflussgeschwindigkeit ist weit geringer als bei den ganzflüssigen Körpern.

§ 271. Nach den Versuchen von Huber-Burnaud<sup>1)</sup> mit sehr feinem Sande erhält man durch eine Oeffnung

<sup>1)</sup> Lettre sur l'écoulement et la pression du sable. Bibliothèque universelle, rédigée à Genève, sciences et arts, 1829.

in dem Boden eines Gefässes in derselben Zeit auch durchaus dieselbe Ausflussmenge, wie hoch auch anfänglich der Sand über der Oeffnung stehen möge. Eben so verhält es sich bei Oeffnungen, die sich in den Seitenwänden befinden. In horizontaler Richtung fliesst aber der Sand nicht mehr aus, wie gross auch die Höhe desselben in der Kiste sein möge, wenn der Durchmesser der Oeffnung nicht ungefähr der Dicke der Wand gleichkommt.

Sand, welcher in eine zweimal unter einem rechten Winkel gebogene Röhre geschüttet wird, steigt nicht, wie ein flüssiger Körper, in dem zweiten verticalen Theile wieder hinauf; er verbreitet sich kaum etwas in dem horizontalen Theile der Röhre.

Der Druck, welchen man auf die obere Grenzfläche des in einer Kiste befindlichen Sandes ausübt, bleibt ganz ohne Einfluss auf die Ausflussgeschwindigkeit bei einer Oeffnung in dem Boden dieser Kiste.

§ 272. Der Böschungswinkel des Sandes wurde von Huber-Burnaud zu 30 bis 33 und selten zu 35 Grad beobachtet. Für Erbsen oder Schrot ist dieser Winkel fast derselbe und es gelten in jeder Beziehung die nämlichen Gesetze.

§ 273. Ueber den Druck auf den Boden eines Gefässes hat der nämliche Physiker die folgenden Beobachtungen gemacht:

1. Bedeckt man ein Ei einige Zoll hoch mit Sand und legt darauf ein Gewicht von 25 Kil., so wird das Ei nicht zerdrückt. Dasselbe ist der Fall, wenn der Sand in Bewegung ist, während er durch eine Oeffnung in dem Boden des Gefässes ausfliesst.

2. Wenn zwei verticale communicirende Röhren Quecksilber enthalten, so wird das gemeinschaftliche Niveau des Quecksilbers in den beiden Röhren nicht verändert, wenn man bei der einen Röhre Sand auf das Quecksilber schüttet. Diese Beobachtung wurde bei einer Röhre von 0,65 Meter Höhe und 0,035 Meter Durchmesser gemacht. Man kann ohne das Resultat zu ändern, auf die obere Grenzfläche der Sandsäule einen starken Druck ausüben.

3. Bringt man bei der nämlichen Röhre einen beweglichen Boden an und schüttet darauf Sand oder

trockene Erbsen ein, so bemerkt man, dass dieser Boden nur einen sehr kleinen und unmerklichen Theil von dem Gewichte dieser Materien (0,12 Kil. von 1,5 bis 2 Kil.) aufzunehmen hat, während fast das ganze Gewicht von der Reibung an der Seitenwand der Röhre getragen wird.

Diese Versuche glückten ebenfalls bei einer Röhre von 4 Zoll im Durchmesser, ja selbst bei einer Röhre, die sich nach unten erweiterte.

Giesst man Wasser in die mit Sand angefüllte Röhre, so erhält sich, ohne auszufließen, das Wasser zugleich mit dem Sande darin.

§ 274. Eine Bestätigung finden diese Versuche und Beobachtungen in denen von Moreau, Capitain im französischen Genie-Corps <sup>1)</sup>. Derselbe bediente sich bei feinem, feuchtem Sande einer Kiste, welche 4 Meter lang, 1 Meter breit und eben so tief war. Im Boden befanden sich Oeffnungen von 2,22 Meter Länge und 0,27 und 0,6 Meter Breite, die durch ein Brett, das in einem Gewinde drehbar war, verschlossen wurden, indem das Brett durch ein Seil gehalten wurde, welches über eine Rolle ging und eine mit Gewichten belastete Waagschale trug. Die horizontale Oberfläche des Sandes in der Kiste wurde mit Gewichten belastet, welche über 4300 Kil. für den Quadratmeter betrugen. Andere Versuche wurden mit trockenem Sande in einer kleineren Kiste angestellt. Der Experimentator schliesst daraus, dass, wenn die Länge und Höhe eines Sandkörpers dieselben bleiben, der Druck auf einen bestimmten Theil des Bodens, sobald dieser nachgiebt, einen constanten Werth annimmt, mag nun der Sand unbelastet, oder mit beträchtlichen, ja selbst beliebigen Gewichten belastet sein. Ehe ein Theil des Bodens nachgiebt, scheint indessen der anfängliche Druck auf denselben grösser zu sein, wenn die Belastung beträchtlicher ist; der endliche Druck ist stets derselbe.

Als man die Neigung der Seitenflächen der Sandprismen, die die beweglichen Theile des Bodens zur Basis haben, aus der Bedingung suchte, dass das Gewicht dieser Prismen dem beobachteten Drucke gleich sein

1) Notice sur une nouvelle manière de fonder en mauvais terrain. Mémorial de l'officier du génie, Nr 11.

müsste, fand man abweichende Resultate, welche für den Winkel der Böschung mit dem Horizonte 46 bis 55 Grad geben. Da dieser Winkel grösser ist, als die natürliche Böschung des Sandes, so ist auch der Druck grösser als das Gewicht der Prismen, die durch diese letztere Böschung gebildet werden.

§ 275. Die im vierten Kapitel vorgetragene Theorie stimmt mit den Resultaten dieser Versuche überein. Die in § 229 gegebene Formel repräsentirt (wenn man darin  $\gamma = 0$  setzt) den Druck gegen die Seitenwand eines Gefässes, wofür die Breite desselben wenigstens der Basis des Prisma's des grössten Druckes gleichkommt, Es wird leicht sein, aus den nämlichen Grundsätzen die in Rede stehende Formel für den Fall abzuleiten, in welchem die Breite des Gefässes nicht so gross ist. Man sieht, dass dieser Druck beträchtlich ist und mit der Höhe sehr rasch zunimmt. Es ist daher leicht zu denken, dass, wenn der Boden anfängt nachzugeben, an verticalen, oder wenig nach innen geneigten Seitenwänden eine Reibung entstehen kann, welche die Wirkung der Schwerkraft auf den Theil des Systemes, welcher sich gegen diese Wände stützt, fast ganz neutralisirt. Es scheint indessen, dass noch weitere Versuche nothwendig sind, um dieses Kapitel vollständig abzuschliessen.

### Im natürlichen Zustande befindliche Erde.

§ 276. Die meisten Erdarten, ja selbst der Sand, erlangen einen ziemlichen Zusammenhang, wenn die Theile lange in Berührung mit einander bleiben und stark zusammengepresst werden. In diesem Zustande kann man Lehm bis auf 1 bis 2 Meter, und sehr thonhaltige Erde bis auf 3 bis 4 Meter und darüber vertical abgraben, ohne dass ein Herabfallen eintrete. Man kennt hierüber keine genaue Beobachtungen. Die Cohäsion derselben Erde ändert sich ausserdem mit dem Grade der Feuchtigkeit.

Den Werth des Coefficienten  $\gamma$  (siehe § 188) erhält man aus der Formel in § 192 und § 229

$$\gamma = \frac{1}{4} \omega h' \tan^2 \frac{1}{2} \tau,$$

wo  $h'$  die Höhe ist, bis auf welche die Erde sich vertical abgraben lässt, ohne herabzufallen,  $\omega$  das Gewicht einer

Volumeneinheit der Erde und  $\tau$  der Winkel, welchen die Verticale mit der natürlichen Böschungsebene der Erde bildet.

Setzt man für Lehm  $\omega = 1500$  Kil.,  $\tau = 40^\circ$ ,  $h' = 1$  Meter, so findet man  $\gamma = 136$  Kil.

Setzt man für sehr stark zusammenhängende Erde  $\omega = 1800$  Kil.,  $\tau = 35^\circ$ ,  $h' = 4$  Meter, so findet man  $\gamma = 568$  Kil.

Man kann diese Zahlen als die Grenzen des Werthes des Coefficienten  $\gamma$  ansehen, wenn der Meter zur Längen- und das Kilogramm zur Gewichtseinheit angenommen werden.

§ 277. Wird eine Erdmasse, die sich im natürlichen Zustande befindet, eben abgegraben, und bleibt die Böschungsfläche dem Einflusse der Witterung ausgesetzt, so verändern die abwechselnde Trockenheit und Nässe, so wie der Frost die Eigenschaften der Erde. Die der Oberfläche nahe liegenden Theile werden sich nach und nach ablösen; und im Allgemeinen wird die Erde das Bestreben zeigen, von selbst die Böschung mit der Zeit anzunehmen, welche sie sofort angenommen haben würde, wenn die Cohäsion nicht wäre. Wird aber die Seitenfläche mit einem Mauerwerk bekleidet, so wird diese Veränderung nicht eintreten, und die Erde wird sich dann bei einer geringeren Böschung oder einer weniger dicken Bekleidung halten können, als wenn die Cohäsion der Theile vorher zerstört worden wäre.

#### **Einfluss des Wassers, welches die Erde durchdringt.**

§ 278. Der Sand, die Pflanzenerde und die Damm-erde scheinen, wenn sie von Feuchtigkeit durchdrungen werden, keine bemerkenswerthe Veränderung zu erleiden. Schlammige und sogenannte seifige Erden lösen sich auf und können dann fast wie ein flüssiger Körper ablaufen. Bei den Erden dieser Art muss der Druck nach den Formeln berechnet werden, welche für flüssige Körper gelten, indem man dem Gewichte der Volumeneinheit den entsprechenden Werth beilegt.

Thonige Erde, vorzüglich reiner Thon, vergrößert ihr Volumen, wenn sie feucht wird, ohne desshalb flüssig zu werden, wozu sie eine sehr grosse Wassermenge aufnehmen müsste. Eine homogene Erdmasse, welche ihr

Volumen vergrössert, wirkt aber gegen eine Bekleidung gerade wie eine Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht dem der Erde gleichkommt. Obgleich daher die thonige Erde, wenn sie trocken oder nur wenig feucht ist, eine sehr grosse Cohäsion besitzt, und desshalb Bekleidungen von geringer Dicke zu bedürfen scheint, so wird diese Erde doch, vermöge ihres grossen specifischen Gewichtes, am gefährlichsten von allen, wenn das Wasser sie durchdringen kann.

**Erde, welche aus Schichten besteht, deren Eigenschaften sich mit der Höhe der Bekleidung ändern.**

§ 279. Eine Erdmasse besteht oft aus Schichten von ungleichen Eigenschaften. Man könnte in der Rechnung auf diese Abwechselungen Rücksicht nehmen. Doch würde man wegen der verwickelten Rechnungsergebnisse und der Unsicherheit der Erfahrungscoefficienten, von diesen Untersuchungen wenig Nutzen haben. Man beachte nur 1) dass man stets einen Ueberschuss an Stabilität erhalten wird, wenn man der ganzen Masse denjenigen Reibungs- und Cohäsionscoefficienten beilegt, welcher unter den einzelnen Schichten der kleinste ist; 2) dass in keinem Falle der Erddruck grösser sein kann als der Druck einer Flüssigkeit, welche dasselbe specifische Gewicht besitzt.

**Reibung und Cohäsion des Mauerwerkes.**

§ 280. Nach den Versuchen von Rondelet <sup>1)</sup> hält sich ein gut behauener und polirter Liasstein (ein Kalkstein mit sehr feinem Korne) auf einem ähnlichen Steine im Gleichgewicht, wenn die Ebene, in welcher sich die beiden Steine berühren, um etwas mehr als 30 Grad geneigt ist. Es folgt daraus für den Reibungscoefficienten 0,58.

§ 281. Nach den Versuchen von Boistard <sup>2)</sup> ist der Reibungscoefficient für sehr harten Kalkstein mit rauh gehauener (piqué) Oberfläche im Mittel gleich 0,78.

1) Art de bâtir, tome IV., pag. 224.

2) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc. pag. 132 der Ausgabe von 1822.

§ 282. Nach Régnier<sup>1)</sup> wurde der Reibungscoefficient für eine Holzkiste, welche auf dem Strassenpflaster gleitet, zu 0,58 beobachtet.

§ 283. Nach Perronet<sup>2)</sup> fangen die Gewölbsteine auf den Fugen zu gleiten an, wenn die Neigung derselben gegen den Horizont 39 bis 40 Grad beträgt. Es folgt für den Reibungscoefficienten ungefähr 0,82.

§ 284. Nach G. Rennie<sup>3)</sup> fangen die Gewölbsteine aus Granit der neuen Londoner Brücke unter einem Winkel von 33 bis 34 Grad zu gleiten an, wenn sie gut, aber ohne Mörtel gelagert werden. Für mit frischem, gut geschlagenem Mörtel gelagerte Steine ist dieser Winkel 25 bis 26 Grad.

Die Gewölbsteine aus Sandstein gleiten, gut und ohne Mörtel gelagert, unter einem Winkel von 35 bis 36 Grad; mit Mörtel gelagert, unter einem Winkel von 33 bis 34 Grad.

§ 285. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der von Boistard<sup>4)</sup> angestellten Versuche über die Cohäsion des Mörtels, wenn man einen Theil durch Hinweggleiten über einen andern von diesem zu trennen sucht. Fünf Zoll hohe Kalksteinprismen, deren Basis rauh behauen wurde, während der Umfang unbehauen blieb, wurden auf einer ähnlichen Steinplatte befestigt; theils mit Mörtel, welcher zu  $\frac{1}{3}$  aus seit  $1\frac{1}{2}$  Jahren gelöschtem Kalk, und zu  $\frac{2}{3}$  aus durchgeseibtem und ziemlich trockenem Sande bestand, theils mit Mörtel, welcher zu  $\frac{1}{3}$  aus demselben Kalk und zu  $\frac{2}{3}$  aus Cement bestand. Diese Prismen wurden, nachdem sie 16 Tage hindurch im Trocknen gestanden hatten, vermittelst eines Seiles losgerissen, dessen Richtung parallel mit der Bruchfläche in einem Abstände von 9 bis 10 Linien von der Platte war. Das Seil ging über eine Rolle und war an seinem andern Ende mit Gewichten belastet.

---

1) Description du dynamomètre, Journal de l'École Polytechnique, 5. cahier, pag. 171.

2) Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts.

3) Experiments on the friction and abrasion of solids, in den Philosophical Transactions, part I, 1829.

4) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc. pag. 125.



Flächeninhalt der Basis der Prismen	Gewicht der Prismen	Gewicht, durch welches die Prismen losgerissen wurden, bei Mörtel aus	
		Kalk und Sand	Kalk und Cement
Quadratzoll	Pfund	Pfund	Pfund
16	8	159	60*
16	8,37	148	110
32	16,25	340	165*
32	16,12	333	115*
48	24,00	541	333
48	24,67	580	165*
64	33,75	928	465
64	33,12	300*	549

Die mit einem Sternchen bezeichneten Resultate sind unsicher und müssen verworfen werden.

§ 286. Die folgende Tabelle enthält eine neue Reihe von Versuchen mit denselben Prismen, die aufs Neue befestigt und nach 18 Tagen wieder losgerissen wurden <sup>1)</sup>).

Flächeninhalt der Basis der Prismen	Gewicht der Prismen	Gewicht, durch welches die Prismen losgerissen wurden, bei Mörtel aus	
		Kalk und Sand	Kalk und Cement
Quadratzoll	Pfund	Pfund	Pfund
16	8,25	115	32
16	8,25	152	87
32	16,12	350	130
32	16,25	416	203
48	24,37	790	377
48	24,25	794	394
64	33,50	852	515
64	33,37	865	502

Nach diesen Versuchen ist die Cohäsion des Mörtels der Fläche proportional und kann bei Mörtel aus Kalk und Sand auf wenigstens 1500 Kil. für den Quadratfuß, und bei Mörtel aus Kalk und Cement auf wenigstens 800 Kil. für den Quadratfuß (6960 Kil. und 3700 Kil. für den Quadratmeter) geschätzt werden. Nach dem

1) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc. pag. 129. In der citirten Ausgabe steht, die Prismen wären nach 18 Monaten wieder losgerissen worden. Es scheint dies ein Druckfehler zu sein. In der ersten Ausgabe der Expériences sur la main-d'oeuvre, von Boistard, erschienen 1804, und in seinem Memoire über die Gewölbe in dem zweiten Theile der von Lesage im Jahre 1810 veröffentlichten Sammlung steht 18 Tage. Dasselbe steht in den geschriebenen Copien dieses Memoire.

ersten Monat ist die Cohäsion fast eben so gross wie nach mehreren Jahren. Nach einem Jahre ist die Cohäsion des an der Luft erhärteten Cementmörtels nur halb so gross wie die des Sandmörtels.

§ 287. Bei einem andern Versuche desselben Experimentators <sup>1)</sup> wurden zwei Prismen, die bei einem Querschnitt von 64 Quadratzoll ein Gewicht von 33 Pfund hatten, der eine mit Sandmörtel und der andere mit Cementmörtel befestigt, darauf sofort ins Wasser getaucht und nach 16 Monaten wieder losgerissen. Der Sandmörtel war so weich wie bei der Verwendung, die Cohäsion betrug 115 Pfund. Der Cementmörtel war sehr hart geworden und eine Kraft von 1000 Pfund konnte das damit befestigte Prisma nicht losreißen <sup>2)</sup>.

§ 288. Aus diesen Resultaten wird sich der Werth des in § 188 u. folgd. mit  $\gamma$  bezeichneten Coefficienten berechnen lassen, wenn es sich um einen Bruch in den Fugen eines Mauerwerks handelt. Directe Versuche zur Berechnung desselben Coefficienten für den Bruch durch die Mitte der Steine kennt man bis jetzt noch nicht. Der in § 211 u. folgd. mit  $R$  bezeichnete Coefficient kann vermittelst der in § 25 u. folgd. aufgeführten Resultate gefunden werden.

---

1) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc., pag. 131.

2) Vergleicht man diese Resultate mit den in § 22 und § 23 aufgeführten, so könnte es scheinen, als ob die Cohäsion des Mörtels weit geringer sei, wenn die Kraft parallel zur Bruchfläche gerichtet ist, als wenn die Kraft normal zur Bruchfläche wirkt. Um hierüber völlig im Klaren zu sein, müssen jedoch erst vergleichende Versuche mit demselben Mörtel abgewartet werden.

Nimmt man für  $\gamma$  die in § 286 angegebenen Werthe und berechnet daraus nach den Formeln in § 196 und § 197 das zum Zerdrücken eines Würfels von 0,05 Meter Seite nöthige Gewicht, so findet man ein Resultat, welches weit kleiner ist, als die in § 11 aufgeführten. Vielleicht darf man diese Differenz zum Theil der Anwesenheit der Sand- oder Cementkörner zuschreiben, welche eine weit grössere Härte als das Bindemittel besitzen.

### Dritter Abschnitt.

### Theorie der Gewölbe.

---

§ 289. Es giebt mehrere Arten der Gewölbe; die wichtigsten sind die Tonnengewölbe, die Kreuzgewölbe, die Klostergewölbe und die Kuppelgewölbe. Wir werden uns hier besonders mit den Tonnengewölben beschäftigen.

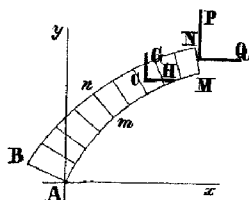
Ein Gewölbe ist ein System von bogenförmig neben und auf einander gestellten festen Theilen. Diese Theile, welche in der Regel Steine sind, nennt man Gewölbsteine, zwischen denselben befinden sich die Gewölbefugen, welche gewöhnlich mit Mörtel ausgefüllt werden. Sind die Kräfte, welche auf jeden einzelnen Gewölbstein wirken, so wie die Gestalt des Gewölbes der Art, dass das System sich nicht im Gleichgewicht befindet, so stürzt das Gewölbe ein. Der Einsturz kann auf zweifache Weise eintreten; die Theile des Gewölbes können sich entweder dadurch von einander trennen, dass die einen über die andern hinweggleiten, oder dadurch, dass einige Theile sich um die oberen oder unteren Kanten der Gewölbsteine drehen. Die Reibung und die Cohäsion des Mörtels leisten diesen Bewegungen Widerstand und tragen dazu bei, das Gewölbe im Gleichgewichte zu erhalten.

---

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen für eine  
Verbindung von Gewölbsteinen.

Fig. 33.



§ 290. Es sei  $ABNM$  (Fig. 33) eine Verbindung von Gewölbsteinen, welche einen Theil eines Tonnengewölbes bildet. Das Ende  $AB$  stützt sich gegen eine feste Ebene, während das andere Ende durch eine Kraft gehalten wird, zu welcher  $P$  und  $Q$  die verticale und horizontale Composante sind. Die Gestalt dieses

Gewölbetheils ist durch die äussere und innere Wölbungslinie  $AmM$  und  $BnN$ , so wie durch die Richtungen der Fugenebene gegeben. Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob das System im Gleichgewichte bleiben wird, wenn beliebige Kräfte auf die Gewölbsteine wirken.

Um die Natur dieses Gleichgewichtes klar aufzufassen, wollen wir, zur grösseren Einfachheit, vorerst annehmen, dass nur die Schwerkraft auf die Gewölbsteine einwirke. Stellt man sich nun vor, dass, mit dem Kämpfer anfangend, die Gewölbsteine nach und nach an ihre Stelle gebracht werden, so werden sich die ersten derselben, welche der festen Ebene  $AB$  nahe liegen, allein durch die Wirkung der Reibung halten, wofern die Neigung der Fugen gegen den Horizont nicht zu gross ist. Aber bald wird man, um sie in ihrer Lage zu erhalten, gegen die obere Fuge des letzten Gewölbsteines eine gewisse Kraft anbringen müssen, deren verticale und horizontale Composante wir mit  $P$  und  $Q$  bezeichnen. Diese Kraft muss in einer Hinsicht gross genug sein, um zu verhindern, dass das Ganze oder irgend ein Theil der gelegten Wölbsteine einstürze, sei es durch Gleiten auf den Fugen, oder durch eine Drehung um die unteren Kanten derselben; in anderer Hinsicht darf sie nicht so gross sein, dass dadurch das Ganze oder irgend ein Theil der gelegten Wölbsteine gehoben würde, sei es durch Gleiten auf den

Fugen, oder durch Drehung um die oberen Kanten derselben. Man sieht also allgemein, dass in Bezug auf eine beliebige Fuge das System der Kräfte, welche auf den Gewölbtheil  $ABNM$  wirken, mit Einschluss der gegen die obere Fuge des letzten Gewölbsteines wirkenden Kräfte  $P$  und  $Q$  ein solches sein muss, dass durch die Wirkung der am obern Theile  $mnNM$  angreifenden Kräfte weder ein Gleiten dieses Theils nach oben oder unten auf der als fest vorausgesetzten Ebene  $mn$ , noch eine Drehung desselben um eine der Kanten  $m$  und  $n$  verursacht wird. Man nenne

- $x, y$  die horizontale und verticale Coordinate des Punktes  $m$ ;
- $x', y'$  die horizontale und verticale Coordinate des Punktes  $n$ ;
- $\theta$  den Winkel, welchen die Richtung der Fuge  $mn$  mit der Verticalen bildet;
- $z$  die Länge  $mn$  dieser Fuge;
- $a, b$  die Coordinaten des äussersten Punktes der innern Wölbungslinie;
- $a', b'$  die Coordinaten des äussersten Punktes der äussern Wölbungslinie;
- $G, H$  die Summen der verticalen und horizontalen Composanten zu den Kräften, welche auf die Gewölbsteine des Theils  $mnNM$  wirken;
- $\alpha, \beta$  die Coordinaten des Angriffspunktes  $C$  der Mittelkraft der Kräfte  $G$  und  $H$ ;
- $T$  der Normaldruck gegen die Fuge  $mn$ ;
- $f$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten der Gewölbsteine auf den Fugen;
- $\gamma$  den Werth der Cohäsion, welche dem Gleiten widersteht, bezogen auf die Einheit des Flächenmasses;
- $R$  den Werth der Cohäsion für die Flächeneinheit, welche einer Trennung zweier Gewölbsteine in der gegen ihre gemeinschaftliche Fuge normalen Richtung widersteht.

§ 291. Um die Bedingungen für das Gleiten auf der Fuge  $mn$  aufzustellen, beachte man zuerst, dass die Kraft, welche sich betreibt, ein Gleiten des Gewölbtheils  $mnNM$  in der Richtung  $nm$  hervorzubringen, ist

$$(P + G) \cos \theta;$$

und die Kraft, welche diesem Gleiten widerstrebt,

$$(Q + H) \sin \theta + f(P + G) \sin \theta + f(Q + H) \cos \theta + \gamma z;$$

daraus folgt, wenn ein Gleiten in der Richtung *nm* nicht eintreten soll, die Bedingung

$$P(1 - f \tan \theta) - Q(\tan \theta + f) < -G(1 - f \tan \theta) + H(\tan \theta + f) + \frac{\gamma z}{\cos \theta}.$$

Man beachte sodann, dass die Kraft, welche sich bestrebt, ein Gleiten des nämlichen Gewölbtheils in der Richtung *mn* hervorzubringen, ist

$$(Q + H) \sin \theta,$$

und die Kraft, welche dieses Gleiten zu verhindern sucht,

$$(P + G) \cos \theta + f(P + G) \sin \theta + f(Q + H) \cos \theta + \gamma z;$$

daraus folgt, wenn ein Gleiten in der Richtung *mn* nicht eintreten soll, die Bedingung

$$-P(1 + f \tan \theta) + Q(\tan \theta - f) < G(1 + f \tan \theta) - H(\tan \theta - f) + \frac{\gamma z}{\cos \theta}.$$

Soll nun der Gewölbtheil *ABNM* sich im Gleichgewichte halten, so muss man den Kräften *P* und *Q* solche Werthe beilegen können, dass jenen Bedingungen für jede einzelne Fuge *mn* Genüge geschieht.

§ 292. Um jetzt die Bedingungen für den Fall einer Drehung um die obere oder untere Kante der Fuge *mn* aufzustellen, nehmen wir zuerst an, dass der Gewölbtheil *mnNM* sich von oben nach unten um die Kante *m* zu drehen trachte, und dass die Kräfte *P* und *Q* in dem Punkte *N* angreifen, in welchem Falle sie jene Drehung so wenig, wie möglich, begünstigen. Das statische Moment der Kräfte, welche sich bestreben, den Gewölbtheil zu drehen, ist

$$P(a' - x) + G(\alpha - x);$$

und das Moment der Kräfte, welche die Drehung zu verhindern suchen, ist, wenn man das Widerstandsmoment der Cohäsion berechnet, wie in § 211,

$$Q(\beta - y) + H(\beta - y) + \frac{1}{3}Rz^2;$$

damit also die Drehung nicht eintrete, muss

$$P(a' - x) - Q(\beta - y) < -G(\alpha - x) + H(\beta - y) - \frac{1}{3}Rz^2$$

sein.

Man nehme zweitens an, dass der Gewölbtheil *mnNM* sich von unten nach oben um die Kante *n* zu drehen trachte, und dass die Kräfte *P* und *Q* in *M* angreifen, in welchem Falle sie jene Drehung so wenig, wie möglich, begünstigen. Das Moment der Kräfte, welche den Gewölbtheil zu drehen streben, ist

$$Q(b-y') + H(\beta-y'),$$

und das Moment der Kräfte, welche die Drehung zu verhindern suchen,

$$P(a-x') + G(\alpha-x') + \frac{1}{2}Rz^2.$$

Um daher diese zweite Art der Drehung zu verhindern, muss

$$-P(a-x') + Q(b-y') < G(\alpha-x') - H(\beta-y') + \frac{1}{2}Rz^2$$

sein.

Für das Gleichgewicht des Gewölbtheils *ABNM* ist ausser der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Bedingung noch nöthig, dass die Werthe für *P* und *Q* den beiden letzten Ungleichheiten für jede einzelne Fuge Genüge leisten.

Wenn umgekehrt den vorstehenden Bedingungen bei allen Fugen Genüge geschehen ist, so wird der Gewölbtheil nothwendig im Gleichgewicht bleiben.

§ 293. Für den Normaldruck gegen die Fuge *mn* hat man

$$T = (P + G) \sin \theta + (Q + H) \cos \theta.$$

§ 294. Wenn man die Widerstandskräfte der Reibung und der Cohäsion (des Mörtels) gleich Null setzt, so reduciren sich die Bedingungen im § 291 für das Gleichgewicht gegen Gleiten auf die einzige Gleichung

$$P - Q \tan \theta = -G + H \tan \theta$$

oder

$$\tan \theta = \frac{P + G}{Q + H},$$

welche besagt, dass die Richtung der Resultante aus den Kräften, welche auf den Gewölbtheil von *mnNM* wirken, normal gegen die Fuge *mn* sein muss. Unter der obigen Voraussetzung wird man für die Neigung jeder Fuge einen bestimmten Werth erhalten, wenn die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte gegeben sind. Die an der letzten Fuge *MN* angreifende Kraft, deren ver-

ticale und horizontale Composante  $P$  und  $Q$  sind, muss normal gegen diese Fuge gerichtet sein.

§ 295. Setzen wir wieder den Widerstand der Reibung und der Cohäsion gleich Null, so wird aus den Bedingungen im § 292 für das Gleichgewicht gegen Drehung

$$\begin{aligned} P(a'-x) - Q(b-y) &< -G(\alpha-x) + H(\beta-y) \\ -P(a-x') + Q(b-y) &< G(\alpha-x') - H(\beta-y'), \end{aligned}$$

welche Formeln zeigen, dass die Richtungslinie der Resultanten aus den auf den Gewölbbtheil  $mnNM$  wirkenden Kräften zwischen den Punkten  $m$  und  $n$  liegen muss.

§ 296. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass das Gleichgewicht bei einer Verbindung von Gewölbesteinen im Allgemeinen durch vier Ungleichheiten ausgedrückt wird, denen die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  für alle Fugen des Gewölbes Genüge leisten müssen. Es wird also gewisse Grenzen geben, innerhalb welcher die Werthe von  $P$  und  $Q$  sich befinden müssen. Widersprechen sich die vier Gleichgewichtsbedingungen nicht und giebt es Werthe für  $P$  und  $Q$ , die denselben Genüge leisten, so lässt sich die vorgelegte Verbindung von Gewölbesteinen im Gleichgewichte halten, und denkt man sich die letzte Fuge  $MN$ , gleich der ersten  $AB$ , gegen eine feste Ebene gestützt, so kann man sicher sein, dass, ungeachtet der Wirkung der Kräfte  $G$  und  $H$ , keine Bewegung eintreten wird.

### Anwendung auf ein scheidrechtes Gewölbe.

§ 297. Der Gewölbbtheil, dessen Gleichgewichtsbedingungen gesucht werden, sei die Hälfte  $ABNM$

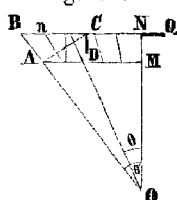
Fig. 34. (Fig. 34) eines scheidrechten Gewölbes

von überall gleicher Dicke. Man sehe von dem Widerstande der Reibung und der Cohäsion ab und nehme an, dass auf das System nur die Schwerkraft wirke. Unter Beibehaltung der Benennung des § 294 nenne man ferner

$a$  die halbe Weite  $AM$ ;

$c$  die Dicke  $MN$ ;

$II$  das Gewicht der Volumeneinheit des Mauerwerkes.





In der Gleichung in § 294 wird alsdann

$$P=0, H=0, G=\Pi[(a-x)c+\frac{1}{2}c^2\tan\theta]$$

und daher

$$\tan\theta=\frac{2\Pi(a-x)c}{2Q-\Pi c^2};$$

bezeichnet man die Neigung der ersten Fuge  $AB$  gegen die Verticale mit  $\theta'$ , so wird

$$\tan\theta'=\frac{2\Pi ac}{2Q-\Pi c^2}; \text{ woraus } Q=\Pi\frac{2ac+c^2\tan\theta'}{2\tan\theta'}.$$

Auch ist

$$\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}=\frac{a-x}{a}.$$

Ist also die Neigung  $\theta'$  der ersten Fuge  $AB$  gegeben, so findet man den Werth für  $Q$  aus der vorhergehenden Gleichung, und, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, müssen die Richtungen sämtlicher Fugen nach demselben Centralpunkte  $O$  laufen.

§ 298. Aus den Bedingungen in § 296 für das Gleichgewicht gegen Drehung wird, wenn man sie für die Fuge  $AB$  aufstellt,

$$Qc > \frac{1}{2}\Pi a^2c - \frac{1}{6}\Pi c^3\tan\theta^2 \\ - Qc < \frac{1}{2}\Pi ac(a+c\tan\theta') + \frac{1}{3}\Pi c\tan\theta'^2.$$

Der zweiten Ungleichheit, welche besagt, dass der Gewölbtheil  $ABNM$  sich nicht um die obere Kante  $B$  der genannten Fuge drehen kann, leistet jeder positive Werth von  $Q$  Genüge, und man sieht in der That, dass wegen der Form des Gewölbes diese Bewegung unmöglich ist. Aus der ersten Ungleichheit, welche besagt, dass der Gewölbtheil  $ABNM$  sich nicht um die untere Kante  $A$  drehen kann, wird, wenn man für  $Q$  den in § 297 gefundenen Werth einsetzt,

$$ac > \frac{1}{2}(a^2-c^2)\tan\theta' - \frac{1}{6}c^2\tan\theta'^3.$$

Dieser Ungleichheit geschieht stets Genüge, welches auch der Winkel  $\theta'$  sei, wenn die halbe Weite  $a$  des Gewölbes nicht den Werth übertrifft, welchen man erhält, wenn man  $\tan\theta' = 1$  setzt in der Gleichung

$$ac - \frac{1}{2}(a^2-c^2)\tan\theta' + \frac{1}{6}c^2\tan\theta'^3 = 0;$$

dieser Werth ist  $a = c \left(1 + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ . Ist aber  $a$  grösser, so darf, wenn der Ungleichheit Genüge geschehen soll,  $\tan \theta'$  nicht grösser als der Werth sein, welchen man aus der letzten Gleichung dafür findet. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Resultante aus dem Gewichte des Gewölbtheils  $ABNM$  und der Kraft  $Q$ , welche man sich horizontal in  $N$  angreifend denken muss, die Linie  $AB$  in einem Punkte unterhalb  $A$  treffen, und daher den Gewölbtheil um diesen Punkt zu drehen suchen.

§ 299. Ist die Dicke eines scheidrechten Gewölbes sehr klein im Verhältniss zu der Weite desselben, so lässt sich die in Rede stehende Grenze von  $\tan \theta'$  sehr nahe durch die Gleichung

$$\tan \theta' = \frac{2c}{a}$$

ausdrücken; man erhält ausserdem

$$Q = \frac{\Pi ac}{\tan \theta'}, \text{ oder } Q = \frac{1}{2} \Pi a^2.$$

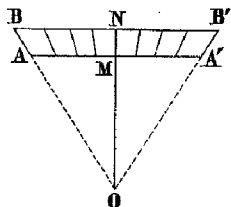
§ 300. Substituirt man in dem Ausdrücke in § 293 die Werthe, welche dem scheidrechten Gewölbe entsprechen, so erhält man für den Normaldruck, welchen die Fuge  $AB$  erleidet,

$$T = \Pi \left\{ \frac{ac}{\sin \theta'} + \frac{c^2}{2 \cos \theta'} \right\}.$$

§ 301. Ist die Dicke eines scheidrechten Gewölbes sehr klein im Verhältniss zu der Weite desselben, so wird aus diesem Ausdrücke

$$T = \frac{\Pi ac}{\sin \theta'}.$$

§ 302. Betrachtet man die zwei gleichen Hälften eines scheidrechten Gewölbes (Fig. 35), welche in der Fuge  $MN$  zusammentreffen, so findet man, dass nur dann Gleichgewicht bestehen kann, wenn die Richtungen der sämtlichen Fugen nach demselben Centralpunkte  $O$  laufen, und wenn der Winkel  $\theta$ , den die äusserste Fuge mit der

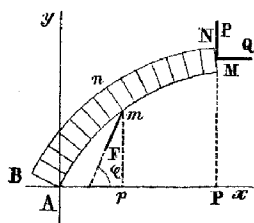


man die zwei gleichen Hälften eines scheidrechten Gewölbes (Fig. 35), welche in der Fuge  $MN$  zusammentreffen, so findet man, dass nur dann Gleichgewicht bestehen kann, wenn die Richtungen der sämtlichen Fugen nach demselben Centralpunkte  $O$  laufen, und wenn der Winkel  $\theta$ , den die äusserste Fuge mit der

Verticalen bildet, die in § 298 angegebene Bedingung erfüllt. Geschieht dieser letzteren Bedingung kein Genüge, so wird das Gewölbe einstürzen, die beiden Hälften werden sich in  $N$  gegen einander stützen und die Kanten  $A$  und  $A'$  längs der beiden festen Ebenen  $AB$  und  $A'B'$  hinaufgeschoben werden. Der Ausdruck für  $Q$  in § 297 giebt den Horizontaldruck, welchen die beiden Gewölbtheile gegen einander in der Fuge  $MN$  ausüben, und der Ausdruck für  $T$  in § 300 giebt den Normaldruck, welchen die beiden äussersten Fugen  $AB$  und  $A'B'$  erleiden. Diesen Druck  $T$  wird man benutzen, um die Stärke der Widerlager eines scheidrechten Gewölbes zu berechnen.

**Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbesteinen, deren Fugen sämmtlich normal auf der innern Wölblinie stehen.**

Fig. 36.



§ 303. Man betrachte einen Theil  $ABNM$  (Fig. 36) eines Gewölbes, dessen Fugen sämmtlich normal auf der innern Wölblinie  $AmM$  stehen; das eine Ende stütze sich gegen eine feste Ebene  $AB$ , während das andere durch eine Kraft gehalten wird, zu der  $P$  und  $Q$  die verticale und horizontale Compo-

sante sind. Man nenne

- $x, y$  die Coordinaten  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der innern Wölblinie;
- $z$  die Länge der Fuge  $mn$ ;
- $a, b$  die Coordinaten des Endpunktes  $M$ ;
- $S$  die Totallänge  $AmM$  der innern Wölblinie;
- $s$  die Länge des Bogens  $Am$ ;
- $\rho$  den Krümmungshalbmesser dieser Curve für den Punkt  $m$ ;
- $F$  den Theil der Belastung des Gewölbes, welcher für die Längeneinheit in dem Punkte  $m$  der innern Wölblinie zur Wirkung kommt, wobei  $F$  als Function der Bogenlänge ausgedrückt wird;

$\varphi$  den Winkel, welchen die Richtung der Kraft  $F$  mit der horizontalen Abscissenaxe bildet, diesen Winkel ebenfalls als Function der Bogenlänge ausgedrückt;

$T$  den Werth des Normaldruckes, welchen die beiden Theile des Gewölbes in der Fuge  $mn$  gegen einander ausüben.

Sieht man jetzt von dem Widerstande der Reibung und Cohäsion ab, so folgt aus der Anwendung der in § 290 u. folgd. entwickelten Theorie als erste Gleichgewichtsbedingung, dass der Normaldruck  $T$  in der Fuge  $mn$  gleich und entgegengesetzt mit der Resultanten sein muss, welche sich aus den sämtlichen Kräften ergibt, die auf den Gewölbtheil  $mnNM$  wirken. Wenn man beachtet, dass zu dem Normaldrucke  $T$  die verticale und horizontale Composante respective  $T \frac{dy}{ds}$  und  $T \frac{dx}{ds}$ , die Summen der verticalen und horizontalen Composanten der auf den Gewölbtheil  $mnNM$  wirkenden Kräfte hingegen respective

$$\int_s^S ds \cdot F \sin \varphi \quad \text{und} \quad \int_s^S ds \cdot F \cos \varphi$$

sind, so erhält man die beiden Gleichungen

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \cdot F \sin \varphi,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds \cdot F \cos \varphi.$$

§ 304. Die zweite Gleichgewichtsbedingung, welche fordert, dass die Richtung der Resultante aus den sämtlichen Kräften zwischen den Punkten  $m$  und  $n$  liege, bedarf keiner weitem Beachtung; denn diese Bedingung ist (*implicit*) schon in der Voraussetzung enthalten, dass sämtliche Fugen normal auf der innern Wölblinie stehen, da alsdann die Durchschnittspunkte der auf einander folgenden Richtungen der in Rede stehenden Resultanten nothwendig eine zweite Curve bilden, welche der ersten parallel ist.

§ 305. Differentiirt man die beiden Gleichungen in § 303, multiplicirt darauf die erste mit  $\frac{dy}{ds}$  und die zweite mit  $\frac{dx}{ds}$ , und addirt die beiden Produkte, so erhält man (wenn man beachtet, dass  $\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$  und daher  $\frac{dx}{ds} d \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \cdot \frac{dy}{ds} = 0$  ist)

$$-dT = F ds \cdot \left\{ \frac{dy}{ds} \sin \varphi + \frac{dx}{ds} \cos \varphi \right\},$$

aus welcher Gleichung sich der Werth des Druckes finden lässt. Geht man von einem Punkte der Curve zu dem nächsten über, so ändert sich der Normaldruck um eine Grösse, die der Wirkung der Kraft  $F$  auf das zwischen den beiden Punkten liegende Element gleichkommt, wenn diese in dem Sinne dieses Elementes zerlegt wird.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur innern Wöblinie gerichtet sind.**

§ 306. In diesem Falle ist  $\sin \varphi = \frac{dx}{ds}$  und  $\cos \varphi = -\frac{dy}{ds}$ , und daher

$$dT = 0,$$

d. h. der Normaldruck ist bei dem Gewölbe überall derselbe. Differentiirt man die beiden Gleichungen in § 303, so erhält man jetzt

$$Td \cdot \frac{dy}{ds} = -F ds \cdot \sin \varphi, \quad Td \cdot \frac{dx}{ds} = -F ds \cdot \cos \varphi,$$

woraus folgt (wenn man auf die für  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  gefundenen Werthe Rücksicht nimmt),

$$Td\varphi = -F ds,$$

oder, weil  $d\varphi$  (als der Winkel, welcher von zwei auf einander folgenden Normalen der Curve gebildet wird)  $= -\frac{ds}{\rho}$  ist,

$$T = \rho F \quad \text{und} \quad F = \frac{T}{\rho}.$$

Es ist also der Normaldruck, welchen ein Gewölbeste in den nächsten ausübt, gleich der Kraft, welche

auf der Längeneinheit in einem beliebigen Punkte der innern Wölblinie normal gegen dieselbe wirkt, multiplicirt mit dem Krümmungshalbmesser für diesen Punkt; und damit Gleichgewicht stattfinden kann, müssen diese gegen die innere Wölblinie normal gerichteten Kräfte in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes sich umgekehrt verhalten, wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser der Curve.

§ 307. Ist die innere Wölblinie ein Kreisbogen, so muss die Kraft, welche in normaler Richtung gegen diese Curve auf die Gewölbesteine wirkt, einen constanten Werth besitzen in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes. Die vorhergehende Gleichung giebt die Relation, welche zwischen dieser Kraft und dem Normaldrucke zwischen je zwei auf einander folgenden Gewölbesteinen besteht. Es folgt aus derselben, dass wenn die innere Wölblinie ein Vollkreis wäre, sich die Summe der normal gegen die innere Wölblinie gerichteten Kräfte zu dem Drucke zwischen zwei an einander stossenden Gewölbesteinen verhalten würde, wie der Kreisumfang zum Halbmesser, also wie  $2\pi$  zu 1.

§ 308. In dem Vorhergehenden wurde der Widerstand der Reibung und Cohäsion vernachlässigt; nimmt man hierauf Rücksicht, so findet man, dass es zum Gleichgewichte eines Gewölbes nicht mehr nothwendig ist, dass die normal zur inneren Wölblinie gerichteten Kräfte dem in § 307 angegebenen Gesetze folgen. Welche Werthe man aber auch für den Widerstand der Reibung und Cohäsion annehmen mag, so wird doch der Normaldruck zwischen den Gewölbesteinen, welcher alsdann nicht für alle Punkte der Curve constant zu sein braucht, stets nach der Formel  $T = \rho F$  berechnet.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sich auf das eigene Gewicht der Gewölbesteine beschränken.**

§ 309. Man behalte die Benennungen des § 303 bei und nenne ferner

II das Gewicht der Volumeneinheit der Materie der Gewölbesteine;

$\theta$  den Winkel, welchen die Fuge  $mn$  mit der Verticalen einschliesst, woraus folgt

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta,$$

Es ist hier  $\varphi = 90^\circ$ ,  $F ds = \Pi z \left\{ 1 + \frac{z}{2\rho} \right\} ds$ . Aus den Gleichungen des § 303 wird

$$T \sin \theta = P + \Pi \int_s^S z \left\{ 1 + \frac{z}{2\rho} \right\} ds;$$

$$T \cos \theta = Q;$$

woraus

$$\tan \theta = \frac{P}{Q} + \frac{\Pi}{Q} \int_s^S z \left\{ 1 + \frac{z}{2\rho} \right\} ds,$$

Differentiirt man diese letzte Gleichung, so erhält man

$$\frac{d\theta}{\cos \theta^2} = -\frac{\Pi}{Q} z \left\{ 1 + \frac{z}{2\rho} \right\} ds,$$

oder, weil  $d\theta = -\frac{ds}{\rho}$  ist,

$$\frac{2Q}{\Pi \cos \theta^2} = 2\rho z + z^2,$$

aus welcher Gleichung sich das Gesetz der Dicke des Gewölbes bestimmen lässt, wenn die Gestalt der Wölblinie bekannt ist, und umgekehrt.

In dem vorliegenden Falle und auch im Allgemeinen, wenn nur verticale Kräfte auf ein Gewölbe wirken, ist die horizontale Composante des Druckes  $T$  in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes constant und der Kraft  $Q$  gleich. Man nennt diese Kraft den Horizontalschub des Gewölbes.

§ 310. Ist die innere Wölblinie ein Kreisbogen, so ist  $\rho$  constant, und aus der Gleichung in dem vorhergehenden Paragraphen erhält man

$$z = -\rho + \sqrt{\rho^2 + \frac{2Q}{\Pi \cos \theta^2}}.$$

Sind die Endfugen auf beiden Seiten horizontal, also  $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$ , so wird die Länge dieser Fugen unendlich gross.

Nennt man  $c$  die Länge der Fuge im Scheitel des Gewölbes, wo die Richtung dieser Fuge vertical ist, so erhält man

$$Q = \frac{1}{2} \Pi (2pc + c^2)$$

als den Werth des Horizontalschubes.

Der Normaldruck in der Fuge  $mn$  ist

$$T = \frac{Q}{\cos \theta}.$$

## Zweites Kapitel.

### Die wichtigsten Versuche und Beobachtungen über das Gleichgewicht der Gewölbe.

§ 311. Danisy <sup>1)</sup> stellte Versuche mit kleinen Modellen von Tonnengewölben an, deren obere Theile er mit Gewichten belastete und dadurch das Ganze zum Zusammenstürzen brachte, wobei die oberen Theile sich senkten und in der Schlussfuge gegen einander stützten, während sie die unteren Theile auseinander und zu einer Drehung um die äussere Kante ihrer Basis drängten. Er zeigte, dass bei diesen Bewegungen die Gewölbsteine nicht auf den Lagerflächen gleiten, sondern sich durch eine Drehung um ihre Kanten von einander entfernen. Aehnliche Versuche stellten später Gauthey <sup>2)</sup> und Rondelet <sup>3)</sup> an.

§ 312. Boistard <sup>4)</sup>, französischer Wegbaudirector (*ingénieur en chef des ponts et chaussées*), hat Versuche veröffentlicht, welche mehr im Grossen und mit mehr Sorgfalt angestellt wurden. Die Gewölbe hatten 2,27 Meter

1) Traité de la coupe des pierres, de Frézier, tome III. Diese Versuche wurden im Jahre 1732 vor der Academie zu Montpellier angestellt.

2) Dissertation sur les dégradations du Panthéon français, pag. 114. Traité de la construction des ponts, tome I. pag. 241 der zweiten Ausgabe.

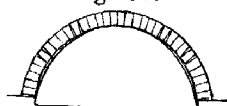
3) Art de bâtir, tome IV., pag. 223 u. folgd.

4) Recueil de divers Mémoires, publié par Lesage; tome II., pag. 170; oder Recueil d'expériences et d'observations, faites par Boistard, pag. 95. Diese Versuche wurden im Jahre 1800 angestellt.



lichte Weite und waren aus mit Sandstein abgeschliffenen Ziegeln construiert, welche 0,11 Meter hoch und eben so dick waren. Der Gestalt nach waren es Gewölbe, deren Querschnitt ein Halbkreis, ein um  $\frac{1}{3}$  und um  $\frac{1}{4}$  gedrückter Korbbogen, und ein Kreisbogen war, dessen Pfeilhöhe  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  und  $\frac{1}{17}$  der Weite betrug, so wie scheidrechte Gewölbe. Jedes Gewölbe wurde drei Hauptproben unterworfen. Bei der ersten Probe waren die Gewölbe unbelastet (ohne Hintermauerung); die Dicke der Gewölbe, 0,11 Meter, war nicht hinreichend, um dieselben im Gleichgewichte zu halten; als man daher das Lehrgerüst herunter zog, senkte sich eine gewisse Anzahl Gewölbesteine von dem obern Theile bis auf den Scheitel des Lehrgerüsts (Fig. 37). Die beiden unteren

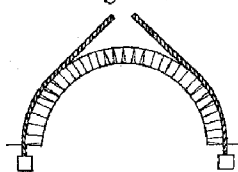
Fig. 37.



gerüst nicht berührten, so wie an dem obern und untern Ende der Bogen, wo sich die Fugen auf der innern Wölblinie öffneten.

§ 313. Bei der zweiten Probe waren die Gewölbe ebenfalls noch ohne Hintermauerung. Man legte über die beiden Schenkel ein Seil, welches gegen die äussere Wölblinie drückte und von einem Gewichte gespannt wurde. War die Spannung des Seiles nicht gross genug, um das Gewölbe im Gleichgewichte zu erhalten, so stürzte das Gewölbe zusammen, wobei sich die Fugen am Schlusse

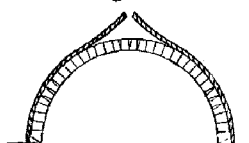
Fig. 38.



und an den Anfängen auf der innern Wölblinie, in den Schenkeln aber auf der äussern Wölblinie öffneten (Fig. 38). War die Spannung des Seiles eben gross genug, um das Gewölbe im Gleichgewichte zu erhalten, so bildeten sich die Bruchfugen auf dieselbe Weise durch die Wirkung des Setzens; die Wirkung der Gewichte suchte, die entstandenen Oeffnungen sofort wieder zu schliessen, und so entstand, indem die Fugen sich abwechselnd öffneten und schlossen, eine Art oscil-

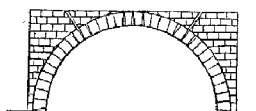
lirender Bewegung, wobei sich die Gewölbtheile abwechselnd nach verschiedenen Richtungen dreheten, und zwar bald um die obere, bald um die untere Kante der Gewölbsteine. Wurde endlich die Spannung des Seiles über eine gewisse Grenze hinaus vermehrt, so zeigten sich die Resultate des ersten Falles im umgekehrten Sinne; d. h. die unteren Theile des Gewölbes (die Schenkel) senkten sich, die oberen Theile wurden gehoben und die Fugen öffneten sich am Schlusse und an den Anfängen auf der äussern Wöblinie, in den Schenkeln

Fig. 39.



blieb. War die Stärke des Gewölbes im Lehrgerüst entfernte.

Fig. 40.



hingegen auf der innern Wöblinie (Fig. 39).

§ 314. Bei der dritten Probe wurden Widerlager und eine Hintermauerung horizontal bis zum Scheitel des Gewölbes aufgeführt, wo die Dicke stets 0,11 Meter blieb. War die Stärke der Widerlager gross genug, so blieb das Gewölbe im Gleichgewichte, wenn man das Belastete man aber noch den Scheitel des Gewölbes, so zerbrach dasselbe in vier Theile (Fig. 40). Die Fugen öffneten sich am Schlusse und an den Anfängen auf der innern Wöblinie, in den Schenkeln hingegen

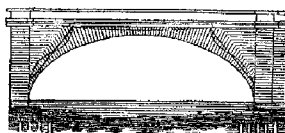
auf der äussern Wöblinie. Aus diesen Versuchen ergiebt sich, dass bei den Halbkreisgewölben ohne Hintermauerung oder mit Hintermauerung bis zum Scheitel die Bruchfuge ungefähr in einer Höhe von  $30^{\circ}$  liegt, wenn man von dem Anfange des Halbkreises aus zählt. Bei den Gewölben, deren Querschnitt ein Korbbogen ist, der aus drei Kreisbogen von je  $60^{\circ}$  besteht und um  $\frac{1}{3}$  oder  $\frac{1}{4}$  gedrückt ist, liegt die Bruchfuge in einer Höhe von  $45^{\circ}$  bis  $55^{\circ}$ , wenn man von dem Anfange des kleinen Bogens aus zählt. Bei den Stichbogen (deren Querschnitt ein Kreisbogen) tritt der Bruch dicht am Widerlager ein, wofern das Gewölbe nicht eine sehr kleine Dicke oder einen Centriwinkel besitzt, der über  $120^{\circ}$  hält <sup>1)</sup>.

1) Noch andere Versuche über das Gleichgewicht der Gewölbe findet man in dem Werke A dissertation on the construction and properties of arches, von G. Atwood, 1801. Der Verfasser untersucht das Gleichgewicht gegen Gleiten und seine Versuche, welche er mit Gewölbstücken von gut polirtem Kupfer anstellte, beziehen sich ins Besondere auf diesen Fall.

§ 315. Aus den Beobachtungen Perronet's <sup>1)</sup> bei der Construction mehrerer grossen Brücken lernt man ebenfalls die Natur der bei einem Gewölbe eintretenden Bewegungen kennen. Nach diesen Beobachtungen können die ersten Schichten der Gewölbsteine, die sogenannten ruhenden Schichten, ohne Hülfe des Lehrgerüstes gelegt werden; es fangen dieselben nicht eher zu gleiten an, als bis die Neigung der Lagerflächen gegen den Horizont  $39^{\circ}$  bis  $40^{\circ}$  beträgt. <sup>2)</sup> Wird die Neigung grösser, so trägt das Lehrgerüst einen Theil des Gewichtes der Gewölbsteine; wendet man daher ein Sprengwerk als Lehrgerüst an, so werden die unteren Theile desselben herabgedrückt und der Scheitel würde in die Höhe steigen, wenn man diese Bewegung nicht durch eine genügende Belastung im Scheitel verhinderte.

Diese Beobachtungen wurden bei dem Brückenbogen von Saint-Edme in Nogent-sur-Seine gemacht (Fig. 41). Der Querschnitt ist ein Korbbogen von

Fig. 41.



29,24 Meter Spannweite und 8,77 Meter Pfeilhöhe. Die Dicke im Scheitel ist 1,62 Meter. Jede Hälfte des Bogens besteht aus 47 Schichten von Gewölbsteinen mit Ausnahme des Schlusssteines. Als die

ersten zwanzig Schichten gelegt waren, lösten sich die letzten fünf ab durch das Setzen des Lehrgerüstes; die Bruchfuge öffnete sich um 0,02 Meter auf der äussern Wölbfläche oberhalb der 15. Schicht, und zwischen dem Gewölbe und den horizontalen Schichten der Brückenpfeiler trat eine verticale Trennung ein, welche bis zur 7. Schicht merklich war. Als man mit dem Legen der Steine fortfuhr, schlossen sich diese Oeffnungen wieder; die Bruchstelle fand sich weiter nach oben gerückt, und von der 26. bis zur 31. Schicht öffneten sich die Fugen auf der äussern Wölbfläche um 0,002 Meter.

Die Form des Bogens der Neuilly-Brücke ist ein um ein Viertel gedrückter Korbbogen von 39 Meter

1) Mémoire sur le cintrement et le décentrement des ponts. Man sehe auch den Recueil d'expériences et d'observations, par Boistard und die Études relatives à l'art des constructions, par Bruyère, premier recueil.

2) Diesem Winkel entspricht der Reibungscoefficient 0,82, ein Resultat, das schon oben in § 284 erwähnt wurde.

Spannweite. Ausser dem Schlussstein besteht jede Hälfte aus 56 Schichten. In den Bogen, welche den Pfeilern zunächst liegen, öffneten sich die Fugen nach und nach auf der äussern Wölfläche in dem Masse, in welchem das Legen der Steine fortschritt, um  $\frac{1}{2}$  bis 5 und 7 Millimeter, und zwar bei der 11. bis zur 36. Schicht. Aehnliche Erscheinungen wurden bei anderen Brücken beobachtet.

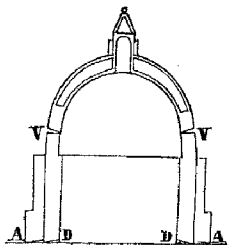
§ 316. Andere Bewegungen finden statt nach dem Einsetzen des Schlusssteines; das Lehrgerüst ist alsdann im Scheitel belastet und die Seiten desselben werden nach oben gedrängt. Vor der Ausschalung des Brückenbogens zu Nogent (Fig. 41) hatte man auf den Stirnflächen desselben drei gerade Linien gezogen; die eine horizontal am Scheitel des Gewölbes oberhalb der beiden 28sten Schichten; die beiden anderen aber schräg von den Endpunkten der ersten bis zu den Punkten, in welchen die zu den 7. Schichten gehörenden Fugen die beiden Verticalen schneiden, welche die Tangenten an den Anfängen sind. Die Lage dieser Linien hatte man auf feste Punkte bezogen. Die beobachteten Erscheinungen sind folgende: die letzten Fugen, welche sich in dem Obertheile des Bogens auf der äussern Wölfläche geöffnet hatten, schlossen sich wieder, und der verticale Riss, welcher zwischen den Gewölbesteinen und den Schichten der Pfeiler entstanden war, verschwand fast gänzlich. Die horizontale Linie wurde gekrümmt, so dass sie ein Setzen anzeigte, welches von der Mitte aus nach beiden Seiten hin gleichmässig abgenommen hatte. In der Krümmung der beiden anderen Linien zeigte sich ein Beugungspunkt in dem Durchschnitte mit der Fuge zwischen der 16. und 17. Schicht, so dass dies nicht allein ein verticales Setzen und Zusammendrängen der oberen Schichten bis einschliesslich zur 17. anzeigte, sondern auch ein ähnliches Zusammendrängen der unteren Schichten nach den Pfeilern zu. Die Bruchstelle lag also zwischen der 16. und 17. Schicht der Gewölbesteine; man muss dabei beachten, dass die Hintermauerung zur Zeit der Ausschalung vollendet war.

Bei der Neuilly-Brücke schlossen sich nach dem Einsetzen der Schlusssteine die letzten Fugen, welche sich auf der äussern Wölfläche geöffnet hatten; dagegen

zeigten sich vom Schlusse aus neue Fugenrisse auf der innern Wölfläche. Die Fugen auf der äussern Seite in den Schenkeln blieben offen; die grösste Oeffnung zeigte sich zwischen der 26. und 27. Schicht und gab dadurch die Lage der Bruchstelle an. Die Hintermauerung war zur Zeit der Ausschalung nicht vollendet.

§ 317. Die vorstehenden Resultate beziehen sich auf die Tonnengewölbe; aus den Beobachtungen über den Verfall der Peterskirche in Rom, kann man die analogen Bewegungen, wie sie bei Kuppelgewölben statt-

Fig. 42.



finden, kennen lernen. Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass das genannte Bauwerk eine Neigung zum Einsturze in der durch Fig. 42 dargestellten Weise hatte; das Mauerwerk, welches in der Richtung der Meridianebenen sehr viele Risse zeigte, öffnete sich an der äussern Wölfläche in *V* am Anfange des Gewölbes und an der innern Wölfläche in *AD* an der Basis der Trommel, auf welcher die Kuppel steht. Eine Zunahme dieser Beschädigungen wurde mittelst eiserner Ringe verhindert, welche die Vergrösserung des Durchmessers in dem untern Theile der Kuppel unmöglich machen. <sup>1)</sup>

1) Die Beschädigungen der Peterskuppel in Rom findet man beschrieben in dem Werke von Poleni, betitelt *Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano*, Padua, 1748, welches einen Auszug aus sämtlichen Schriften enthält, die bis zu dieser Epoche über die Kuppel des Vaticanus erschienen waren, und unter denen das *Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di San Pietro sul fine dell' anno 1742* ausgezeichnet zu werden verdient. In diesem Werke von Lesueur, Jacquier und Boscowich ist die Gleichgewichtsfrage der Gewölbe mit grosser Genauigkeit und vielem Scharfsinn abgehandelt. Die Beschädigungen der Kuppel sind als das Resultat der hier angegebenen Bewegungen dargestellt, welche durch den Seitenschub der oberen Theile hervorgerufen werden. Poleni stimmt hierin mit den genannten Gelehrten nicht überein; er verwirft die Ansicht, dass die unteren Theile durch den Seitenschub der oberen auseinander gedrängt seien, und schreibt die Beschädigungen einem ungleichmässigen Setzen zu, welches durch Fehler in der Construction veranlasst sein soll. Doch schlägt er als Hilfsmittel mehrere Eisenringe vor, welche auch unter seiner Leitung von Vanvitelli im Jahre 1748 angebracht und später noch vermehrt wurden. Diese Eisenringe können keinen andern Zweck haben, als denjenigen, den Horizontalschub zum Theil aufzunehmen.

Die Ideen der drei Gelehrten Lesueur, Jacquier und Boscowich hat Gauthey in seiner *Dissertation sur les dégradations du Panthéon français*, pag. 117, adoptirt. Rondelet widerspricht denselben in seiner *Art de*

§ 318. Das Endresultat aus den eben aufgeführten Beobachtungen und Erfahrungen ist:

1. dass bei den Bewegungen der Gewölbe die Theile nicht auf einander gleiten, sondern sich durch eine Drehung um die oberen oder unteren Kanten der Gewölbsteine von einander entfernen;

2. dass ein einstürzendes Gewölbe gewöhnlich in vier Haupttheile zerbricht, von denen die beiden oberen sich senken, während die beiden unteren Theile nach aussen umgeworfen werden. Man darf indessen daraus nicht schliessen, dass ein Gewölbe nicht durch das Gleiten der Gewölbsteine einstürzen könne, sondern nur dass bei den Dimensionen, welche man den Gewölben gewöhnlich giebt, so wie bei den gewöhnlichen Werthen der Reibung und Cohäsion die Gewölbe leichter durch Drehung als durch Gleiten einstürzen. Zuweilen geschieht es, dass die unteren Theile des Gewölbes auf den horizontalen Fugen am Widerlager gleiten, während die oberen Theile sich durch eine Drehung um die Kanten der Gewölbsteine senken.

### Drittes Kapitel.

#### Specielle Berechnung der Gewölbe.

§ 319. Die Form und die allgemeinen Dimensionen eines Gewölbes, sind durch die Bestimmung des Gebäudes, zu welchem das Gewölbe gehört, festgestellt. Auch sieht

---

bâtir, tome II, pag. 69; tome III, pag. 222 der fünften Auflage. Die von diesem Architekten angenommenen Grundsätze stimmen jedoch nicht mit der Wirklichkeit überein, indem R. behauptete, die Kuppelgewölbe hätten keinen Horizontalschub.

Es scheint, als ob Christopher Wren, ein geschickter Mathematiker, welcher in den Jahren von 1675 bis 1710 die Paulskirche in London erbauete, ähnliche Ansichten über das Gleichgewicht der Gewölbe, wie die oben vorgetragene Theorie gehabt habe. Man sehe den Account of the Family Wren, pag. 365 u. folg., welchen Robinson in seinem Werke A system of mechanical philosophy, vol. I, pag. 642 citirt.

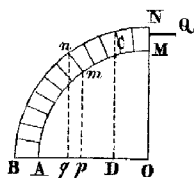
Navier's Baumechanik.

man gewöhnlich die Spannweite des Gewölbes, die innere Wöblinie, die Höhe der Widerlager und die Vertheilung der Gewichte, welche das Gewölbe tragen soll, als gegeben an. Nach solchen ausgeführten Bauwerken, welche dem projectirten analog sind und als die vollkommensten angesehen werden, bestimmt man zum Voraus die Dicke des Gewölbes im Scheitel. Diese Dicke ist entweder für das ganze Gewölbe überall dieselbe, oder man vermehrt sie progressiv vom Scheitel nach den Anfängen hin. Ist das Project eines Gewölbes fertig, so muss man sich vergewissern, dass das Gewölbe bei der Wegnahme des Lehrgerüsts im Gleichgewichte bleiben wird. Das Gleichgewicht eines Gewölbes stellt man dadurch her, dass man entweder die Theile, welche ein Bestreben haben, sich zu erheben, mehr belastet, oder dadurch, dass man ihnen stärkere Dimensionen giebt. Man muss gleichfalls untersuchen, ob der Druck auf die verschiedenen Theile des Gewölbes auch nicht gross genug ist, um die Gewölbsteine zu zerdrücken. Gegenwärtige Untersuchungen umfassen nur Anwendungen der im ersten Kapitel vorgetragenen Theorie.

### Gleichgewicht der Tonnengewölbe.

§ 320. Man betrachte ein (gerades) Tonnengewölbe als aus zwei Theilen bestehend, welche in einer verticalen Fuge zusammenstossen. Die Wirkung der von dem Gewölbe getragenen Belastungen bringt zwischen den beiden Hälften normal gegen die Fuge einen Druck hervor. Man könnte nun die eine Gewölbhälfte weglassen und sie durch eine Horizontalkraft ersetzen, die dem in Rede stehenden Normaldrucke gleich sein müsste. Ist diese Horizontalkraft gross genug, um in der bleibenden Hälfte einen Bruch hervorzubringen, indem sie dieselbe ganz oder zum Theil nach aussen umwirft, oder ist sie nicht gross genug, um diese Hälfte an dem Einstürzen nach innen zu verhindern, so kann das Gewölbe sich nicht im Gleichgewichte halten. Die Aufsuchung der Bedingungen dieses Gleichgewichtes umfasst mehrere Fälle, welche unterschieden und einzeln untersucht werden müssen.

Fig. 43.



Es stelle  $ABNM$  (Fig. 43) die Hälfte eines Tonnengewölbes dar und  $mn$  sei eine beliebige Gewölbefuge, von welcher man voraussetzt, dass darin der Bruch erfolgen könne.

Man nenne

$b, b'$  die Entfernungen  $OM, ON$ ;

$x, y$  die Entfernungen  $Ap, mp$ ;

$x', y'$  die Entfernungen  $Aq, nq$ ;

$z$  die Länge  $mn$  der Fuge;

$\theta$  den Winkel, welchen diese Fuge mit der Verticalen bildet (den Stellungswinkel);

$G$  das Gewicht des Gewölbstückes  $mnNM$  für eine Längeneinheit dieses Gewölbes;

$\alpha$  den Abstand  $AD$  des Punktes  $A$  von der Verticalen, welche durch den Schwerpunkt  $C$  dieses Gewölbstückes geht;

$T$  den Normaldruck gegen die Fuge  $mn$  für die Längeneinheit des Gewölbes;

$f, \gamma, R$  behalten die in § 290 angegebenen Bedeutungen.

§ 321. Nimmt man zuerst an, dass das Gewölbe nur durch ein Gleiten der Gewölbsteine auf den Lagerflächen einstürzen könne, so sieht man leicht, dass man nach § 291 für die Horizontalkraft, welche, in  $NM$  angreifend, das Gewölbstück  $mnNM$  verhindern soll, auf  $nm$  herabzugleiten, den Ausdruck erhält

$$Q = \frac{G(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma z}{\sin\theta + f\cos\theta} \quad (A).$$

Man hat den Werth (A) für alle in dem Halbgewölbe enthaltenen Lagerfugen zu berechnen, und aus den gefundenen Resultaten den grössten Werth als den Druck anzusehen, welchen die beiden Hälften des Gewölbes im Schlusse gegen einander ausüben, und den man gewöhnlich den Horizontalschub des Gewölbes nennt.

Man beachte jetzt, dass die in  $MN$  angreifende Horizontalkraft, wenn sie gross genug sein soll, um das Gewölbstück  $mnNM$  durch Gleiten auf  $mn$  hinaufzuschieben, den Ausdruck haben muss

$$Q = \frac{G(\cos\theta + f\sin\theta) + \gamma z}{\sin\theta - f\cos\theta} \quad (A_1).$$

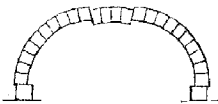


Nachdem man den Werth ( $A_1$ ) für alle in dem Halbgewölbe enthaltenen Lagerfugen berechnet hat, kann man überzeugt sein, dass das Gewölbe im Gleichgewichte bleiben wird, wenn alle diese Werthe grösser sind, als der nach der eben gegebenen Anleitung bestimmte Horizontalschub. Im entgegengesetzten Falle kann das Gleichgewicht nicht bestehen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Gewölbes ist also, dass das Maximum von ( $A$ ) kleiner sei als das Minimum von ( $A_1$ ).

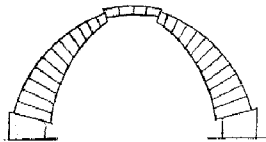
§ 322. Bei den Formen und den Verhältnissen, welche man den Gewölben in den meisten Fällen giebt, wird die Bruchfuge, für welche der Ausdruck ( $A$ ) ein Maximum wird, in den Seiten des Gewölbes liegen. Die Fuge, für welche der Ausdruck ( $A_1$ ) ein Minimum wird, ist am häufigsten die erste Horizontalfuge gleich am Widerlager. Alsdann hat das Gewölbe eine Neigung, in der durch Fig. 44 dargestellten Weise einzustürzen; der obere Theil senkt sich, während die beiden unteren Theile auf jeder Seite nach aussen gedrängt werden.

Fig. 44.



Es kann auch vorkommen, dass die Fuge, für welche der Ausdruck ( $A$ ) ein Maximum wird, an oder nahe bei den Anfängen des Gewölbes liegt, während die Fuge, für welche der Ausdruck ( $A_1$ ) ein Minimum wird, nahe beim Scheitel liegt. In diesem Falle hat das Gewölbe eine Neigung, in der durch Fig. 45 dargestellten Weise einzustürzen; der obere Theil wird gehoben, während die beiden unteren Theile von jeder Seite nach innen gleiten.

Fig. 45.



§ 323. Nimmt man jetzt an, dass das Gewölbe nur durch eine Drehung der Gewölbsteine um ihre obere oder untere Kante einstürzen könne, so sieht man, dass man nach § 292 für die in  $N$  angreifende Horizontalkraft  $Q$ , welche eine Drehung des Gewölbstückes  $mnNM$  um die Kante  $m$  von oben nach unten verhindern soll, den Ausdruck erhält

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{3} R x^2}{b' - y} \quad (B).$$

Nachdem man den Werth (B) für alle Lagerfugen des Halbgewölbes berechnet hat, muss der grösste derselben als der Horizontalschub des Gewölbes angenommen werden.

Man beachte jetzt, dass die in *N* angreifende Horizontalkraft *Q*, wenn sie gross genug sein soll, um das Gewölbstück *mnNM* von unten nach oben um die Kante *n* zu drehen, den Ausdruck haben muss

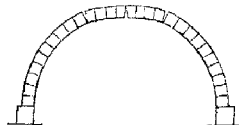
$$Q = \frac{G(\alpha - x) + \frac{1}{3} R x^2}{b' - y'} \quad (B_1).$$

Nachdem man den Werth (B<sub>1</sub>) für alle Lagerfugen des Halbgewölbes berechnet hat, kann man überzeugt sein, dass das Gewölbe im Gleichgewichte bleiben wird, wenn alle diese Werthe grösser sind, als der Horizontalschub des Gewölbes. Im entgegengesetzten Falle kann das Gleichgewicht nicht bestehen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Gewölbes ist also, dass das Maximum von (B) kleiner sei als das Minimum von (B<sub>1</sub>).

Bei dem eben Gesagten wird übrigens vorausgesetzt, dass die Fuge, für welche (B) ein Maximum wird, nahe am Scheitel liege, während die Fuge, für welche (B<sub>1</sub>) ein Minimum wird, nahe an den Anfängen liegt. Alsdann

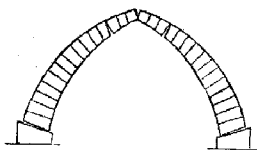
Fig. 46.



hat das Gewölbe eine Neigung, in der durch Fig. 46 dargestellten Weise einzustürzen; die oberen Theile senken sich, indem sie sich in der obern Kante der Schlussfuge gegen einander stützen, während die beiden unteren Theile um die äussere Kante ihrer Basis nach aussen gedreht werden. Die oberen Theile drücken alsdann gegen die unteren in der auf der inneren Wölbfläche befindliche Kante der Bruchfuge.

§ 324. Das Gewölbe kann aber auch, wie man in § 313 gesehen hat, in der durch Fig. 47 dargestellten

Fig. 47.



Weise einstürzen, indem die unteren Theile sich um die untere Kante ihrer Basis drehen und nach innen fallen, während die oberen Theile gehoben werden, wobei sie sich in der unteren Kante der Schlussfuge gegen einander stützen. Die oberen

Theile drücken alsdann auf die unteren in der auf der äussern Wölbfläche befindlichen Kante der Bruchfuge. Um das Gleichgewicht gegen diese letztere Art des Bruches zu ermitteln, beachte man, dass die in  $M$  (Fig. 43) angreifende Horizontalkraft  $Q$ , welche das Gewölbstück  $mnNM$  verhindern würde, sich um die Kante  $m$  von oben nach unten zu drehen, den Ausdruck hat

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{2} R z^2}{b - y} \quad (b).$$

Das Maximum dieses Druckes muss als der Horizontalschub des Gewölbes angenommen werden.

Man beachte sodann, dass die in  $M$  angreifende Horizontalkraft  $Q$ , wenn sie das Gewölbstück von unten nach oben um die Kante  $n$  drehen soll, den Ausdruck haben muss

$$Q = \frac{G(\alpha - x') + \frac{1}{2} R z^2}{b - y'} \quad (b_1).$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Gewölbes ist also, dass das Maximum von (b) kleiner sei als das Minimum von (b<sub>1</sub>).

§ 325. In § 321 wurde angenommen, dass das Gewölbe nur durch Gleiten einstürzen könne, und in § 323 und § 324, dass der Einsturz nur durch Drehung erfolgen könne. Es können aber auch beide Bewegungen zugleich auftreten. Der gewöhnlichste Fall ist, dass der Einsturz in der in § 323 und Fig. 46 angegebenen Weise erfolgt; zuweilen geschieht es auch, dass die oberen Theile sich senken, wie in Fig. 46, und die unteren Theile zurückdrängen, wie in Fig. 44. Es ist klar, dass, um eine solche Bewegung zu verhüten, das Maximum von (B) kleiner gemacht werden muss, als das Minimum von (A<sub>1</sub>). Die übrigen Fälle kommen sehr selten vor,

und bei den meisten Gewölben, welche man auszuführen haben wird, wird es ohne Nutzen sein, sie auf das diesen Fällen entsprechende Gleichgewicht zu prüfen.

Man wird also alle möglichen Combinationen berücksichtigt haben, wenn man beachtet, dass die Gleichgewichtsbedingungen sind, 1) dass die Werthe ( $A$ ) und ( $B$ ) in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes kleiner sein müssen als ( $A_1$ ) und ( $B_1$ ); 2) dass die Werthe ( $A$ ) und ( $B$ ) in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes kleiner sein müssen als ( $A_1$ ) und ( $B_1$ ).

Will man den Widerstand der Reibung und der Cohäsion vernachlässigen, so setze man in den vorstehenden Formeln  $f$ ,  $\gamma$  und  $R$  gleich Null. Im entgegengesetzten Falle sind diese Grössen nach den Resultaten zu bestimmen, welche in § 25 und folgd., so wie § 280 u. folgd. aufgeführt sind.

§ 326. Hat das Gewölbe Widerlager oder Stirnpfeiler, bei denen jede Schicht aus einem einzigen Steine besteht, so müssen die obigen Gleichungen so angewandt werden, als ob die Widerlager oder Pfeiler einen Theil des Gewölbes ausmachten.

§ 327. Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass das Verfahren <sup>1)</sup>, welches man anzuwenden hat, um das Gleichgewicht eines Gewölbes zu untersuchen, fast in allen Fällen, die sich darbieten können, in dem Folgenden besteht:

1. Sucht man den Werth des in  $N$  (Fig. 43) wirkenden Horizontalschubes, indem man für die Bruchfuge verschiedene Lagen annimmt und unter diesen diejenige beibehält, für welche der Ausdruck

$$Q = \frac{G(x-x) - \frac{1}{2} R x^2}{b' - y},$$

oder, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, der Ausdruck

1) Das hier angegebene Verfahren, welches sich auf die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Begriffe stützt, stimmt mit der Theorie überein, welche Coulomb in den *Mémoires des savans étrangers, présentés à l'Académie des sciences*, 1773 gegeben hat. Audoy bemerkt in dem *Mémorial de l'officier du génie*, Nr. 4, dass die Gleichgewichtsbedingungen, welche man durch das obige Verfahren erhält, durchaus nicht von denen verschieden sind, welche man durch die weniger einfachen Methoden erhält, die man in dem *Recueil d'expériences et d'observations* von Boistard und in dem *Traité de la construction des ponts* von Gauthy angegeben findet.

$$Q = G \frac{a-x}{b'-y}$$

ein Maximum wird <sup>1)</sup>).

2. Untersucht man, ob die Wirkung des so bestimmten Horizontalschubes gross genug ist, um einen Theil oder das Ganze der Gewölbhälfte *ABNM* durch eine Drehung um die Kante eines Gewölbesteines nach aussen umzuwerfen. Im Allgemeinen wird man sich durch den blossen Anblick überzeugen, dass die ganze Gewölbhälfte leichter umzuwerfen sein wird, als ein Theil derselben. In diesem Falle hat man die erste Fuge *AB* als die Bruchfuge anzunehmen, und man muss sich vergewissern, dass der Ausdruck

$$Q = \frac{G(a-x') + \frac{1}{2} R z^2}{b'-y'}$$

oder, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, der Ausdruck

$$Q = G \frac{a-x'}{b'-y'}$$

wie er sich für diese Fuge berechnet, grösser ist als der Horizontalschub.

3. Untersucht man, ob der Horizontalschub ein Gleiten auf den Lagerflächen bei dem Ganzen oder einem Theile der Gewölbhälfte hervorbringen kann; d. h. man vergewissert sich, dass der Ausdruck

$$Q = \frac{G(\cos\theta + f \sin\theta) + \gamma z}{\sin\theta - f \cos\theta}$$

1) Vernachlässigt man die Cohäsion des Mörtels, so lässt sich das Aufschieben der Bruchfuge *mn* (Fig. 48), für welche der Ausdruck

$$Q = G \frac{a-x}{b'-y}$$

ein Maximum wird, vermittelst des folgenden Satzes vereinfachen.

Gesetzt, der Bruch erfolgte nicht in der Normalfuge *mn*, sondern in einer Verticalebene, welche durch den Punkt *m* geht, und  $\varphi$  sei der Winkel, welchen eine an die innere Wölblinie gezogene Tangente mit der Verticalen bildet; für die Bruchstelle *m* erhält man alsdann die Relation

$$\tan \varphi = \frac{a-x}{b'-y}$$

Es müssen also die an die Bruchstelle *m* in der innern Wölblinie gezogene Tangente und die Verticale *CD*, welche durch den Schwerpunkt des Gewichtes *G* des obern Gewölbstückes geht, sich in einem Punkte der Horizontallinie treffen, welche sich durch den Punkt *N* ziehen lässt. Diesen Satz verdankt man Lamé und Clapeyron. Man sehe das Mémoire sur la stabilité des voûtes in den Annales des Mines, tome VIII, 1823.

oder, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, der Ausdruck

$$Q = G \frac{\cos \theta + f \sin \theta}{\sin \theta - f \cos \theta},$$

wie er sich für eine beliebige Fuge an den Anfängen berechnet, grösser ist als der Horizontalschub. Ist diese Fuge horizontal, so vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck zu

$$Q = fG + \gamma z,$$

und, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, zu

$$Q = fG.$$

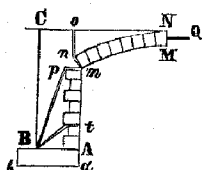
Bei der Aufsuchung der Bruchfrage und des Horizontalschubes kann man sich mit Hülfe der in § 314 u. folg. gegebenen Resultate die Arbeit erleichtern <sup>1)</sup>. Bei den Stichbogen (wenn der Centriwinkel nicht über 120° beträgt) und den scheidrechten Gewölben kennt man die Lage der Bruchfuge zum Voraus, und der Horizontalschub lässt sich unmittelbar berechnen.

Erfährt man aus dem Resultate der Berechnung, dass das projectirte Gewölbe sich nicht im Gleichgewicht halten würde, so muss man entweder die Dicke im Scheitel oder die Breite der Widerlager, oder die Belastungen vermehren. Wenn der Mangel an Gleichgewicht daher käme, dass die unteren Theile auf den Fugenebenen gleiten könnten, so würde man ohne Vermehrung der Mauermaße dem abhelfen können, wenn man die Fugen durch aufrecht gestellte Steine unterbräche, oder den Fugenebenen eine Neigung nach innen gäbe, oder auch endlich die Theile des Mauerwerkes durch eiserne Verbandstücke vereinigte.

§ 328. Besteht bei den unteren Theilen des Gewölbes, oder bei den zugehörigen Widerlagern nicht jede Schicht aus einem einzigen Steine, welcher die ganze Dicke einnimmt, so muss man nach dem in § 314 u. folg. Gesagten auf die Möglichkeit eines Bruches in den Widerlagern Rücksicht nehmen. So kennt man

1) Noch mehr Erleichterung bieten die betreffenden Tabellen im Anhang.

Fig. 48.



z. B. bei dem Gewölbe, welches Fig. 48 darstellt, zum Voraus die Lage der Bruchfuge in *mno*. Man berechne hiernach den Horizontalschub *Q* unter der Bedingung, dass diese Kraft, wenn sie in *N* thätig ist, den Theil *mnoNM* verhindere, sich um die Kante *m* zu drehen.

Um sich nun zu vergewissern, dass der auf diese Weise bestimmte Gewölbschub *Q* das Widerlager nicht durch eine Drehung um die Kante *B* umwerfe, muss man annehmen, es könnte in dem Widerlager in der Richtung *AB* ein Bruch erfolgen, und dann nach Anleitung der eben citirten §§ die Gleichgewichtsbedingungen der Masse *ABCNM* bestimmen.

Hält man in dem Mauerwerk des Widerlagers die Cohäsion des Mörtels für sehr klein oder gleich Null, so muss man (nach § 214 und § 215) annehmen, dass der Bruch des Widerlagers in der Richtung *Bpm* erfolgen könne, und darf also den Theil *ABpm* der Mauermaße nicht mit in Rechnung bringen.

§ 329. Ist der Baugrund für das Fundament eines Gewölbes nicht fest, sondern zusammendrückbar, so muss man auf die in § 257 u. folgd. enthaltenen Bemerkungen Rücksicht nehmen. Demnach muss man bei dem eben besprochenen Gewölbe die Breite *αβ* des Fundamentes aus der Bedingung bestimmen, dass das Gewicht der Mauermaße *αβCNMm*, bezogen auf die Mitte von *αβ*, gleich sein muss dem Momente der Horizontalkraft *Q*, bezogen auf denselben Punkt.

### Normaldruck der Tonnengewölbe zwischen den Fugen.

§ 330. Hat man den Horizontalschub *Q* nach Anleitung des § 327 berechnet, so erhält man, wenn man die Benennungen des § 320, die sich auf Fig. 43 beziehen, belässt,

$$T = G \sin \theta + Q \cos \theta$$

als den Werth des Normaldruckes in einer beliebigen Fuge *mn*. Für eine horizontale Fuge, wie *AB*, wird dieser Druck

$$T = G,$$

also gleich dem Gewichte des Gewölbstückes  $ABNM$ . Für die verticale Fuge  $MN$  erhält man wieder, wie es sein muss,

$$T = Q.$$

§ 331. Es reicht indessen die Kenntniss des Normaldruckes zwischen den Fugen noch nicht aus, um untersuchen zu können, ob dieser Druck auch nicht die Gewölbsteine zerdrücken werde. Man muss noch die Vertheilung dieses Druckes in der Höhe  $mn$  der Fugenebenen kennen. Man betrachte ein Gewölbe, welches sich im Gleichgewichte befindet, dessen Einsturz aber in der durch Fig. 46 dargestellten Weise erfolgen würde, wenn man die Breite der Widerlager etwas geringer machte; die Gewölbsteine sehe man als Körper von absoluter Härte an. Der Normaldruck in der Fuge  $MN$  (Fig. 43), nämlich der Horizontalschub  $Q$  ist offenbar an der obern Kante  $N$  thätig. Wäre  $mn$  die Bruchfuge, so würde auch der Druck in dieser Fuge an der Kante  $m$  thätig sein. In der letzten Fuge  $AB$  wird endlich der Druck offenbar an der Kante  $B$  thätig sein. Was die Fugen anlangt, welche zwischen den genannten liegen, so muss man annehmen, dass bei denjenigen, welche nahe an  $MN$  und  $AB$  liegen, der Druck an der obern Kante, bei denjenigen aber, welche der Bruchfuge nahe liegen, an der untern Kante thätig ist. Die Scheide zwischen diesen beiden Arten von Fugen wird da sein, wo die Resultante aus den beiden Kräften  $G$  und  $Q$ , welche diesen Druck hervorbringen, die Fuge in einem Punkte trifft, der von der obern und untern Kante gleich weit entfernt ist.

§ 332. In der Wirklichkeit sind aber die Gewölbsteine nicht absolut hart, man darf also nicht annehmen, dass der Druck nur an den Kanten thätig sei. Dies ist indess kein Hinderniss, um mit einer hinreichenden Genauigkeit das Gleichgewicht der Gewölbe nach den oben gegebenen Regeln berechnen zu können; nur muss man auf die Elasticität der Masse der Gewölbsteine Rücksicht nehmen, um die Belastungen der einzelnen Theile der Steine richtig zu bestimmen. Diese Frage würde einen besondern Fall einer allgemeineren Aufgabe ausmachen, welche darin besteht, die Veränderungen



zu bestimmen, welche ein elastischer Körper von beliebiger Gestalt erleidet, wenn verschiedene Kräfte auf denselben wirken. Da die Auflösung dieses letztern Problems hier nicht gegeben werden kann, so muss man die in Rede stehenden Kräfte mit Hülfe von Hypothesen aufzufinden suchen, die der Wahrheit sehr nahe zu kommen scheinen und Grenzwerthe liefern können, deren Kenntniss für die Berechnung von Constructionen von grossem Nutzen ist.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden § 331, an, dass das Gewölbe noch im Gleichgewichte befindlich und die Neigung zum Bruche in der durch Fig. 46 dargestellten Weise vorhanden sei. Am wichtigsten wird es sein, den von den Steinen ertragenen Druck in den Bruchfugen zu kennen, nämlich den beiden Endfugen  $MN$  und  $AB$  (Fig. 43) und der Bruchfuge in den Seiten, als welche wir  $mn$  ansehen.

Betrachtet man zuerst die Fuge  $MN$  und beachtet, dass diese Fuge ein Bestreben hat, sich in  $M$  zu öffnen, indem das Gewölbe kurz vor dem Bruche ist, so kann man annehmen:

1. dass die beiden durch diese Fuge getrennten Gewölbsteine an der untern Kante  $M$  keinen Druck gegen einander ausüben;

2. dass vermöge der Elasticität des Materials die Gewölbsteine, indem sie sich gegen einander stützen, um eine kleine Grösse zusammengedrückt werden, deren Betrag von der Kante  $M$ , wo er gleich Null ist, bis zu der obern Kante  $N$  gleichmässig zunimmt;

3. dass der Widerstand der Höhenelemente der Fuge proportional der Grösse der Zusammendrückung ist, welche sie leiden, und also von der Kante  $M$ , wo der Widerstand gleich Null ist, bis zu der Kante  $N$ , wo er sein Maximum erreicht, gleichmässig zunimmt.

Neunt man dann

$K$  den Druck, welchen die Kante  $N$  für jede Flächeneinheit erleidet;

$v$  die Entfernung eines beliebigen Punktes der Fuge  $MN$  von dem untern Endpunkte  $M$ ;

$c$  die ganze Höhe  $MN$  dieser Fuge;

so erhält man  $\frac{Kvdv}{c}$  für den Druck, welchen das Höhenelement  $dv$  des Gewölbsteines erleidet, wenn es sich in

der Entfernung  $v$  von der untern Kante befindet. Es muss aber die auf die Kante  $m$  bezogene Momentensumme der Pressungen, welche sämtliche Höhenelemente erleiden, dem Momente des Gewichtes  $G$  des Gewölbstückes  $mnNM$  gleich sein, wenn man dieses Moment auf denselben Punkt bezieht. Die Momentensumme ist

$$\frac{K}{c} \int_0^c (b-y+v) v dv \text{ oder } \frac{1}{3} K [3(b-y)c + 2c^2];$$

man hat daher die Gleichung

$$\frac{1}{3} K [3(b-y)c + 2c^2] = G(\alpha - x),$$

woraus

$$K = \frac{6G(\alpha - x)}{3(b-y)c + 2c^2}$$

Vermittelst dieser Formel lässt sich der Werth des grössten Druckes berechnen, welchem die Steine im Schlusse des Gewölbes ausgesetzt sind, und nach Anleitung des § 174 u. folgd. prüfen, ob die Steine hinreichenden Widerstand leisten werden.

§ 333. Nach den eben aufgestellten Hypothesen hat man für den Horizontalschub des Gewölbes die Summe der Pressungen in der Höhe der Fuge  $MN$  zu nehmen. Bezeichnet man diese Summe mit  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{K}{c} \int_0^c v dv = \frac{1}{2} Kc,$$

und, wenn man für  $K$  seinen obigen Werth setzt,

$$Q = \frac{3G(\alpha - x)}{3(b-y) + 2c}.$$

Der Angriffspunkt von  $Q$  liegt in  $\frac{2}{3}$  der Höhe der Fuge, von der untern Kante  $M$  aus gerechnet. Dieser neue Werth  $Q$  des Horizontalschubes übertrifft etwas den oben mit  $Q$  bezeichneten Werth, nämlich

$$Q = \frac{G(\alpha - x)}{b-y+c},$$

der unter der Voraussetzung berechnet wurde, dass dieser Druck in  $N$  thätig sei.

Um das Gleichgewicht eines Gewölbes zu prüfen, ist es genauer, die Kraft  $Q$  als Horizontalschub anzu-

nehmen; im Allgemeinen aber werden die Resultate wenig von denen verschieden sein, welche man erhält, wenn man nach § 327 den Horizontalschub als durch die Kraft  $Q$  repräsentirt ansieht.

§ 334. Betrachtet man ferner die Bruchfuge  $mn$ , so kann man ebenfalls annehmen, dass der Druck an der obern Kante  $n$ , wo die Fuge sich zu öffnen strebt, gleich Null ist, und von hier bis zur Kante  $m$ , wo er am grössten ist, gleichmässig zunimmt. Bezeichnet  $z$  die Höhe  $mn$  der Fuge,  $K$  den Maximalwerth des Druckes und  $v$  die Entfernung eines beliebigen Punktes in  $mn$  von der obern Kante  $n$ , so erhält man, wie oben,  $\frac{Kvdv}{z}$  als den Druck, welchen ein Element der Höhe des Gewölbesteines erleidet. Die Summe der Pressungen, welche auf alle Elemente der Höhe kommen, muss dem Normaldrucke gleich sein, welcher für diese Fuge aus dem Gewichte des Gewölbstückes  $mnNM$  und dem Horizontalschube  $Q$  resultirt. Jene Summe ist

$$\frac{K}{z} \int_0^z v dv \text{ oder } \frac{1}{2} Kz;$$

man hat also die Gleichung

$$\frac{1}{2} Kz = G \sin \theta + Q \cos \theta,$$

woraus

$$K = \frac{2(G \sin \theta + Q \cos \theta)}{z}.$$

Diese Formel giebt den grössten Normaldruck auf jede Flächeneinheit, welchen die Steine in der Bruchfuge erleiden. Dieser Druck ist doppelt so gross, als er sein würde, wenn die Kraft in der ganzen Höhe der Fuge gleichförmig vertheilt wäre.

§ 335. Betrachtet man endlich die Fuge  $AB$ , so ersieht man, dass, unter Beibehaltung der in dem vorhergehenden Paragraphen gemachten Annahmen, der obige Ausdruck für  $K$  auch bei dieser Fuge gilt. Bezeichnet  $G$  das Totalgewicht der Gewölbbälfte  $ABNM$ , und ist die in Rede stehende Fuge horizontal, so erhält man einfach

$$K = \frac{2G}{z}.$$

§ 336. Was die Fugen anlangt, welche zwischen den Bruchfugen liegen, so lassen sich die obigen Hypothesen im Allgemeinen hier nicht mit Genauigkeit an-

wenden, weil selbst, wenn ein Gewölbe auf dem Punkte steht, einzustürzen, diese Fugen kein Bestreben haben, sich zu öffnen, und man also den Druck auf die obere oder untere Kante der Fugen nicht gleich Null setzen darf. Bei den Fugen, um welche es sich hier handelt, vertheilt sich der Druck auf eine weniger gleichförmige Weise in der ganzen Höhe der Fugenebenen. Wenn man daher, ohne dies zu berücksichtigen, für diese Fugen den Werth  $K$  nach der Formel in § 334 berechnete, so würde das Resultat den wirklichen Werth des Normaldruckes, den die Steine erleiden, übertreffen. Man sieht ausserdem, dass, wenn die Gestalt des Gewölbes nicht sehr unregelmässig ist, und die Gewölbesteine im Schlusse, in der Bruchfuge, welche sich in den Seiten befindet, und an den Anfängen dem Zerdücken einen hinreichenden Widerstand leisten, sie dies in allen anderen Theilen des Gewölbes um so mehr thun werden.

§ 337. In § 332 wurde angenommen, dass das Gewölbe an der Grenze des Gleichgewichtes, oder kurz vor dem Einsturze sei, und diese Annahme war nöthig, um die Bruchfugen ansehen zu können, als würden sie sich im nächsten Augenblicke öffnen. In der Wirklichkeit besitzen die Gewölbe aber stets einen Ueberschuss an Stabilität, weshalb sich keine Fuge öffnet, wenn dies nicht als Folge der Zusammendrückung des Mörtels geschieht, von welchem Umstande hier abgesehen wird. Der Werth des Horizontalschubes ist dennoch stets nach den oben aufgestellten Regeln zu berechnen. Da die Gewölbesteine in der ganzen Höhe der Fugenebenen in Berührung bleiben, so darf man den Druck auf die obere oder untere Kante der Fugen nicht mehr gleich Null annehmen, man muss vielmehr voraussetzen, dass sich der Druck in der ganzen Höhe der Fugenebenen vertheilt, wenn auch ein geringerer Theil auf die Kante kömmt, wo sich die Fuge öffnen würde, wenn das Gewölbe einstürzen könnte. Der Totalwerth des Druckes auf die Fugenebenen kann ausserdem niemals denjenigen übertreffen, welchen man nach den Formeln in § 330 finden würde. Aus diesen Bemerkungen folgt, dass die Werthe, welche man für  $K$  durch die Anwendung der Formeln in den §§ 332 und 334 auf ein Gewölbe, welches einen Ueberschuss an Stabilität besitzt, findet, von den wirk-

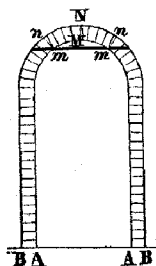
lichen Pressungen desto entferntere Grenzwerte sein werden, je grösser der Ueberschuss an Stabilität ist, welchen das Gewölbe besitzt. Die kleinsten Werte, welche man für  $K$  annehmen darf, sind diejenigen, welche man erhält, wenn man den ganzen Druck in der Höhe der Fugen gleichförmig vertheilt annimmt.

§ 338. Wenn die Gewölbsteine sich nicht unmittelbar berühren und man das Lehrgerüst entfernt, bevor die in den Fugen befindlichen Mörtelschichten eine genügende Härte erlangt haben, so kann ein Setzen eintreten, wobei sich an den Bruchstellen eine gewisse Anzahl von Fugen öffnet. In diesem Falle darf man die Steine keinem grössern Drucke aussetzen, als dem nach den §§ 332 und 334 berechneten, da der Druck nicht allein an dem einen Ende der Fugen, sondern auch auf einen gewissen Theil der Höhe als gleich Null angesehen werden muss. Diese Erscheinungen, denen man zuvorzukommen suchen muss, würden sich schwer auf bestimmte Ausdrücke zurückführen und einer genauen Rechnung unterwerfen lassen.

### Ueber den Gebrauch eiserner Durchzüge zur Verstärkung der Tonnengewölbe.

§ 339. Sind die Widerlager eines Gewölbes zu schwach, als dass Gleichgewicht bestehen könnte, so lässt sich das Gewölbe mittelst eiserner Durchzüge verstärken, die man in den Seiten anbringt. Der Gebrauch solcher Durchzüge ist in Italien sehr verbreitet; man sieht sie dort bei den prächtigsten Bauwerken. Man nehme an, das Gewölbe, welches Fig. 49

Fig. 49.



darstellt, neige sich zum Bruche in der Fuge  $mn$ , wobei sich die oberen Theile senken würden, während sie bei  $N$  in Berührung bleiben und die unteren Theile, gegen welche sie in den Kanten  $m$  drücken, durch eine Drehung um die Kanten  $B$  nach aussen umwerfen würden. Der Bruch dieses Gewölbes wird sich verhindern lassen, wenn man die beiden Hälften mittelst eines horizontalen Durchzuges verbindet, welchen man am passendsten unmittelbar unterhalb der Bruchfuge  $mn$  anbringt; denn

beim Beginn des Einsturzes haben die Punkte  $m$  wirklich den grössten Weg in horizontaler Richtung zu durchlaufen.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, den Bruch des Gewölbes zu verhindern mittelst einer Horizontalkraft, deren (virtuelles) Moment, d. h. das Product aus der Kraft und dem von ihrem Angriffspunkte in dem Sinne ihrer Richtung durchlaufenen Wege, einen bestimmten Werth besitzen muss, damit die Summe der Momente von sämmtlichen Kräften, welche auf jede Gewölbhälfte wirken, gleich Null werde. Man muss aber diese Kraft in der Richtung  $mn$  anbringen, weil alsdann der von dem Angriffspunkte durchlaufene Weg ein Maximum wird, und daher die Kraft selbst ein Minimum.

Man kann ausserdem die Spannung des Durchzuges ermitteln, wenn man beachtet, dass das (statische) Moment dieser Spannung mit dem Momente des Gewichtes der Gewölbhälfte  $ABMN$  zusammen dem Momente des in  $N$  wirksamen Horizontalschubes gleich sein muss, wenn man alle diese Momente in Bezug auf die Kante  $B$  nimmt.

§ 340. Ist die Dicke eines Gewölbes und der Widerlager desselben sehr klein, so ist es möglich, dass ein Durchzug nicht ausreicht, um den Bruch zu verhindern. Man wird sich darüber Gewissheit verschaffen, wenn man die Gewölbstücke  $ABmn$  und  $mnMN$  jedes einzeln untersucht und auf sie die oben angegebenen Regeln anwendet. Findet sich dann, dass diese Gewölbstücke nicht im Gleichgewicht sind, so muss man in der Höhe der Fugen, in welchen die Neigung zum Bruche vorhanden ist, neue Durchzüge anbringen und die auf dieselben wirkenden Kräfte nach Anleitung des eben Gesagten bestimmen.

§ 341. Bei einem solchen Gebrauche der Durchzüge kann es vorkommen, dass in Folge einer Erhöhung der Temperatur der Durchzug sich ausdehnt und also nicht mehr den nöthigen Widerstand leistet, oder auch in Folge einer Erniedrigung der Temperatur zu sehr angespannt und dem Zerreißen ausgesetzt wird. Man wird Mittel suchen müssen, die diese Wirkungen verhüten. Man nenne nun

- $\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche des Durchzuges;
- $T$  den kleinsten Werth der Spannung, welche der Durchzug ertragen muss, um den Zweck erfüllen zu können, zu welchem man ihn bestimmt hat;
- $t$  die Spannung des Durchzuges, wenn er an seine Stelle gebracht wird;
- $R$  den grössten Werth der Spannung, welche der Durchzug für jede Flächeneinheit des Querschnittes ertragen kann, ohne dem Zerreißen ausgesetzt zu sein;
- $V$  die höchste Temperatur, welcher der Durchzug ausgesetzt werden wird, ausgedrückt in Graden des hunderttheiligen Thermometers;
- $v$  die Temperatur zur Zeit der Einsetzung des Durchzuges;
- $V'$  die niedrigste Temperatur, welcher der Durchzug ausgesetzt werden wird;
- $\delta$  die lineare Ausdehnung des Materials, aus welchem der Durchzug besteht, für einen Grad des hunderttheiligen Thermometers;
- $E$  behalte die in § 77 angegebene Bedeutung (des Elasticitätsmoduls).

Wir erinnern ausserdem, dass die lineare Ausdehnung oder Verkürzung für eine Veränderung der Temperatur um  $100^0$  bei den folgenden Materialien die nachstehenden Werthe hat; nämlich bei

Schmiedeeisen . . . . .	0,00112
Gusseisen . . . . .	0,00111
Tannenholz . . . . .	0,0008
Stein, ungefähr <sup>1)</sup> . . . .	0,0005.

Bei dem Einsetzen des Durchzuges beträgt die Spannung desselben  $\frac{t}{\omega}$  für die Einheit der Querschnittsfläche; er wird also um den Bruch  $\frac{t}{E\omega}$  seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt. Steigt die Temperatur um  $V - v$  Grade, so erfolgt eine Ausdehnung um  $\delta(V - v)$  und die Spannung beträgt nur noch  $t - \delta(V - v)E\omega$ ; es muss daher sein

$$t - \delta(V - v)E\omega > T.$$

1) Notice sur la dilatation de la pierre, par M. Designy. Journal du génie civil, tome II, pag. 227.

Sinkt die Temperatur von  $v$  auf  $V'$  Grad, so erleidet der Durchzug eine Verkürzung um  $\delta(v - V')$  und die Spannung wird  $t + \delta(v - V') E\omega$ . Es muss daher auch sein

$$t + \delta(v - V') E\omega < R'\omega.$$

§ 342. Aus den beiden Ungleichheiten folgt

$$\begin{aligned} t &> T + \delta(V - v) E\omega, \\ t &< R'\omega - \delta(v - V') E\omega; \end{aligned}$$

woraus

$$R'\omega - \delta(v - V') E\omega > T + \delta(V - v) E\omega$$

und daher

$$\omega > \frac{T}{R' - \delta(V - v) E}.$$

Nachdem man  $\omega$  so bestimmt hat, dass der vorstehenden Bedingung Genüge geschieht, wird man aus den beiden obigen Ungleichheiten zwei Grenzwerte erhalten, zwischen denen  $t$  liegen muss. Man sieht, dass man die Bedingung, dass das Eisen nicht dem Zerreißen ausgesetzt sein soll, unmöglich erfüllen kann, so bald die Differenz der extremen Temperaturen so gross ist, dass

$$V - V' = \text{oder} > \frac{R'}{\delta E}$$

wird.

Die Werthe, welche man bei Schmiedeeisen für  $E$  und  $R'$  anzunehmen hat, finden sich in den §§ 102 und 182 angegeben <sup>1)</sup>.

§ 343. Bisher wurde angenommen, dass die Entfernung der beiden Punkte, wo die Enden des Durchzuges verankert werden, nicht durch den Temperaturwechsel verändert werden könne. Wäre dies anders,

1) Nach den oben citirten Paragraphen ist für Schmiedeeisen  $E = 20\,000\,000\,000 \text{ Kil.}$  und  $R' = 6\,000\,000 \text{ Kil.}$ ; also  $\frac{R'}{E} = \frac{3}{10000}$  und  $\frac{R'}{\delta E} = \frac{3}{0,112} = 27^\circ$ , ein Temperaturwechsel, der bei uns (in Deutschland) jedes Jahr erfolgt. Nimmt man aber nach Tredgold und Duleau (siehe § 182)  $R'$  im Mittel zu  $12\,000\,000 \text{ Kil.}$  an, so erhält man  $\frac{R'}{\delta E} = 53\frac{1}{2} \text{ Grad}$ , ein Werth, der noch grösser wird, wenn man (nach dem folgenden Paragraphen) auf die Ausdehnung des Steins Rücksicht nimmt.



so müsste man in den obigen Formeln für  $\delta$  nicht mehr die Ausdehnung des Materials des Durchzuges setzen, sondern die Differenz der Ausdehnungen, welche respective dem Durchzuge und dem Körper zugehören, in welchem der Durchzug verankert wird.

### Gleichgewicht der Kuppelgewölbe.

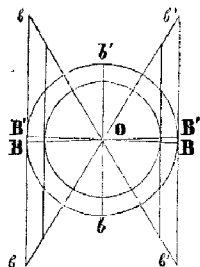
§ 344. Das Gleichgewicht der Kuppelgewölbe unterscheidet sich von dem der Tonnengewölbe besonders darin, dass bei diesen letzteren es zum Umsturze des Gewölbes nur derjenigen Fugenrisse bedarf, welche in den vorhergehenden Paragraphen angegeben wurden. Es ist zum Bruche eines solchen Gewölbes nicht nothwendig, dass irgend andere Fugenrisse nach Ebenen erfolgen, welche auf der Länge desselben normal stehen. Ein sphärisches Gewölbe hingegen kann nicht umgeworfen werden, ohne dass sich nicht ausser den Fugen, welche sich wie bei den cylindrischen Gewölben öffnen, auch noch Mauerrisse in der Richtung der Meridianebenen bildeten, und die Cohäsion des Mörtels muss nothwendig aufgehoben werden, wenn diese Risse entstehen sollen. Der Bruch des Gewölbes kann ferner nicht ohne eine gewisse Trennung und Verschiebung der benachbarten Steine eintreten, so dass, wenn diese Steine gross sind, und sie sorgfältig ausgemessen und mit versetzten Fugen gelagert worden, sie zum Theil zerbrochen werden müssen, bevor der Bruch des Gewölbes erfolgen kann. Es ist schwer, den Widerstand der Cohäsion des Mörtels und besonders den der Steine genau in Rechnung zu bringen, und bei der Construction grosser Kuppeln scheint es angemessen, auf diese beiden Widerstände gar keine Rücksicht zu nehmen <sup>1)</sup>. Wir werden hier ein Kuppel-

1) Aus den Rechnungen von Lesueur, Jacquier und Boscowich folgt, dass, wenn man von der Cohäsion des Mörtels absieht, das Moment der Kräfte, welche sich bestreben, die Kuppel der Peterskirche in Rom umzuwerfen, sich zu dem Momente der widerstehenden Kräfte ungefähr wie 3 zu 2 verhält. (*Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di S. Pietro al fine dell' anno 1742.*) Diese Kuppel ist fast ganz aus Ziegelsteinen mit Puzzolanmörtel aufgeführt. Lange Zeit genügte die Cohäsion der Bestandtheile, um das Gleichgewicht zu erhalten; da sich aber die Mauerrisse, welche durch die kleinen Bewegungen hervorgebracht wurden, die durch Einschlagen des Blitzes und die Erdbeben entstanden, allmählich vermehrt und vergrößert hatten, so musste man der Zunahme dieser Beschädigungen ein Ziel setzen, indem man eiserne Ringe um die unteren Theile der Kuppel legte.

gewölbe betrachten, als würde es von den Meridianebenen in sehr viele Theile zerfällt, welche keine Verbindung unter einander besitzen.

§ 345. Es wird sich demnach Alles, was oben über die Tonnengewölbe gesagt wurde, auch auf die Kuppelgewölbe anwenden lassen, mit dem einzigen Unterschiede, dass statt der parallelen Verticalebenen, von denen die Theile der Tonnengewölbe eingeschlossen waren, man sich hier Verticalebenen denken muss, welche einen sehr kleinen Winkel mit einander bilden und sich in der Axe der Kuppel schneiden. Das Gleichgewicht eines jeden von solchen Verticalebenen eingeschlossenen Theiles muss nach den oben gegebenen Regeln geprüft werden; aber es ist gleichgültig, ob man einen dieser Theile für sich betrachtet, oder die Rechnung sogleich für das ganze Gewölbe vornimmt. Es stelle Fig. 50 den Grundriss

Fig. 50.



eines Kugelgewölbes dar; man kann nun auf gleiche Weise das Gleichgewicht eines Theiles  $BOB'$ , welches von zwei sehr nahe liegenden Meridianebenen begrenzt wird, oder das Gleichgewicht der Gewölbhälfte  $bBB'b'$  untersuchen. Will man das Letztere thun, so denke man sich den halben Umfang  $bBB'b'$  in  $\beta BB'\beta'$  abgewickelt und eben so alle übrigen halbkreisförmigen Elemente der Kuppel auf den Seitenlinien des horizontalen Cylinders, der die Kuppel in dem

Meridianausschnitte berührt, dessen Projection  $BOB'$  ist. Man erhält dadurch einen Theil eines Tonnengewölbes, der von zwei Verticalebenen  $\beta O\beta'$ ,  $\beta O\beta'$  eingeschlossen wird, und worauf man die in § 320 und folgd. aufgestellten Regeln anwenden kann. Bei der Bestimmung des Gewichtes und der Lage des Schwerpunktes der verschiedenen Theile hat man übrigens darauf zu achten, dass die beiden Verticalebenen, von denen die Theile eingeschlossen werden, sich in der Axe der Kuppel schneiden, und daher die Länge der horizontalen Elemente desto geringer ist, je näher diese Elemente dem Scheitel liegen, in welchem Punkte ihre Länge gleich Null ist.

Finden sich Thüren oder Fenster in den unteren Theilen der Kuppel, so ist klar, dass man in dem Theile des Tonnengewölbes  $\beta\beta'$  entsprechende leere Räume annehmen muss.

§ 346. Ist eine Kuppel im Gleichgewicht, so kann man dieselbe nach einer horizontalen Ebene durchschneiden und den obern Theil hinwegnehmen, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Wenn man z. B. den Theil *mnNM* (Fig. 43) hinweggenommen hat und den bleibenden Theil *ABnm* einer Kuppel betrachtet, welcher von zwei sehr nahe an einander liegenden Meridianebenen eingeschlossen wird, so kann dieser Theil entweder durch sich selbst im Gleichgewicht sein, oder das Gleichgewicht wird erst durch eine in *n* angreifende Horizontalkraft hergestellt. Im letztern Falle entsteht zwischen den Gewölbsteinen an dem obern Ende des bleibenden Theiles *ABnm* ein auf den Verticalfugen normal stehender Horizontaldruck, der, so lange die Kuppel noch vollständig war, nicht existirte.

§ 347. Bestände ein Kuppelgewölbe wirklich aus sehr vielen, durch die Meridianebenen getrennten Theilen, die keine Verbindung mit einander hätten, so würde sich das Gewölbe nicht nach solchen Ebenen zerschneiden und zum Theil hinweg nehmen lassen, ohne den Einsturz des Ganzen herbeizuführen. Die grossen, mit Halbkugeln überspannten Nischen bleiben daher auch nur desshalb im Gleichgewicht, weil die Materialien hinreichenden Zusammenhang haben, oder die Vordermauer eine genügende Stabilität besitzt, um der Seitenwirkung des Halbgewölbes widerstehen zu können.

### Ueber den Gebrauch eiserner Ringe zur Verstärkung der Kuppelgewölbe.

§ 348. Der Nutzen solcher Verstärkungen ist durch sehr viele Belege erwiesen <sup>1)</sup>. Die Untersuchungen in §339 ergeben, dass die Ringe vorzugsweise in der Höhe der Bruchfuge angebracht werden müssen. Bezeichnet man

1) Man sehe das zweite Buch der *Memorie storiche della gran cupola del Vaticano*, von Poleni, wo der Verfasser mehrere Kuppelgewölbe aufzählt, welche vermittelst eiserner Ringe wieder hergestellt und consolidirt worden sind. Bei der Paulskirche in London sind die innere Kuppel und der Kegel, welcher die Laterne trägt, auf dieselbe Weise verstärkt. Eben so das mittlere Gewölbe bei der Kuppel des Pantheons in Paris. Man sehe *Rondelet's Art de bâtir*, tome IV., pag. 527 der fünften Auflage.

mit  $t$  die Spannung eines Kreisringes, so bringt diese Spannung die Wirkung einer Horizontalkraft hervor, die gleich

$$2\pi \cdot t$$

ist, und, auf allen Punkten des Kreisumfanges gleichförmig vertheilt, normal gegen diesen Umfang gerichtet ist. Wenn man daher bei der Berechnung des Gleichgewichtes einer Kuppel diese sich durch ein Tonnengewölbe in der in § 345 angegebenen Weise ersetzt denkt, so muss man die beiden Hälften dieses Gewölbes als durch einen oder mehrere Durchzüge vereinigt ansehen, deren Spannung zusammen gleich  $\pi \cdot t$  ist.

Der vorstehende Satz folgt aus dem, was in § 307 gesagt wurde. Man kann sich von der Richtigkeit desselben direct überzeugen, wenn man beachtet, dass nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zwischen den in der Richtung der Halbmesser und den in der Richtung des Kreisumfanges wirkenden Kräften Gleichgewicht stattfindet, wenn sich die ersteren zu den letzteren verhalten, wie eine sehr kleine Variation des Kreisumfanges zu der entsprechenden Variation des Halbmessers, d. h. wie der Umfang zum Halbmesser.

Das in § 340 u. folg. Gesagte lässt sich in gleicher Weise auf die zur Verstärkung der Kuppelgewölbe dienenden Ringe anwenden.

### Gleichgewicht der Kloster- und Kreuzgewölbe.

§ 349. Die Figuren 51 und 52 stellen den Grund-

Fig. 51.

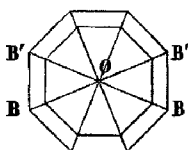
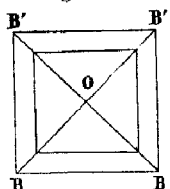


Fig. 52.

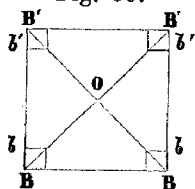


riss eines Klostergewölbes mit polygonaler Basis dar. Man kann sich ein solches Gewölbe durch Vertical-ebenen, welche von den Ecken des Polygons ausgehen, in Theile zerfällt denken,

welche keine Verbindung unter einander besitzen, und dann zwei einander gegenüber liegende Theile,  $BOB$ ,  $BOB'$  als Stücke eines Tonnengewölbes ansehen. Auf diese Gewölbstücke kann man die in § 320 u. folgd. gegebenen Regeln anwenden, wobei man jedoch bei der

Berechnung der Volumen und der Bestimmung der Schwerpunkte stets darauf Rücksicht nehmen muss, dass die Verticalebenen, von denen diese Stücke eingeschlossen werden, gegen einander geneigt sind und sich in der Axe des Klostergewölbes schneiden. In der Wirklichkeit sind die Theile eines solchen Gewölbes mit einander verbunden, nämlich theils durch die Cohäsion des Mörtels, theils dadurch, dass man die Grate aus grösseren, auf den Schwalbenschwanz verbundenen Steinen auführt, die auseinander gerissen und zerbrochen werden müssen, bevor das Gewölbe einstürzen kann. Der Einfluss einer solchen Verbindung ist hier merklicher als bei den Kuppelgewölben, und desto grösser, je weniger Seiten die polygonale Basis hat. Da indess dieser Einfluss nicht der Art ist, dass er mit Genauigkeit in Rechnung gebracht werden könnte, so scheint es angemessen, nicht auf ihn Rücksicht zu nehmen, besonders dann, wenn es sich um grosse Gewölbe handelt.

§ 350. Das Gleichgewicht eines Kreuzgewölbes (Fig. 53.) kann auf gleiche Weise



untersucht werden, indem man dasselbe als durch die Verticalebenen  $BOB'$ ,  $BOB''$  in Theile zerlegt denkt, welche von einander unabhängig sind. Die Theile  $BOB$ ,  $B'OB'$  gehören zu einem und demselben Tonnengewölbe; der Bruch derselben erfolgt, indem sie die Widerlagspfeiler um

die Kanten  $Bb$ ,  $B'b'$  umwerfen. Man beachte, dass hier die horizontalen Elemente der Gewölbtheile desto länger sind, je näher sie dem Scheitel liegen. Der Horizontalschub ist daher bei gleicher Gewölbstärke hier grösser als bei den Klostergewölben. Man sieht aber andererseits, dass die Pfeiler auch die Gewölbstücke  $BOB'$ ,  $BOB''$  tragen, und nicht umgeworfen werden können, ohne dass diese Gewölbstücke an der Bewegung Theil nehmen; man muss daher zu dem Stabilitätsmoment der Pfeiler für die Kanten  $Bb$ ,  $B'b'$  das Moment der Hälfte der Gewölbstücke  $BOB'$ ,  $BOB''$  für dieselben Kanten hinzufügen. Hierin unterscheiden sich die Kreuzgewölbe von den Klostergewölben, indem bei letzteren

im Falle des Bruches die Theile einzeln umgeworfen werden und nicht gegenseitig zu ihrer Stabilität beitragen. Was oben über den Einfluss der Verbindung der Gewölbtheile gesagt wurde, findet auch hier seine Anwendung.

---

#### Viertes Kapitel.

##### **Bemerkungen über einige bei den Gewölben vorkommende Rechnungen.**

§ 351. Die in dem vorhergehenden Kapitel angegebenen Rechnungen erfordern die Bestimmung der Volumen der Gewölbtheile, so wie die Ermittlung der Lage der Schwerpunkte dieser Theile, oder vielmehr des Abstandes dieser Schwerpunkte von einer gegebenen Ebene. Handelt es sich um ein Tonnengewölbe, welches von zwei auf dessen Axe normal stehenden Verticalebenen eingeschlossen wird, so stellt man die Rechnung im Allgemeinen für eine Einheit der Länge des Gewölbes an, und braucht nur die Flächeninhalte der Querschnitte in Betracht zu ziehen. In anderen Fällen, und besonders bei den Kuppel-, Kreuz- und Klostergewölben müssen die Volumen der Gewölbtheile in Betracht gezogen werden.

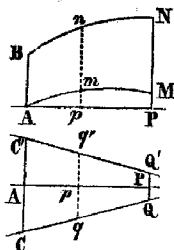
Da der Querschnitt eines Gewölbes gewöhnlich von geraden Linien, Kreisbogen oder anderen Curven, deren Gleichungen bekannt sind, begrenzt wird, so lassen sich die Rechnungen nach den Regeln, welche die Geometrie an die Hand giebt, genau ausführen <sup>1)</sup>. Es wird aber einfacher sein, sich einer Näherungsmethode zu bedienen, wie dies schon Coulomb <sup>2)</sup> bemerkt hat.

---

<sup>1)</sup> Audoy hat auf diese Weise die Formeln für die verschiedenen Arten der Tonnengewölbe entwickelt. Man sehe das Memoire desselben in dem *Mémoire de l'officier du génie*, Nr. 4.

<sup>2)</sup> *Mémoires des savans étrangers*. 1773.

Fig. 54.



Der in Rede stehende Querschnitt lässt sich in Theile wie  $ABMN$  (Fig. 54) zerlegen, welche von zwei verticalen Linien und zwei anderen beliebigen Linien begrenzt werden. Wird das Gewölbe von zwei Verticalebenen eingeschlossen, die auf der Axe desselben normal stehen, so hat man nur die Fläche  $ABMN$  zu betrachten; sind aber die beiden Verticalebenen gegen die Axe geneigt, so hat man das Volumen zu betrachten, welches der Fläche  $ABMN$  entspricht und dessen Horizontalprojection  $CC'QQ$  ist. Nach diesen Vorbemerkungen nenne man

$x$  die Abscisse  $Ap$ ;

$y$  die Länge  $mn$ ;

$z$  die Länge  $q'q$ ;

$X$  die Abscisse  $AP$ ;

und sehe  $y$  und  $z$  als Functionen von  $x$  an. Wenn man nun den Inhalt der Fläche  $ABMN$  betrachtet, so erhält man

$$\int_0^X y dx$$

als Ausdruck dieses Inhaltes, und

$$\frac{\int_0^X xy dx}{\int_0^X y dx}$$

als den horizontalen Abstand des Schwerpunktes der Fläche von der Linie  $AB$ . Wenn man das Volumen betrachtet, dessen Projection  $CC'QQ$  ist, so erhält man

$$\int_0^X yz dx$$

als Ausdruck dieses Volumens, und

$$\frac{\int_0^X xyz dx}{\int_0^X yz dx}$$

als den horizontalen Abstand des zugehörigen Schwerpunktes von einer Verticalebene, welche durch  $CC'$  geht.

§ 352. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass die Rechnungen, um welche es sich hier handelt, stets auf die Angabe des Werthes von bestimmten Integralen zurückkommen, welche allgemein durch

$$\int_0^X F(x) dx$$

ausgedrückt werden. Für den Werth solcher Integrale hat man aber die folgenden Näherungsformeln. Denkt man sich das Intervall  $AP$  oder  $X$  in eine gewisse Zahl  $n$  von gleichen Theilen, deren Länge  $\Delta x$  ist, getheilt; setzt man  $F(x) = u$  und bezeichnet mit  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$  die Werthe von  $u$ , welche zu den Abscissen 0,  $\Delta x$ ,  $2 \Delta x, \dots, n \Delta x$  gehören, so hat man <sup>1)</sup>

$$\int_0^X F(x) dx = \Delta x \left\{ \frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (\Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_n) + \frac{1}{24} (\Delta^4 u_0 - \Delta^4 u_n) - \frac{1}{720} (\Delta^6 u_0 - \Delta^6 u_n) + \text{etc.} \right\}.$$

Ist  $n$  eine gerade Zahl, so hat man auch

$$\int_0^X F(x) dx =$$

$$\frac{\Delta x}{3} \left\{ \begin{aligned} &u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 4u_5 + \dots + 2u_{n-2} + 4u_{n-1} + u_n \\ &+ \frac{1}{35} (\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_2 + \Delta^4 u_4 + \dots + \Delta^4 u_{n-6} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-2}) \\ &+ \frac{1}{35} (\Delta^6 u_0 + \Delta^6 u_2 + \Delta^6 u_4 + \dots + \Delta^6 u_{n-6} + \Delta^6 u_{n-4} + \Delta^6 u_{n-2}) \\ &- \frac{1}{1260} (\Delta^8 u_0 + \Delta^8 u_2 + \Delta^8 u_4 + \dots + \Delta^8 u_{n-6} + \Delta^8 u_{n-4} + \Delta^8 u_{n-2}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

Der Gebrauch dieser Formeln wird mehr Sicherheit gewähren, wenn man so operirt, dass in der Curve, deren Ordinate  $u$  ist, sich kein Biegungspunkt zwischen den Theilpunkten der Abscissenaxe befindet. Wenn die Curve Biegungspunkte besitzt, oder plötzliche Wechsel in Krümmung und Richtung darbietet, so hat man das Integral nach den Punkten dieser Art in mehrere Theile zu zerlegen und die entsprechenden Werthe einzeln zu berechnen.

Endlich kann man die Operationen, welche für die Berechnung der Gewölbe nöthig werden, bedeutend dadurch abkürzen, dass man die Längen der in dem vorhergehenden Paragraphen mit  $y$  und  $z$  bezeichneten Linien auf mit Genauigkeit ausgeführten Zeichnungen misst.

1) Navier-Wittstein, § 560 und 561.



#### Vierter Abschnitt.

### Theorie der Holz- und Eisenconstructions.

---

§ 353. Die Holz- und Eisenconstructions bestehen im Allgemeinen aus Theilen, die theils nur an den Enden, theils an verschiedenen Punkten ihrer Länge mit einander verbunden sind. Je nachdem diese Constructions von unten unterstützt, oder von oben gehalten werden, bieten sie verschiedene Eigenthümlichkeiten dar. Das Gleichgewicht muss stets ein stabiles sein; im ersten Falle bedarf es dazu einer unveränderlichen Gestalt des Systemes, während im zweiten Falle das Gleichgewicht stets und selbst dann noch stabil sein wird, wenn die Construction vollkommen biegsam ist.

Das allgemeinste Princip, welches man bei der Anordnung einer derartigen Construction befolgen kann, besteht darin, die Haupttheile in der Richtung der Geraden zu legen, welche sich von den Angriffspunkten der Belastungen nach den Stützpunkten ziehen lassen. Bei einer so angeordneten Construction haben die Belastungen kein Bestreben, die einzelnen Theile um die an den Enden derselben angebrachten Verbindungen zu drehen. Dieses Princip ist besonders auf diejenigen Constructions anwendbar, welche von unten unterstützt werden.

§ 354. Der Widerstand, welchen ein jedes Stück einer Construction leistet, muss den Belastungen angemessen sein, welche dasselbe zu tragen haben kann.

Von dem Grade des Widerstandes, welchen ein Stück leisten wird, kann man sich eine genaue Vorstellung verschaffen, wenn man beachtet, dass das Resultat einer beliebigen Formveränderung, welche ein Stück durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte erleidet,

stets eine Verlängerung oder Verkürzung der Längensfasern des Stückes ist. Bei einer zu grossen Verlängerung oder Verkürzung erfolgt der Bruch des Stückes entweder durch Zerreißen oder durch Zerquetschen der Fasern. Die Verlängerungen oder Verkürzungen, welche hier in Frage kommen, werden stets weit geringer sein, als diejenigen, durch welche der Bruch erfolgt; doch kann man sie in allen Fällen als das Mass der Anstrengung des Stückes betrachten. Hiernach reducirt sich in jedem einzelnen Falle, wo die Gestalt des Stückes und die auf dasselbe wirkenden Kräfte gegeben sind, die Frage darauf, das Verhältniss der Verlängerung oder Verkürzung der Fasern aufzufinden. Uebertrifft die Spannung, welche dieser Verlängerung oder Verkürzung entspricht, nicht die im siebenten Kapitel des ersten Abschnittes angegebenen Grenzen, so kann man sicher sein, dass das Stück die verlangte Stärke besitzt.

### Erstes Kapitel.

#### Gleichgewicht eines horizontalen, prismatischen Stabes bei verschiedener Unterstützung und Belastung.

§ 355. Aus den in § 86 u. folgd. gewonnenen Resultaten kennt man die Gleichgewichtsbedingungen eines prismatischen Stabes in den einfachsten Fällen. Wird ein solcher Stab an dem einen Ende festgehalten (eingemauert) und an dem andern Ende mit einem Gewichte  $P$ , auf jeder Einheit der Länge aber mit einem Gewichte  $p$  belastet, so hat man (nach den §§ 86 und 89)

$$f = \frac{P}{8} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{p}{8} \cdot \frac{a^4}{4}$$

als die Senkung (Durchbiegung) des freien Endes, wobei  $a$  die Länge des Stabes (soweit derselbe frei ist) und  $8$

das Elasticitätsmoment bezeichnet, dessen allgemeiner Ausdruck in § 80 gegeben ist.

§ 356. Wird ein Stab frei auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte mit einem Gewichte  $2P$ , auf jeder Einheit der Länge aber mit einem Gewichte  $p$  belastet, so hat man (nach den §§ 87 und 90)

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5a^4}{24}$$

als die Senkung der Mitte des Stabes, wobei  $a$  die halbe Entfernung der Stützen von einander bezeichnet.

§ 357. Aus den in § 121 u. folgd. enthaltenen Resultaten kennt man die Gleichgewichtsbedingungen eines auf dieselbe Weise belasteten, prismatischen Stabes für den Fall des Bruches. Wird ein Stab an dem einen Ende mit einem Gewichte  $P$  belastet, oder frei auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte mit einem doppelt so grossen Gewichte belastet, und in beiden Fällen ausserdem auf jeder Einheit der Länge mit einem Gewichte  $p$ , so hat man nach den §§ 121 und 122, 124 und 125 (wenn man die Krümmung des Stabes vernachlässigt)

$$\rho = Pa + \frac{1}{2} pa^2,$$

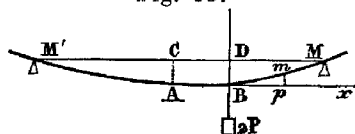
wobei  $a$  im ersten Falle die Länge des Stabes, im zweiten Falle die halbe Entfernung der Stützen von einander bezeichnet, und  $\rho$  das Bruchmoment ist, dessen allgemeiner Ausdruck in den §§ 113 und 114 gegeben ist.

§ 358. Ist die Gestalt, welche ein prismatischer Stab in Folge der Biegung annimmt, bekannt, so lassen sich daraus unmittelbar die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches finden. Der Bruch des Stabes wird da am leichtesten eintreten, wo die Krümmung am grössten ist, und wenn der Stab im Beginn ist, zu brechen, so ist das Moment des Widerstandes gegen Biegung in diesem Punkte gleich dem Momente des Widerstandes gegen den Bruch. Man erhält also die auf den Fall des Bruches sich beziehenden Gleichgewichtsbedingungen, wenn man  $\rho$  gleich dem Maximalwerth von  $\varepsilon \frac{d^3y}{dx^3}$  setzt, wobei  $x$  und  $y$  die Coordinaten der Curve sind, welche der Stab bildet, und  $\rho$  und  $\varepsilon$  die dafür in § 80 und § 113 angegebenen Bedeutungen haben.

**Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der in einem beliebigen, zwischen den Stützen liegenden Punkte belastet ist.**

§ 359. Man denke sich den Stab  $MM'$  (Fig. 55) auf zwei Stützen gelegt,

Fig. 55.



die sich in derselben Horizontalen befinden, und in einem Punkte belastet, der nicht mehr in der Mitte zwischen den beiden

Stützen liegt. Es handelt sich um die Gleichgewichtsbedingungen dieses Stabes in Bezug auf die Biegung und den Bruch desselben. Man nenne

$a$  die halbe Entfernung  $CM$  der beiden Stützen von einander;

$z$  die Entfernung  $CD$ ;

$x$  die Abscisse  $Bp$ ;

$y$  die Ordinate  $mp$ ;

$f$  die Senkung  $BD$  des Punktes  $B$ ;

$\omega$  den Winkel, welchen die Tangente für den Punkt  $B$  der Curve mit der Horizontalen bildet;

$\varepsilon$  behalte die in § 80, und

$\rho$  die in § 113 angegebene Bedeutung.

Die Composanten des Gewichtes  $2P$ , welche die auf die Stützen  $M$  und  $M'$  wirkenden Kräfte repräsentiren, sind respective

$$P \frac{a+z}{a} \quad \text{und} \quad P \frac{a-z}{a}.$$

Jeder Theil  $BM$ ,  $BM'$  des Stabes wird aber eben so gebogen, als ob der Punkt  $B$  festgehalten würde, während die genannten Kräfte an den Enden  $M$  und  $M'$  wirken, und man hat daher für den Theil  $BM$ , wie in § 86

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} (a-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)x - \frac{x^2}{2} \right\} + \tan \omega,$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + x \tan \omega,$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{(a+z)(a-z)^2}{3a} + (a-z) \tan \omega.$$

Für den Theil  $BM'$  hat man ebenso

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} (a+z-x), \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} \left\{ (a+z)x - \frac{x^2}{2} \right\} - \operatorname{tang} \omega, \\ y &= \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} \left\{ (a+z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - x \operatorname{tang} \omega, \\ f &= \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{(a-z)(a+z)^3}{3a} - (a+z) \operatorname{tang} \omega.\end{aligned}$$

Da  $f$  und  $\operatorname{tang} \omega$  in diesen beiden Gleichungen dieselben Werthe haben müssen, so findet man durch Elimination

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{2(a^2 - z^2)z}{3a}, \quad f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{(a^2 - z^2)^2}{3a}.$$

§ 360. Die Gleichungen der Theile  $BM$  und  $BM'$  der Curve sind respective

$$\begin{aligned}y &= \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ \frac{2}{3}(a-z)zx + \frac{1}{2}(a-z)x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right\}, \\ y &= \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} \left\{ -\frac{2}{3}(a+z)zx + \frac{1}{2}(a+z)x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right\}.\end{aligned}$$

Die kleinste Ordinate (d. h. die negative Ordinate, deren absoluter Werth ein Maximum ist) erhält man, wenn man in der zweiten Gleichung  $\frac{dy}{dx} = 0$  setzt; man erhält dadurch

$$x = a + z - \sqrt{a^2 + \frac{2}{3}az - \frac{1}{3}z^2}.$$

Nennt man  $y_1$ , den Werth von  $y$ , welcher diesem Werthe von  $x$  entspricht, so ist der Krümmungspfeil der Curve  $f - y_1$ . In dem Punkte  $B$  ist die Krümmung und dadurch die Neigung zum Bruche am grössten; wir werden diesen Punkt den Bruchpunkt, die Bruchstelle nennen.

§ 361. Nach dem eben Gesagten und in Uebereinstimmung mit § 358 werden die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches ausgedrückt durch die Gleichung

$$\rho = P \cdot \frac{a^2 - z^2}{a}.$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} (a-z-x) - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^2}{2} - a'x + \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)x - \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^2x}{2} - \frac{a'x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\} + \text{tang } \omega$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^2x^2}{4} - \frac{a'x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\} + x \text{tang } \omega;$$

und setzt man in den beiden letzten Gleichungen  $x=a'$ , so erhält man die dem Punkte  $N$  entsprechenden Werthe, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)a' - \frac{a'^2}{2} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^3}{6} + \text{tang } \omega,$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{a'^2}{2} - \frac{a'^3}{6} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^4}{8} + a' \text{tang } \omega.$$

Darauf hat man für alle Punkte zwischen  $N$  und  $M$ , wenn man die Constanten so bestimmt, dass für  $x=a'$  die Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  mit den vorhin gefundenen übereinstimmen,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} (a-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)x - \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^3}{6} + \text{tang } \omega,$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^3x}{6} - \frac{a'^4}{24} \right\} + x \text{tang } \omega.$$

Setzt man in der letzten Gleichung  $x=a-z$ , so erhält man

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(a+z)(a-z)^3}{3a} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^3(a-z)}{6} - \frac{a'^4}{24} \right\} + (a-z) \text{tang } \omega;$$

Wiederholt man die gleichen Operationen für den Theil  $BM'$  des Stabes, so findet man

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(a-z)(a+z)^3}{3a} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^3(a+z)}{6} - \frac{a'^4}{24} \right\} - (a+z) \text{tang } \omega;$$

und durch Elimination erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$\text{tang } \omega = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(4a^2 - 4z^2 - a'^2)z}{6a};$$

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \left\{ \frac{(2a^2 - 2z^2 - a'^2)(a^2 - z^2)}{6a} + \frac{a'^8}{24} \right\}.$$

§ 363. Die Gleichungen der Theile  $BN$ ,  $NM$  der Curve erhält man, wenn man in die obigen Ausdrücke für  $y$ , welche diesen Theilen entsprechen, den eben gefundenen Werth von  $\tan \omega$  setzt. Die Ausdrücke für  $y$ , welche den Theilen  $BN'$ ,  $N'M$  entsprechen, sind denen für  $BN$ ,  $NM$  ähnlich; man erhält sie aus diesen, wenn man  $a+z$  in  $a-z$  verwandelt, und umgekehrt. Man kennt also auch die Gestalt des Theiles  $BM$  des Stabes. Den Krümmungspfeil der Curve (die grösste Durchbiegung) findet man auf die in § 360 angegebene Weise.

§ 364. In dem Punkte  $B$  ist die Krümmung und desshalb die Neigung zum Bruche am grössten <sup>1)</sup>. Die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches werden, in Uebereinstimmung mit § 356, durch die Gleichung ausgedrückt

$$\rho = pa' \left\{ \frac{a^2 - z^2}{a} - \frac{a}{2} \right\}.$$

§ 365. Die vorhergehenden Beispiele zeigen hinreichend, wie man die Gleichgewichtsbedingungen für einen horizontal auf zwei Stützen gelegten Stab findet, wenn derselbe auf eine beliebige Weise belastet ist. Der Punkt, in welchem die Neigung zum Bruche am grössten ist und den man als den festgehaltenen Punkt (*point d'encastrement*) anzusehen hat, liegt stets in der Verticalen, welche durch den Schwerpunkt der Gewichte geht, mit denen der Stab belastet ist <sup>1)</sup>. Nachdem man die Bruchstelle, so wie die auf die Stützen wirkenden Kräfte bestimmt hat, muss man so viele Differentialgleichungen der zweiten Ordnung bilden, wie sich zu beiden Seiten der Bruchstelle Theile befinden, deren Gleichgewichtsbedingungen sich nicht durch dieselbe Formel ausdrücken lassen. Die Constanten, welche durch die Integrationen hinzukommen, bestimmt man so, dass die Ordinate und die Neigung der Tangente für den gemeinschaftlichen Punkt zweier auf einander folgenden Theile dieselben Werthe erhalten.

Die Gleichung, welche die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches ausdrückt, erhält man, wenn man  $\rho$  gleich dem Werthe von  $\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2}$  setzt, welcher der

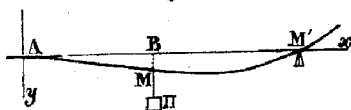
1) Diese Meinung Navier's ist irrig. Im Anhang findet man die richtige Bestimmung der Bruchstelle.



Bruchstelle entspricht, d. h. gleich dem auf diesen Punkt bezogenen Momente der Kräfte, welche auf den Stab in dem einen oder dem andern der beiden Theile wirken, welche durch die Bruchstelle getrennt werden.

**Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, dessen eines Ende festgehalten wird, während das andere Ende auf einer Stütze frei aufliegt.**

§ 366. Man denke sich den Stab  $AMM'$  (Fig. 57) mit dem Ende  $A$  horizontal festgehalten, während das andere Ende  $M'$  auf einer Stütze liegt, die sich mit  $A$  in derselben



mit dem Ende  $A$  horizontal festgehalten, während das andere Ende  $M'$  auf einer Stütze liegt, die sich mit  $A$  in derselben

Horizontalen befindet; in  $M$  sei der Stab mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet. Man nenne

$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$a'$  die Entfernung  $AM'$ ;

$\Pi'$  den Druck auf die Stütze  $M'$ ;

$\varepsilon$  und  $\rho$  behalten die Bedeutungen, welche in § 359 dafür angegeben sind.

Für den Theil  $AM$  des Stabes hat man zuerst

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= \Pi (a - x) - \Pi' (a' - x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\}, \\ \varepsilon y &= \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}.\end{aligned}$$

Für den Theil  $MM'$  hat man sodann, wenn man die Constanten so bestimmt, dass für  $x=a$  die Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  dieselben werden, wie in den vorhergehenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\Pi' (a' - x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= \Pi \frac{a^2}{2} - \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\}, \\ \varepsilon y &= \Pi \left\{ \frac{a^2 x}{2} - \frac{a^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}.\end{aligned}$$

§ 367. Da dieser letzte Ausdruck für  $y$  gleich Null werden muss, wenn  $x = a'$  ist, so hat man

$$\Pi' = \Pi \frac{a^2(3a'-a)}{2a'^3}$$

als den Druck auf die Stütze  $M'$ . Substituirt man diesen Werth in die vorhergehenden Gleichungen, so erhält man für die Abscisse des Punktes, dessen Ordinate ein Maximum ist

$$a' \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}} \right\};$$

und für die Ordinate selbst, oder für den Krümmungspfeil (die grösste Durchbiegung) des Stabes

$$\frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{6} (a' - a) \sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}}.$$

§ 368. Der Stab neigt sich nothwendig dahin, in dem Punkte  $A$  oder in  $M$  zu brechen. Für den Punkt  $A$  hat man

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi a - \Pi' a' = \Pi \frac{a(2a'-a)(a'-a)}{2a'^2},$$

und für den Punkt  $M$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi' (a' - a) = -\Pi \frac{a^2(3a'-a)(a'-a)}{2a'^3}.$$

Das Gleichgewicht für den Augenblick des Bruches wird durch diejenige der beiden Gleichungen

$$\rho = \Pi \frac{a(2a'-a)(a'-a)}{2a'^2},$$

$$\rho = \Pi \frac{a^2(3a'-a)(a'-a)}{2a'^3},$$

ausgedrückt, deren rechte Seite den grössten Werth hat. Die Bruchstelle ist in  $A$ , wenn die Entfernung  $AB$  sehr klein ist, in  $M$  hingegen, wenn  $AB$  wenig von  $AM'$  verschieden ist.

§ 369. Wirkt das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte von  $AM'$ , so hat man  $a' = 2a$ , und wenn man  $2P$  für  $\Pi$  schreibt, so erhält man

$$\Pi' = \frac{5}{8} P$$

als den Druck auf die Stütze. Die Abscisse des Punktes, dessen Ordinate im Maximum ist, ist dann

$$2a \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right\};$$

und die Ordinate selbst,

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3\sqrt{5}}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem in § 87 gefundenen, so sieht man, dass die von demselben Gewichte hervorgebrachte grösste Durchbiegung nur  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  derjenigen beträgt, welche eingetreten sein würde, wenn der Stab mit beiden Enden frei auf Stützen gelegen hätte.

Die Ordinate des mittelsten Punktes, in welchem das Gewicht wirkt, ist  $\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{7a^3}{48}$ , d. h.  $\frac{7}{16}$  derjenigen, welche in dem eben erwähnten Falle stattfindet.

§ 370. Bei der Annahme, dass das Gewicht II in der Mitte von  $AM'$  wirkt, ist die Bruchstelle in  $A$ , und aus dem ersten Werthe für  $\rho$  in § 368 erhält man

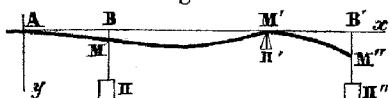
$$\rho = P \frac{3a}{4}.$$

Lägen beide Enden frei auf zwei Stützen, so hätte man  $\rho = Pa$ . Wird daher das eine Ende festgehalten (eingemauert), so ist das Tragvermögen des Stabes in dem Verhältnisse von 4 zu 3 grösser.

**Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, der an beiden Enden festgehalten wird.**

§ 371. Man denke sich den Stab  $AMM'$  (Fig. 58)

Fig. 58.



in  $M$  mit einem Gewichte II belastet und an den beiden Enden  $A$  und  $M'$  horizontal festgehalten (eingemauert), und beachte,

dass in Folge dieser Befestigung die Richtung der Tangente an die Curve für die genannten Punkte stets horizontal bleiben muss. Man wird an dem Gleichgewichts-

zustande des Stabes  $AM'$  nichts ändern, wenn man sich diese Wirkung dadurch hervorgebracht denkt, dass der Stab in  $M'$  frei auf einer Stütze liegt, über  $M'$  hinaus bis  $M''$  verlängert und in  $M''$  mit einem Gewichte belastet ist, dessen Werth entsprechend bestimmt worden. Nach diesen Vorbemerkungen nenne man

- $a$  die Entfernung  $AB$ ;
- $a'$  die Entfernung  $AM$ ;
- $a''$  die Entfernung  $AB'$ ;
- $\Pi'$  den Druck auf die Stütze  $M'$ ;
- $\Pi''$  das Gewicht, welches an dem Ende  $M''$  wirkt;
- $\varepsilon$  und  $\rho$  behalten die Bedeutungen, welche dafür in § 359 angegeben sind.

Für den Theil  $AM$  des Stabes hat man zuerst

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= \Pi(a-x) - \Pi'(a'-x) + \Pi''(a''-x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= \Pi(ax - \frac{1}{2}x^2) - \Pi'(a'x - \frac{1}{2}x^2) + \Pi''(a''x - \frac{1}{2}x^2), \\ \varepsilon y &= \Pi(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3) - \Pi'(\frac{1}{2}a'x^2 - \frac{1}{6}x^3) + \Pi''(\frac{1}{2}a''x^2 - \frac{1}{6}x^3).\end{aligned}$$

Für den Theil  $MM'$  hat man sodann, wenn man die Constanten so bestimmt, dass  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  dieselben Werthe erhalten, wie in den vorhergehenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\Pi'(a'-x) + \Pi''(a''-x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= \Pi \cdot \frac{1}{2}a^2 - \Pi'(a'x - \frac{1}{2}x^2) + \Pi''(a''x - \frac{1}{2}x^2), \\ \varepsilon y &= \Pi(\frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{6}a^3) - \Pi'(\frac{1}{2}a'x^2 - \frac{1}{6}x^3) + \Pi''(\frac{1}{2}a''x^2 - \frac{1}{6}x^3).\end{aligned}$$

§ 372. Der Quotient  $\frac{dy}{dx}$  und die Ordinate müssen in dem Punkte  $M'$ , für welchen  $x=a'$  ist, gleich Null werden, man hat daher

$$\begin{aligned}0 &= \Pi \cdot \frac{1}{2}a^2 - \Pi' \cdot \frac{1}{2}a'^2 + \Pi''(a'a'' - \frac{1}{2}a'^2), \\ 0 &= \Pi(\frac{1}{2}a^2a' - \frac{1}{6}a^3) - \Pi' \cdot \frac{1}{3}a'^3 + \Pi''(\frac{1}{2}a'^2a'' - \frac{1}{6}a'^3);\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\Pi' = \Pi \frac{a^3(a'a'' - 2a^2 + 3a'a'')}{a^3(a'' - a)}, \quad \Pi'' = \Pi \frac{a^2(a' - a)}{a'^2(a'' - a')}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen, so erfährt man die Gestalt der Curve, welche der Stab bildet.

§ 373. Wirkt das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte von  $AM'$ , so hat man  $a' = 2a$ , und

$$\Pi = \Pi \frac{2a'' - 3a}{4(a'' - 2a)}, \quad \Pi'' = \Pi \frac{a}{4(a'' - 2a)}.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen und schreibt  $2P$  für  $\Pi$ , so erhält man zur Bestimmung der Gestalt der ersten Hälfte des Stabes

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= P \left\{ \frac{a}{2} - x \right\}, \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= P \left\{ \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} \right\}, \\ \varepsilon y &= P \left\{ \frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right\}. \end{aligned}$$

Sucht man die Gleichungen für die zweite Hälfte des Stabes, so findet man, dass die zweite Hälfte der ersten symmetrisch sein muss. Die Ordinate in der Mitte der Curve oder der Krümmungspfeil (die grösste Durchbiegung) ist

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{12};$$

vergleicht man dieses Resultat mit dem in § 87 erhaltenen, so sieht man, dass die Durchbiegung nur  $\frac{1}{4}$  so gross ist, wenn beide Enden festgehalten (eingemauert) werden, als sie sein würde, wenn die Enden frei auf Stützen lägen.

§ 374. Bei der Voraussetzung, dass das Gewicht  $\Pi$  oder  $2P$  in der Mitte wirkt, ist die Krümmung des Stabes an den beiden Endpunkten und in der Mitte am grössten, und der Stab wird daher an diesen drei Punkten zu gleicher Zeit brechen, wofern der Bruch überhaupt eintritt. Das Gleichgewicht für den Fall des Bruches wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$\rho = P \cdot \frac{a}{2},$$

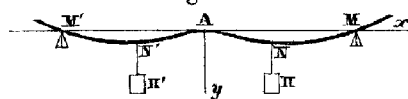
sodass der Stab eine doppelt so grosse Tragkraft besitzt, als er besitzen würde, wenn die Enden frei auf Stützen lägen. <sup>1)</sup>

1) Dieses Resultat wird allgemein angenommen, wenn man auch auf verschiedene Weise zu demselben gelangt; allein Barlow hat es verworfen und giebt in seinem Essay on the strength and stress of timber, pag. 132 das Verhältniss 3 : 2 statt 2 : 1 an. Der Satz, auf welchem Barlow sich stützt und den man pag. 115 des Essay etc. findet, ist aber ungenau und

# Gleichgewicht eines von drei oder mehr Stützen getragenen Stabes.

§ 375. Wird ein unbiegsamer, mit Gewichten belasteter Stab von mehr als zwei Stützen getragen, so sind die Belastungen, welche auf jede einzelne Stütze kommen, innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Die Grenzen lassen sich stets mittelst der Principien der Statik bestimmen. Nimmt man aber den Stab als elastisch an, so hört die Unbestimmtheit gänzlich auf. Wir werden hier nur die einfachsten Fragen dieser Art untersuchen.

Man denke sich den Stab  $MM'$  (Fig. 59) horizontal auf drei Stützen gelegt, von denen sich



die eine in der Mitte  $A$  der Länge des Stabes, die andern

beiden aber an den Enden  $M, M'$  befinden. Jede Hälfte des Stabes werde in der Mitte  $N, N'$  mit einem Gewichte  $\Pi, \Pi'$  belastet. Man sucht die Gestalt des Stabes nach der Biegung und den Druck auf jeden Stützpunkt. Man nenne

- $a$  die halbe Länge  $AM$  oder  $AM'$  des Stabes;
- $p, q, q'$  die in  $A, M, M'$  wirkenden Kräfte;
- $\omega$  den Winkel, welchen die Tangente in dem Punkte  $A$  der Curve mit der Axe  $Ax$  bildet;
- $\varepsilon$  und  $\rho$  behalten die Bedeutungen, welche in § 359 dafür angegeben sind.

Nach den Lehren der Statik muss 1) die Summe der Gewichte  $\Pi, \Pi'$  gleich der Summe der auf die Stützpunkte wirkenden Kräfte sein; und 2) muss die Summe der Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt, z. B. den Punkt  $A$ , gleich Null sein. Man hat zuerst die beiden Gleichungen

$$\Pi + \Pi' = p + q + q', \quad \Pi - \Pi' = 2(q - q').$$

widerspricht der Erfahrung. Man wird einsehen, dass es schwer ist, bei Versuchen die Hypothese über die (horizontale) Befestigung der beiden Enden des Stabes zu erfüllen. Zu diesem Zwecke muss der Stab auf beiden Seiten ziemlich weit über die Stützen hinausreichen. Die Ausdrücke für  $\Pi$  und  $\Pi'$  zeigen in der That an, dass die auf die festen Punkte wirkenden Kräfte sich dem unendlich Grossen nähern, wenn die Verlängerung des Stabes gleich Null wird. Man kann über diesen Gegenstand die Versuche nachsehen, welche man in dem *Traité du mouvement des eaux* der Oeuvres de Mariotte, tome II, pag. 466, mitgetheilt findet.

§ 376. Sieht man sodann den Stab als in  $A$  festgehalten (eingemauert) an, so hat man für den Theil  $AN$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= \Pi \left\{ \frac{a}{2} - x \right\} - q(a - x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= \Pi \left\{ \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} \right\} - q \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} + \varepsilon \tan \omega, \\ \varepsilon y &= \Pi \left\{ \frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right\} - q \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + x \cdot \varepsilon \tan \omega.\end{aligned}$$

Für den Theil  $NM$  hat man ferner, wenn man die Constanten so bestimmt, dass man für  $x = \frac{a}{2}$  dieselben Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  erhält, wie in den vorhergehenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= -q(a - x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= -q \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} + \Pi \cdot \frac{a^2}{8} + \varepsilon \tan \omega, \\ \varepsilon y &= -q \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + \left\{ \Pi \cdot \frac{a^2}{8} + \varepsilon \tan \omega \right\} x - \Pi \cdot \frac{a^3}{48}.\end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Theile  $AN'$  und  $N'M'$  wird man aus den vorhergehenden erhalten, wenn man darin  $\Pi'$  für  $\Pi$ ,  $q'$  für  $q$  schreibt und das Zeichen von  $\tan \omega$  ändert. Beachtet man sodann, dass die Gleichungen für  $NM$  und  $N'M'$  den Werth  $y = 0$  geben müssen, wenn man  $x = a$  setzt, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= -q \frac{a^2}{3} + \Pi \frac{5a^2}{48} + \varepsilon \tan \omega, \\ 0 &= -q' \frac{a^2}{3} + \Pi' \frac{5a^2}{48} - \varepsilon \tan \omega.\end{aligned}$$

§ 377. Vermittelst dieser beiden Gleichungen und aus denen des § 375 findet man

$$\begin{aligned}\tan \omega &= \frac{\Pi - \Pi'}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{32}, \\ p &= \frac{22\Pi + 22\Pi'}{32}, \\ q &= \frac{13\Pi - 3\Pi'}{32}, \\ q' &= \frac{-3\Pi + 13\Pi'}{32};\end{aligned}$$

und durch Substitution dieser Werthe in die obigen Gleichungen ergibt sich die Gestalt des Stabes. Man sieht, dass der Stützpunkt  $A$  allein sehr nahe an  $\frac{2}{3}$  der gesammten Belastung des Stabes zu tragen hat. Der Druck auf die Stützpunkte ist von  $\varepsilon$  unabhängig, so dass dieser bei mehr oder weniger biegsamen Stäben derselbe bleibt.

§ 378. Die Neigung zum Bruche ist nothwendiger Weise an einem der Punkte  $A$ ,  $N$ ,  $N'$  am grössten. Für den Punkt  $A$  hat man

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi \frac{a}{2} - qa = \left\{ 3\Pi + 3\Pi' \right\} \frac{a}{32};$$

für den Punkt  $N$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -q' \frac{a}{2} = -\left\{ 13\Pi - 3\Pi' \right\} \frac{a}{64};$$

und für den Punkt  $N'$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -q' \frac{a}{2} = -\left\{ -3\Pi + 13\Pi' \right\} \frac{a}{64}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den Fall des Bruches wird durch diejenige der folgenden drei Gleichungen

$$\rho = \left\{ 3\Pi + 3\Pi' \right\} \frac{a}{32},$$

$$\rho = \left\{ 13\Pi - 3\Pi' \right\} \frac{a}{64},$$

$$\rho = \left\{ -3\Pi + 13\Pi' \right\} \frac{a}{64},$$

ausgedrückt, deren rechte Seite den grössten Werth hat.

§ 379. Nimmt man die Gewichte  $\Pi$  und  $\Pi'$  als einander gleich an, so erhält man

$$\tan \omega = 0, \quad p = \frac{22\Pi}{16}, \quad q = q' = \frac{5\Pi}{16}.$$

§ 380. Bei der nämlichen Annahme ist die Bruchstelle des Stabes in  $A$  und das Gleichgewicht gegen den Bruch wird durch die Gleichung

$$\rho = \frac{3\Pi a}{16}$$

ausgedrückt. Jede Hälfte des Stabes ist alsdann in derselben Lage, als ob sie an dem einen Ende horizontal



festgehalten würde, während das andere Ende auf einer Stütze ruht. In der That stimmt das eben erhaltene Resultat mit dem des § 370 überein, wenn man  $2P$  für  $\Pi$  und  $2a$  für  $a$  schreibt.

### Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis.

§ 381. Die in diesem Kapitel gewonnenen Resultate können dazu dienen, die Biegung horizontal belasteter Stäbe zu bestimmen. Für  $\epsilon$  hat man dabei die Werthe des Elasticitätsmomentes zu setzen, welche in § 81 und folgd. angegeben sind. Ist z. B. der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, so hat man  $E \frac{bc^3}{12}$  für  $\epsilon$  zu setzen. Den Werth  $E$  findet man aus den in § 94 u. folgd. aufgeführten Versuchen. Man erhält so die Biegung des Stabes durch die Dimensionen desselben ausgedrückt.

§ 382. Die obigen Resultate können gleichfalls dazu dienen, die Belastungen, welche den Bruch der Stäbe verursachen würden, oder die grössten Belastungen, welche für die Theile einer Construction zulässig sind, zu bestimmen. Für  $\rho$  hat man dabei die Werthe des Bruchmomentes zu setzen, welche in § 115 u. folgd. angegeben sind. Ist z. B. der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, so hat man  $R \frac{bc^2}{6}$  für  $\rho$  zu setzen. Sucht man nun die Belastungen, welche den Bruch verursachen würden, so legt man  $R$  die Werthe bei, welche aus den in § 130 u. folgd. aufgeführten Versuchen folgen; sucht man aber die grössten Belastungen, welche für die Theile einer Construction zulässig sind, so legt man  $R$  die Werthe bei, welche in den §§ 181, 182 und 186 angegeben sind.

Zweites Kapitel.

Widerstand eines verticalen, prismatischen Stabes, dessen obere Endfläche belastet wird.

§ 383. Man betrachte einen Stab  $AM$  (Fig. 60), der mit seiner untern Endfläche  $A$  auf einer festen Horizontalebene steht, während die obere Endfläche, die sich mit der untern in derselben Verticalen befindet, mit einem Gewichte  $Q$  belastet ist. Es handelt sich um die Gesetze der Biegung, welche der Stab durch die Wirkung des Gewichtes annimmt. Man nenne



$a$  die Entfernung  $AM$  der beiden Endflächen von einander;

$s$  die Länge  $AmM$  des Stabes;

$\omega$  den Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes;

$x, y$  die Abscisse  $Ap$  und die Ordinate  $pm$  eines beliebigen Punktes der Curve, welche die Axe des Stabes bildet;

$\varepsilon$  und  $\rho$  behalten die Bedeutungen, welche dafür in § 359 angegeben sind;

Die Gleichung, welche die Gleichgewichtsbedingungen ausdrückt, wird stets aus dem Principe abgeleitet, dass in jedem Punkte der Axe des Stabes das Moment des Widerstandes gegen die Biegung dem Momente der auf den Stab wirkenden Kräfte gleich sein muss, wenn dieses auf denselben Punkt bezogen wird. Beachtet man, dass die Curve, welche diese Axe bildet, ihre concave Seite der Abscissenaxe zukehrt (und der Krümmungshalbmesser also mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden muss), so erhält man für das Gleichgewicht die Gleichung

$$-\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Qy,$$

deren vollständiges Integral <sup>1)</sup>

$$y = A \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x + B \cos \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x,$$

ist, wenn  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Da für  $x=0$  auch  $y=0$  werden muss, so

1) Navier-Wittstein, §. 435.

ist die Constante  $B=0$ . Die Constante  $A$  ist offenbar die grösste Ordinate der Curve, wir wollen dieselbe durch  $f$  bezeichnen. Man kann also schreiben

$$y = f \cdot \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x.$$

§ 384. Es muss  $y=0$  sein, wenn  $x=a$  ist. Wenn nun  $f$  nicht Null ist, so muss nothwendiger Weise

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot a = i\pi \quad \text{und} \quad Q = i^2 \pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$$

sein, wo  $i$  eine beliebige ganze Zahl und  $\pi$  das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Der auf solche Weise bestimmte Werth des Gewichtes  $Q$ , welches den Stab in der gebogenen Form erhalten kann, ist dem Quadrate der Länge des Stabes proportional, wenn alle übrigen Verhältnisse dieselben bleiben.

§ 385. Setzt man den Werth für  $Q$  in die obige Gleichung, in welcher die Pfeilhöhe  $f$  noch unbestimmt ist, so erhält man

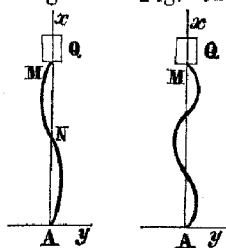
$$y = f \sin i\pi \cdot \frac{x}{a},$$

$$s = a \left\{ 1 + \left[ \frac{i\pi f}{2a} \right]^2 \right\},$$

$$f = \frac{2}{i\pi} \sqrt{a(s-a)}.$$

§ 386. Setzt man für  $i$  nach einander die ganzen Zahlen 1, 2, 3 etc., so repräsentirt die obige Gleichung Curven von verschiedener Gestalt. Fig. 60 stellt den Fall dar, in welchem  $i=1$  und  $Q = \pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$  ist. Fig. 61 stellt den Fall dar, in welchem  $i=2$  und  $Q = 4\pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$

Fig. 61. Fig. 62. ist; diese Gestalt würde ein Stab annehmen, dessen Mittelpunkt  $N$  gezwungen würde, in der Verticalen zu bleiben, welcher durch die beiden Endpunkte geht. Fig. 62 stellt den Fall dar, in welchem  $i=3$  und  $Q = 9\pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$  ist; diese Gestalt würde ein Stab annehmen, von dem die Punkte, welche im ersten und zweiten Drittel der Länge desselben liegen,



gezwungen würden, in der Verticalen zu bleiben, welche durch die beiden Endpunkte geht. Die übrigen Fälle ergeben sich auf ähnliche Weise.

§ 387. Bei einem Stabe, der in der Richtung seiner Länge von einer Kraft zusammengedrückt und dadurch sehr wenig gebogen wird, muss man beachten: 1) dass die Längenfaser, wenn man sich die Kraft  $Q$  gleichförmig auf der ganzen Querschnittsfläche vertheilt denkt, einen Druck  $\frac{Q}{\omega}$  auf jeder Flächeneinheit erleiden und dadurch um den Bruch  $\frac{Q}{E\omega}$  ihrer Länge verkürzt werden (indem  $E$  die in § 77 angegebene Bedeutung hat); 2) dass in Folge der Biegung die Fasern auf der convexen Seite verlängert und auf der concaven Seite verkürzt werden, und zwar um einen Theil ihrer Länge, der (nach § 77 für eine beliebige Faser sich durch den Bruch  $v' \frac{d^2y}{dx^2}$  ausdrücken lässt. Da die beiden in Rede stehenden Wirkungen zu gleicher Zeit erfolgen, so ist die grösste Zusammendrückung, welche eine Faser erleiden kann,

$$\frac{Q}{E\omega} + v' \frac{d^2y}{dx^2}$$

wenn man mit  $v'$  den Abstand der Gleichgewichtsaxe von derjenigen Faser bezeichnet, welche am weitesten von ihr entfernt ist, und für  $\frac{d^2y}{dx^2}$  den grössten Werth nimmt, welchen dieser Differentialquotient annehmen kann.

Da in Uebereinstimmung mit § 354 die grösste zulässige Belastung eines Stabes durch den Grad der Ausdehnung oder Zusammendrückung bestimmt wird, welchen die Fasern durch die Wirkung der Belastung erleiden, so ergibt sich, wenn (nach § 181)  $R'$  die grösste zulässige Belastung der Flächeneinheit bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + v' \frac{d^2y}{dx^2},$$

welche im Allgemeinen die zulässige Belastung eines Stabes bestimmt, wie man dies in den folgenden Kapiteln sehen wird.

§ 388. In dem besondern Falle, um welchen es sich hier handelt, lässt sich die Berechnung der zu-

lässigen Belastung nicht ausführen, weil die Durchbiegung  $f$  unbestimmt bleibt und man deshalb keine Relation zwischen  $\frac{d^2y}{dx^2}$  und  $Q$  erhält. Dies gilt ebenfalls für die Gleichgewichtsfälle, welche wir in den folgenden Paragraphen untersuchen werden. Am Ende dieses Kapitels wird eine Methode angegeben werden, nach welcher sich der Widerstand vertical stehender Stäbe für die Praxis berechnen lässt.

**Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben frei ist.**

§ 389. Behält man die Benennungen aus § 383 Fig. 63. bei, so erhält man in diesem Falle (welchen Fig. 63 darstellt)



$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Q(f-y),$$

wo  $f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes bezeichnet. Das vollständige Integral ist

$$y = f + A \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x + B \cos \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x,$$

wo  $A$  und  $B$  wieder die beiden willkürlichen Constanten bezeichnen. Da für  $x=0$  auch  $y=0$  und  $\frac{dy}{dx}=0$  sein muss, so ist die Constante  $A=0$  und  $B=-f$ . Die Gleichung der Curve ist demnach

$$y = f \left\{ 1 - \cos \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x \right\}.$$

§ 390. Für  $x=a$  muss  $y=f$  werden; daher

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot a = \frac{(2i+1)\pi}{2}, \text{ woraus } Q = \frac{(2i+1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

§ 391. Aus der Gleichung der Curve wird

$$y = f \left\{ 1 - \cos \frac{(2i+1)\pi}{2} \cdot \frac{x}{a} \right\},$$

woraus man erhält

$$s = a \left\{ 1 + \left( \frac{(2i+1)\pi f}{2 \cdot 2a} \right)^2 \right\},$$

$$f = \frac{2 \cdot 2}{(2i+1)\pi} \sqrt{a(s-a)}.$$

§ 392. Fig. 63 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 0$  und  $Q = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{s}{a^2}$  ist. Fig. 64 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 1$  und  $Q = \frac{9\pi^2}{4} \cdot \frac{s}{a^2}$  ist; die Ordinaten Fig. 64. Fig. 65. der Punkte, welche im ersten und zweiten Drittel der Länge des Stabes liegen, sind respective  $f$  und  $2f$ .

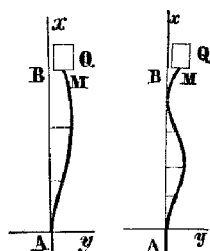


Fig. 65 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 2$  und  $Q = \frac{25\pi^2}{4} \cdot \frac{s}{a^2}$  ist; die Ordinaten der Punkte, welche im ersten und dritten Fünftel der Länge des Stabes liegen, sind gleich  $f$ ; diejenige des Punktes, welcher im zweiten Fünftel liegt, ist gleich  $2f$ , und diejenige des Punktes, welcher im vierten Fünftel liegt, ist gleich Null. Die übrigen Fälle ergeben sich auf ähnliche Weise.

Bei gleicher Länge eines Stabes beträgt das Gewicht, dessen man bedarf, um den Stab in der von Fig. 63 dargestellten Weise zu biegen, nur ein Viertel von demjenigen, dessen man bedarf, um den Stab in der von Fig. 60 dargestellten Weise zu biegen.

Bei gleicher Länge eines Stabes beträgt das Gewicht, dessen man bedarf, um den Stab in der von Fig. 63 dargestellten Weise zu biegen, nur ein Viertel von demjenigen, dessen man bedarf, um den Stab in der von Fig. 60 dargestellten Weise zu biegen.

**Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben gezwungen wird, mit dem untern in derselben Verticalen zu bleiben.**

§ 393. In diesem Falle ist die Gleichgewichtsgleichung dieselbe, wie in § 383. Dieser Gleichung kann aber bei der Bedingung, dass für  $x = 0$  auch zu gleicher Zeit  $y = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = 0$  werde, kein Genüge geschehen, und es folgt daraus, dass ein Stab, wie in dem Falle, um den es sich hier handelt, nicht gebogen werden kann. Nimmt man aber an, dass das Gewicht  $Q$ , anstatt in der Richtung der Axe des Stabes zu wirken,

in einer Entfernung  $f$  von dieser Axe wirke (Fig. 66), welche Entfernung man sich beliebig klein denken mag, Fig. 66. so ist die Gleichgewichtsgleichung dieselbe, wie in § 389, und der Werth von  $y$  wird durch die in diesem Paragraphen gefundene Gleichung ausgedrückt.

Da aus dieser Gleichung  $y=0$  folgen muss, wenn  $x=a$  ist, so hat man hier

$$\sqrt{\frac{Q}{s}} \cdot a = 2i\pi, \text{ woraus } Q = 4i^2\pi^2 \cdot \frac{s}{a^2}.$$

Die Gleichung der Curve ist

$$y = f \left\{ 1 - \cos 2i\pi \cdot \frac{x}{a} \right\};$$

wobei zu beachten ist, dass aus dieser Gleichung für  $x=a$  gleichfalls  $\frac{dy}{dx} = 0$  folgt, sodass die Tangente der Curve sowohl am obern als am untern Ende nothwendig vertical ist. Die Fig. 66 stellt den Fall dar, in welchem  $i=1$  also  $Q = 4\pi^2 \cdot \frac{s}{a^2}$  ist; die Ordinate des Mittelpunktes oder die Durchbiegung ist gleich  $2f$ . Der Werth des Gewichtes  $Q$  beträgt das Vierfache des Werthes, welcher stattfinden würde, wenn das Gewicht in der Richtung der Axe des Stabes wirkte und die beiden Enden nicht gezwungen wären, in derselben Verticalen zu bleiben.

Der durch Fig. 66 dargestellte Stab befindet sich in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie die vier unteren Fünftel des durch Fig. 65 dargestellten Stabes; setzt man wirklich  $\frac{1}{4}a$  für  $a$  in den obigen Ausdruck für  $Q$ , so erhält man den in § 392 für den Fall der Fig. 65 angegebenen Werth.

### Versuche über den Widerstand vertical belasteter Holzstäbe.

§ 394. Mittelwerthe aus den Versuchen von Aubry<sup>1)</sup> mit vertical gestellten Stäben aus Eichenholz, deren obere Endfläche belastet wurde.

1) Mémoire sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, pag. 38.

Länge der Stäbe	Seite des quadratischen Querschnittes	Belastung, bei welcher sich zuerst eine Biegung zeigte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Zoll	Zoll	Pfund	Pfund
18	$\frac{1}{2}$	80	205
36	$\frac{1}{2}$	20	54
18	1	534	638

§ 395. Resultate der Versuche von Girard<sup>1)</sup> mit vertical gestellten Stäben aus Eichenholz, deren obere Endfläche belastet wurde.

Länge der Stäbe	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Erste Durch- biegung, welche beobachtet wurde	Belastung, bei welcher sich zuerst eine Bie- gung zeigte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Meter	Meter	Meter	Meter	Kilogramm	Kilogramm
2,6	0,158	0,128	0,0068	17321	42514
2,6	0,162	0,106	0,0056	11994	
2,6	0,158	0,102		11992	
2,6	0,133	0,099	0,0079	11993	
2,6	0,131	0,106	0,0068	11997	22931
2,27	0,156	0,131	0,0028	22939	
2,27	0,158	0,129		17317	
2,27	0,156	0,104	0,0062	17320	
2,27	0,158	0,102	0,0068	17322	28626
2,27	0,126	0,102	0,0079	11999	
1,95	0,156	0,133	0,0079	17322	
1,95	0,158	0,102	0,0056	17321	
1,95	0,16	0,102	0,0045	11974	32997
1,95	0,133	0,106	0,0056	17295	
1,95	0,126	0,108	0,0056	11998	
2,27	0,158	0,108	0,0029	11999	
2,6	0,158	0,135	0,0051	11999	37305
2,6	0,158	0,131	0,0045	11997	
2,6	0,187	0,158	0,0023	11998	
2,6	0,189	0,158	0,0023	11998	

Die Stäbe bogen sich in der Regel nach beiden Seiten; in der Tabelle ist die grösste von den beiden Durchbiegungen aufgeführt, welche zuerst beobachtet wurden.

§ 396. Mittlere Resultate der Versuche von Lamandé<sup>2)</sup> mit vertical gestellten Stäben von ziemlich trockenem Eichenholz aus der Champagne, deren obere Endfläche belastet wurde.

1) Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance pag. 138 u. Tab. I.

2) Traité de la construction des ponts, par Gauthier, tome II, pag. 48.



Länge der Stäbe	Seite des quadratischen Querschnittes	Erste Durch- biegung, welche beobachtet wurde	Belastung, bei welcher sich zuerst eine Bie- gung zeigte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Meter	Meter	Meter	Kilogramm	Kilogramm
0,649	0,054	0,0017	5369	8861
1,298	0,054	0,0037	2863	5693
1,948	0,054	0,0045	1325	3559
0,649	0,081	0,0015	18129	23163
1,298	0,081	0,005	9264	16465
1,948	0,081	0,0042	4793	11619
0,649	0,108	0,0014	27211	40921
1,298	0,108	0,0015	21488	40495
1,948	0,108	0,005	9663	27629

§ 397. Mittlere Resultate der Versuche von Rondelet<sup>1)</sup> mit vertical gestellten Stäben, deren obere Endfläche belastet wurde. Sämmtliche Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte.

Art des Holzes.	Länge der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Zoll	Pfund
Eichenholz . . . . .	1	6346
	12	5310
	24	2911
	36	2163
Tannenholz . . . . .	1	7490
	12	6355
	24	3429
	36	2575

Gestützt auf diese Versuche giebt der Experimentator die folgende Regel. Nimmt man als Einheit die Kraft an, durch welche ein Würfel zerdrückt wird, und die bei Eichenholz 44 Pfd. und bei Tannenholz 52 Pfd. für die Quadratlinie des Querschnittes beträgt (§ 12), so erhält man für die Kraft, durch welche ein Prisma gebogen und zerbrochen wird, dessen Höhe gleich

	dem 12fachen der Dicke ist	. . .	$\frac{5}{6}$
n	24	n n n n	$\frac{1}{2}$
n	36	n n n n	$\frac{1}{3}$
n	48	n n n n	$\frac{1}{6}$
n	60	n n n n	$\frac{1}{12}$
n	72	n n n n	$\frac{1}{24}$

1) Art de bâtir, tome I, pag. 233.

Nach dem nämlichen Experimentator kann ein vertical belasteter Holzstab durch eine Biegung nachgeben, wenn die Länge das Zehnfache der Seite des quadratischen Querschnittes übertrifft.

### Versuche über den Widerstand vertical belasteter Stäbe aus Schmiedeeisen.

§ 398. Die folgenden Versuche mit vertical gestellten Stäben aus Schmiedeeisen, deren obere Endfläche man belastete, wurden in Paris in der Schule für Brücken- und Wegbau (*École des ponts et chaussées*) angestellt. <sup>1)</sup>

Länge der Stäbe	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Meter	Millimeter	Millimeter	Kilogramm
0,244	20,3	20,3	10426
0,325	20,3	20,3	8454
0,258	20,3	20,3	10216
0,325	13,5	13,5	3951

§ 399. Rondelet <sup>2)</sup> giebt, gestützt auf sehr viele von ihm angestellte Versuche mit Stäben, welche bei  $1\frac{1}{2}$  Zoll bis 20 Fuss Länge 6 bis 12 Linien ins Gevierte hielten, die folgende Regel. Wird die Kraft, durch welche ein schmiedeeiserner Würfel zerdrückt wird, zu 512 Pfd. für die Quadratlinie des Querschnittes angenommen (§ 17), so beträgt die Kraft, durch welche ein Prisma gebogen und zerbrochen wird, wenn die Länge des Stabes gleich dem 27, 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243fachen der Dicke ist, respective 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 1 Pfd. für die Quadratlinie des Querschnittes.

§ 400. Versuche von Duleau <sup>3)</sup> mit vertical gestellten Stäben aus Schmiedeeisen, deren obere Endfläche belastet wurde.

1) *Traité de la construction des ponts*, par Gauthey, tome II, pag. 152.

2) *Art de bâtir*, tome I, pag. 295 u. folgd.

3) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, pag. 26.

Bezeichnung des Eisens.	Länge der Stäbe	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Meter	Millim.	Millim.	Kilogramm
Perigordeisen, der Querschnitt ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 0,038 Meter . . . . .	3,02			860
Desgl. . . . .	2,01	30	11	190
Desgl., weiches (zu Hufeisen bestimmt) . . . . .	2,01	70	11,2	520
Derselbe Stab in der Mitte festgehalten . . . . .				1945
Perigordeisen (wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde) . . . . .	2,02	45	12	500
Perigordeisen . . . . .	2,01	40	11,5	260
Derselbe Stab in der Mitte festgehalten . . . . .				900
Perigordeisen (wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde) . . . . .	2,01	58	15	1000
Desgl. . . . .	3,02	25	15	180
Desgl. . . . .	3,02	39	19,6	780
Desgl. . . . .	2,01	60	20	2400
Desgl. . . . .	3,02	60	20	1200
Desgl. . . . .	3,02	39	24,5	1320
Desgl. . . . .	3,02	31	31	2000
Rundeisen aus Bilbao, 0,0318 Meter im Durchmesser . . . . .	3,02			1285

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, dass, wenn man die Belastungen nach der Formel  $Q = \pi^2 \cdot \frac{s}{a^2}$  (worin für  $s$  bei einem rechteckigen Querschnitte  $E \cdot \frac{bc^3}{12}$  und bei einem kreisförmigen Querschnitte  $E \cdot \frac{r^4 \pi}{4}$  zu setzen ist, während  $E = 20\,000\,000\,000$  Kil.) berechnet, die berechneten Werthe im Vergleich mit dem beobachteten ungefähr um  $\frac{1}{8}$  zu klein sind.<sup>1)</sup> Der Experimentator schreibt diese Abweichung zum Theil der Reibung des Hebels zu, dessen er sich bediente.

1) Essai théorique etc., pag. 24.

**Versuche über den Widerstand gusseiserner Stäbe, die in der Richtung ihrer Länge zusammengedrückt wurden.**

§ 401. Man sehe hierüber die in § 19 aufgeführten Versuche von G. Rennie.

Andere Versuche wurden von Reynolds <sup>1)</sup> mit sehr weichem Gusseisen angestellt. Zwei Stäbe von 1 engl. Zoll ins Gevierte und 3 Fuss Länge, wurden mit dem einen Ende auf einen horizontalen Stab unter einen Winkel von  $45^{\circ}$  gestellt, während die beiden andern Enden sich berührten und eine Last von 15680 engl. Pfd. trugen, wodurch sich für jeden Stab ein Druck in der Richtung der Länge von 11087 Pfd. ergibt.

Bei einem andern Versuche trugen zwei ähnliche Stäbe, die mit dem horizontalen Stabe einen Winkel von  $22\frac{1}{2}$  Grad bildeten, eine Belastung von 8960 Pfd., wodurch sich für jeden Stab in der Richtung der Länge ein Druck von 11709 Pfd. ergibt.

**Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis.**

§ 402. Die in § 383 u. folgd. gewonnenen Resultate stützen sich wesentlich auf die Voraussetzung, dass die Richtung der Kraft  $Q$  in der Axe des Stabes liege, oder wenigstens doch in der durch diese Axe gehenden Verticalebene, mit welcher die Richtung der Biegung rechte Winkel bildet. In der Wirklichkeit ist bei einem vertical belasteten Stabe gewöhnlich das Gewicht über den ganzen Querschnitt vertheilt. Verlangt man daher eine genaue Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Resultaten, so müssten die Stäbe in eine Spitze oder in eine Kante auslaufen.

Bei der Aufstellung der obigen Theorie wurde die Richtung der Biegung als bestimmt vorausgesetzt, und mit  $\epsilon$  wurde der Werth des Elasticitätsmomentes bezeichnet, den man für diese Richtung nach den Formeln in § 80 u. folgd. je nach der Gestalt des Stabes erhält. Im Allgemeinen ist aber die Richtung der Biegung bei einem vertical belasteten Stabe nicht bestimmt. Es liegt in der Natur der Sache, anzunehmen, dass die

1) Banks, on the power of machines, pag. 89.

Biegung in derjenigen Richtung erfolgen werde, für welche der Werth des Elasticitätsmomentes  $\varepsilon$  ein Minimum ist. Ist nun der Querschnitt kreisförmig oder quadratisch, so hat  $\varepsilon$  für alle Richtungen einen gleich grossen Werth (s. § 83). Ist der Querschnitt ein Rechteck, so entspricht der Minimalwerth des Elasticitätsmomentes dem Falle, in welchem die Biegung in der Richtung der kleinsten Seite erfolgt. Bei Versuchen mit Stäben quadratischen Querschnittes erfolgt die Biegung ohne Unterschied in der Richtung der Diagonale oder in der Richtung der Seiten. Selbst bei Stäben mit rechteckigem Querschnitt erfolgt die Biegung nicht immer in der Richtung der kleinsten Seite, wofern die beiden Seiten nicht sehr an Länge von einander verschieden sind; die Richtung der Biegung bestimmt sich vielmehr gewöhnlich durch einen Fehler in der Gleichartigkeit des Stabes, oder durch die Weise, auf welche der Druck an den Endpunkten thätig ist.

In diesen Bemerkungen sind die Gründe enthalten, weshalb die Resultate aus Versuchen mit vertical belasteten Stäben rechteckigen Querschnitts nicht immer mit den Werthen übereinstimmen, welche man nach der Formel  $Q = \pi^2 \cdot \frac{\varepsilon}{a^3}$  und unter der Voraussetzung berechnet, dass die Biegung in der Richtung der kleinsten Seite erfolgen werde. Verfährt man aber mit der nöthigen Vorsicht, um die besonderen Umstände des Versuches mit den Hypothesen, auf welche sich die obige Theorie stützt, in Uebereinstimmung zu bringen, so wird auch das Resultat stets genau durch die angegebene Formel ausgedrückt.

§ 403. Was die Belastung anlangt, welche für Stäbe, die in der Richtung ihrer Länge zusammenge-drückt werden, zulässig ist, so beachte man zuerst, dass der Stab nothwendiger Weise nachgeben muss, wenn die Belastung  $Q$  den Ausdruck hat

$$Q = \frac{\pi^2 \cdot \varepsilon}{a^3},$$

woraus für den Fall eines rechteckigen Querschnittes

$$Q = E \cdot \frac{\pi^2 \cdot bc^3}{12 a^3}$$

wird. Dieser Ausdruck nimmt für abnehmende Werthe der Länge  $a$  sehr rasch zu. Im Allgemeinen sind die verticalen Stücke, welche bei einer Construction angewendet werden, zu kurz im Vergleich zu ihrer Dicke, als dass die Art der Biegung eintreten könnte, auf welche sich die Formeln in § 383 u. folgd. beziehen. Nimmt man für Eichenholz  $E = 1\,000\,000\,000$  Kil. und für Schmiedeeisen  $E = 20\,000\,000\,000$  Kil. an, und vergleicht die Werthe, welche man hiernach mittelst der obigen Formel erhält, mit den nach Rondelet in § 397 und 399 angegebenen Erfahrungsergebnissen, so findet man, dass von jenen Werthen die Erfahrungsergebnisse übertroffen werden, wenn die Dicke  $c$  des Stabes mehr als  $\frac{1}{20}$  der Länge  $a$  desselben beträgt. Es muss daher bei solchen Stäben, deren Länge nicht das 20fache ihrer Dicke beträgt, d. h. in den meisten Fällen, welche in der Praxis vorkommen, der Widerstand nicht nach der obigen Formel bestimmt werden, sondern man muss das Gewicht in Betracht ziehen, welches den Stab zerdrücken (écraser) würde.

Das Gewicht, welches einen Stab zerdrücken wird, dessen Länge das Ein- oder Zweifache der Dicke beträgt, kann man für jeden Millimeter des Querschnittes rechnen auf

3 Kil.	für Eichen- und Tannenholz,
40   "   "	Schmiedeeisen,
100   "   "	Gusseisen.

Aus den oben aufgeführten Versuchen folgt

1. dass für Hölzer von dem für den Widerstand angegebenen Werthe  $\frac{5}{6}$  zu nehmen sind, wenn die Länge das 12fache der Dicke beträgt;
2. dass für Schmiedeeisen von dem für den Widerstand angegebenen Werthe  $\frac{5}{3}$  zu nehmen sind, wenn die Länge das 12fache der Dicke, und die Hälfte, wenn sie das 24fache der Dicke beträgt;
3. dass für Gusseisen von dem für den Widerstand angegebenen Werthe  $\frac{2}{3}$  zu nehmen sind, wenn die Länge das 4fache der Dicke beträgt; die Hälfte ungefähr, wenn sie das 8fache, und  $\frac{1}{15}$ , wenn sie das 36fache der Dicke beträgt.

Die bis jetzt bekannten Erfahrungsergebnisse geben keine Mittel an die Hand, den Widerstand mit Genauig-

keit für die zwischenliegenden Fälle zu berechnen, welche von den vorhin aufgeführten abweichen.

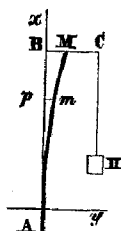
§ 404. Was solche Stäbe anlangt, deren Länge ungefähr das 20fache der Dicke übertrifft, so kann man den Widerstand nach den Formeln in § 386 u. folg. berechnen, in der Gewissheit, dass man durch diese Berechnung keine Resultate erhalten wird, welche die der Erfahrung übertreffen.

§ 405. Hat man in der Praxis den Widerstand eines Stabes, welcher in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird, in Uebereinstimmung mit den beiden vorhergehenden Paragraphen berechnet, so muss man von dem Resultate für Hölzer ungefähr  $\frac{1}{10}$ , und für Schmied- oder Gusseisen  $\frac{1}{4}$  oder  $\frac{1}{5}$  nehmen, um die grösste mit Sicherheit zulässige Belastung des Stabes zu finden.

### Drittes Kapitel.

**Widerstand eines vertical belasteten Stabes, wenn die Kraft parallel mit der Axe desselben wirkt.**

Fig 67.



§ 406. Es sei  $AM$  (Fig. 67) ein verticaler Stab, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das Gewicht II an dem Ende des Querstückes  $MC$  thätig ist, welches mit dem verticalen Stabe so verbunden ist, dass es stets einen rechten Winkel mit demselben bildet. Das Gewicht II wird den verticalen Stab zusammendrücken, und ihn zu biegen und zu zerbrechen suchen. Man nenne

- $a$  die Entfernung  $AB$ ;
- $l$  die Entfernung  $MC$ ;
- $\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche des Stabes;
- $x, y$  die Abscisse  $Ap$  und die Ordinate  $mp$  eines Punktes der Curve, welche der Stab in Folge der Biegung bildet;

$f$  die Ordinate des Endpunktes  $MB$ ;  
 $\varepsilon$  behalte die im § 80 angegebene Bedeutung.  
 Für die Gleichgewichtsgleichung erhält man

$$\varepsilon \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi (l + f - y);$$

und das Integral dieser Gleichung (woraus  $y=0$  und  $\frac{dy}{dx}=0$  folgen muss, wenn  $x=0$  wird) ist

$$y = (l + f) \left\{ 1 - \cos x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\}.$$

Für  $x = a$  muss  $y = f$  werden, daher

$$\frac{l}{l+f} = \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}},$$

woraus

$$f = l \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}} - 1 \right\},$$

und

$$\Pi = \varepsilon \left\{ \frac{\arccos \left\{ \cos = \frac{l}{l+f} \right\}}{a} \right\}^2.$$

Die Gleichung der Curve ist

$$y = l \cdot \frac{1 - \cos x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}{\cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}.$$

In dem Ausdrücke für  $\Pi$  hat man den kleinsten Bogen zu nehmen, dessen Cosinus gleich  $\frac{l}{l+f}$  ist, wofern nicht gewisse Punkte des Stabes  $AB$  festgehalten werden. Die Durchbiegung, welche von einem gegebenen Gewichte hervorgebracht wird, ist der Entfernung  $MC$  proportional. Das Gewicht, welches eine gegebene Durchbiegung eines Stabes hervorbringt, ist reciprok dem Quadrate der Länge dieses Stabes.

§ 407. Die eben behandelte Frage weicht von den in § 383 u. folgd. untersuchten Fragen insofern ab, als



man hier eine Relation erhält zwischen dem Gewichte  $\Pi$ , mit welchem der Stab belastet wird, und der durch die Wirkung dieses Gewichtes hervorgebrachten Durchbiegung  $f$ ; man kann desshalb auch nach dem in § 387 Gesagten die Grenze bestimmen, bis zu welcher man in der Praxis bei der Belastung des Stabes gehen darf.

Nimmt man für  $E$  die Bedeutung an, welche in § 77 angegeben wurde, so erhält man  $\frac{\Pi}{Ew}$  als die Grösse, um welche die Fasern durch die Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  zusammengedrückt werden. Bezeichnet man ferner, wie in § 113, mit  $v'$  die Entfernung der Gleichgewichtsaxe von der äussersten Faser, welche am stärksten zusammengedrückt wird, so lässt sich die grösste Zusammenrückung, welche die Fasern in Folge der Biegung erleiden, durch  $v' \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$  ausdrücken. Dieser letzte Ausdruck wird ein Maximum für den Punkt  $A$  und erhält hier den Werth  $\frac{v'\Pi l}{\epsilon \cdot \cos \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\epsilon}}}$ . Die grösste Verkürzung der

Faser ist also hier

$$\Pi \left\{ \frac{1}{Ew} + \frac{v'l}{\epsilon \cdot \cos \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\epsilon}}} \right\}.$$

Soll daher der grösste Druck, welchen die Fasern für jede Einheit der Querschnittsfläche erleiden, eine gewisse Grenze, die in § 181 mit  $R'$  bezeichnet wurde, nicht überschreiten, so darf jene Verkürzung den Bruch  $\frac{R'}{E}$  nicht übertreffen.  $\Pi$  darf daher nicht grösser sein, als der Werth, welchen man aus der Gleichung erhält

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{1}{Ew} + \frac{v'l}{\epsilon \cdot \cos \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\epsilon}}} \right\}.$$

Die Werthe, welche man für  $R'$  bei den verschiedenen Materialien anzunehmen hat, finden sich in § 181 u. folgd.

§ 408. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die grössere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet,

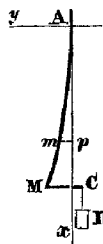
so hat man  $\omega = bc$ ,  $\varepsilon = E \cdot \frac{bc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ . Aus der vorhergehenden Gleichung wird

$$R' = \frac{\Pi}{bc^3} \left\{ c + \frac{6l}{\cos a \sqrt{\frac{12\Pi}{Ebc^3}}} \right\}.$$

Der Bruch  $\frac{12\Pi}{Ebc^3}$  wird in der Regel sehr klein sein, und diese Gleichung ist daher wenig verschieden von

$$R' = \frac{\Pi}{bc^3} (c + 6l), \text{ woraus } \Pi = \frac{R'bc^3}{c + 6l}.$$

§ 469. Man nehme jetzt an, dass das obere Ende des Stabes festgehalten werde (Fig. 68), während das Gewicht  $\Pi$  eine Ausdehnung und eine Biegung des Stabes zu gleicher Zeit bewirkt. Behält man die Benennungen aus § 406 bei, so ist in diesem Falle die Gleichgewichtsgleichung



$$\varepsilon \frac{dy^2}{dx^2} = \Pi (l - f + y);$$

und setzt man zur Abkürzung  $\frac{\Pi}{\varepsilon} = r^2$ , so ist das Integral 1)

$$l - f + y = Ae^{rx} + Be^{-rx},$$

wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen,  $A$  und  $B$  aber zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt  $A$  muss aus dieser Gleichung  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , für den Punkt  $M$  aber  $x = a$ ,  $y = f$  folgen, man hat daher

$$\begin{aligned} l - f &= A + B, \\ 0 &= A - B, \\ l &= Ae^{ra} + Be^{-ra}; \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned} A &= B = \frac{l}{e^{ra} + e^{-ra}}, \\ f &= l \left\{ 1 - \frac{2}{e^{ra} + e^{-ra}} \right\}. \end{aligned}$$

1) Navier-Wittstein, § 435.

Die Gleichung der Curve ist

$$y = l \cdot \frac{e^{rx} + e^{-rx} - 2}{e^{ra} + e^{-ra}}.$$

§ 410. Wie in dem vorhergehenden Falle erhält man auch hier eine Relation zwischen dem Gewichte  $\Pi$  und der Durchbiegung  $f$ , welche das Gewicht hervorbringt. Die grösste Belastung, welche für den Stab zulässig ist, bestimmt sich daher gleichfalls aus der Bedingung, dass die Fasern nicht über eine gewisse Grenze hinaus angespannt werden dürfen. Behält man die Benennungen aus § 407 bei, so hat man  $\frac{\Pi}{E\omega}$  als die directe Ausdehnung der Fasern durch das Gewicht  $\Pi$ , und  $\frac{\Pi l}{\varepsilon}$  als die grösste Ausdehnung der Fasern, welche sich in Folge der Biegung in dem Punkte  $M$ , wo sich die Bruchstelle befindet, ergibt. Soll daher die grösste Spannung den Werth  $R'$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{1}{E\omega} + \frac{v'l}{\varepsilon} \right\},$$

woraus man den Werth von  $\Pi$  findet.

§ 411. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die grössere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so ist  $\omega = bc$ ,  $\varepsilon = \frac{Ebc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ , und aus der vorhergehenden Gleichung wird

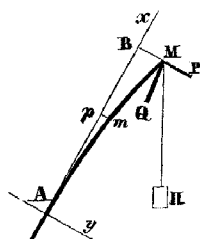
$$R' = \frac{\Pi(c+6l)}{bc^2}, \text{ woraus } \Pi = R' \frac{bc^2}{c+6l}.$$

Viertes Kapitel.

**Widerstand eines prismatischen Stabes, wenn mit der Axe desselben die Richtung der Kraft einen schiefen Winkel einschliesst.**

§ 412. Es sei  $AM$  (§ 69) ein Stab, gegen den in

Fig. 69.



schiefer Richtung eine Kraft wirkt; das untere Ende  $A$  werde festgehalten, während an dem obern Ende ein Gewicht  $\Pi$  wirkt. Man nenne

$\alpha$  den Winkel, welchen die Richtung  $AB$  des Stabes mit der Verticalen einschliesst;

$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche;

$x, y$  die Abscisse  $Ap$  und Ordinate  $mp$  eines beliebigen Punktes der Curve, welche der Stab in Folge der Biegung bildet;

$f$  die Ordinate  $MB$  des Endpunktes;

$P, Q$  die beiden Composanten, welche man erhält, wenn man das in  $M$  angreifende Gewicht  $\Pi$  normal und parallel zu  $AB$  zerlegt, es ist also  $P = \Pi \sin \alpha$ ,  $Q = \Pi \cos \alpha$ ;

$\epsilon$  behalte die dafür in § 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung ist hier

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) + Q(f-y);$$

und setzt man zur Abkürzung  $p^2 = \frac{P}{\epsilon}$ ,  $q^2 = \frac{Q}{\epsilon}$ , so erhält man als das Integral dieser Gleichung

$$f-y = A \sin q(x+B) - \frac{p^2}{q^2}(a-x), \quad 1)$$

1) Setzt man

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = p^2(a-x) + q^2(f-y),$$

so erhält man durch eine zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -q^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -q^2 z;$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt  $A$  hat man  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$ ,  
und für den Punkt  $M$ ,  $x=a$ ,  $y=f$ , woher man die  
drei Bedingungen erhält

$$f = A \sin qB - \frac{p^2 a}{q^2},$$

$$0 = qA \cos qB + \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \sin q(a + B).$$

Hieraus folgt

$$\sin qB = \sin qa, \quad \cos qB = -\cos qa,$$

$$A = \frac{p^2}{q^2 \cos qa}$$

$$f = \frac{p^2}{q^2} (\tan qa - qa).$$

Aus den vorstehenden Werthen erhält man als die  
Gleichung der Curve

$$y = \frac{p^2}{q^2} \left\{ \frac{\sin qa - \sin q(a-x)}{\cos qa} - qx \right\}.$$

Der Ausdruck für  $f$  giebt die Durchbiegung als Function  
der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$ . Da diese Durchbiegung  
sehr gering bleiben soll, so muss  $\tan qa - qa$  eine sehr  
kleine Grösse sein. Ist daher 0,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  etc. die  
Reihe von Bogen, deren Länge der Länge ihrer respec-  
tiven Tangenten gleichkommt, so darf man der Compo-  
santen  $Q$  keine anderen Werthe beilegen, als solche,  
welche die Zahlen  $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}$ ,  $\frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}$ ,  $\frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$  etc. etwas übertreffen.

daher

$$z = A_1 \sin qx + B_1 \cos qx = p^2 (a-x) + q^2 (f-y)$$

$$f-y = \frac{A_1}{q^2} \sin qx + \frac{B_1}{q^2} \cos qx - \frac{p^2}{q^2} (a-x),$$

oder

$$f-y = A \sin q(x+B) - \frac{p^2}{q^2} (a-x),$$

wenn man die willkürlichen Constanten  $A_1$  und  $B_1$  so verändert, dass

$$\frac{A_1}{q^2} = A \cos qB, \quad \frac{B_1}{q^2} = A \sin qB \text{ also } A = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{q^2}, \quad \tan qB = \frac{B_1}{A_1}$$

wird.

Nimmt man den ersten dieser Werthe, so entspricht dies einer Biegung des Stabes, wie sie Fig. 69 darstellt. Die folgenden Werthe entsprechen Curven mit einer stets wachsenden Anzahl von Beugungspunkten, deren Existenz an die Bedingung geknüpft ist, dass gewisse Punkte der Curve in der Linie  $AB$  festgehalten werden. Sind alle Punkte des Intervalles  $AB$  frei, so ist das Gewicht  $\Pi$ , welches der Stab tragen kann, der Bedingung unterworfen, dass die Zahl  $a \sqrt{\frac{Q}{E}}$  zwischen den

Grenzen 0 und  $\mu_1$  liege, und dass der obige Werth von  $f$  eine sehr kleine Grösse habe. Dieser Werth von  $f$  wird die durch die Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  verursachte Verrückung des Punktes  $M$  ausdrücken.

§ 413. Die Grenze der zulässigen Belastungen wird hier ebenso wie in § 407 bestimmt. Haben  $\omega$  und  $v'$  dieselbe Bedeutung, wie in § 407, so erhält man  $\frac{Q}{E\omega}$  als die Verkürzung der Fasern durch die Wirkung der parallel zur Axe des Stabes gerichteten Kraft  $Q$ ; und  $v' \frac{d^2y}{dx^2}$  als die Verkürzung der an der concaven Seite liegenden Fasern, welche durch die Biegung hervorgebracht wird. Diese letztere Grösse wird ein Maximum für den Punkt  $A$  und hat hier den Werth  $v' \frac{p^2}{q} \operatorname{tang} \alpha$ ; die grösste Totalverkürzung der Fasern ist daher

$$\frac{Q}{E\omega} + \frac{v' P \operatorname{tang} \alpha \sqrt{\frac{Q}{E}}}{\sqrt{Q\epsilon}}.$$

Soll daher der Druck, den die Fasern für jede Einheit der Querschnittsfläche erleiden, die Grenze  $R'$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v' P \operatorname{tang} \alpha \sqrt{\frac{Q}{E}}}{\sqrt{Q\epsilon}};$$

d. h.

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{\cos \alpha}{E\omega} + \frac{v' \sin \alpha \cdot \operatorname{tang} \alpha \sqrt{\frac{\Pi \cos \alpha}{E}}}{\sqrt{\Pi \cos \alpha \cdot \epsilon}} \right\}.$$

Bestimmt man nun das Gewicht  $\Pi$  so, dass es dieser Gleichung Genüge leistet, so hat man damit die Grenze der zulässigen Belastungen gefunden.

§ 414. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die grössere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so ist  $\omega = bc$ ,  $\epsilon = E \frac{bc^3}{12}$ ,  $\nu' = \frac{c}{2}$ , und aus der oben erhaltenen Gleichung wird

$$R' = \frac{\Pi}{bc^3} \left\{ c \cos \alpha + \frac{6 \sin \alpha \cdot \tan \alpha \sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}}{\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}} \right\}.$$

Die Grösse  $\frac{12 \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}$  wird oft sehr klein sein, und die vorstehende Gleichung wird sich daher wenig unterscheiden von

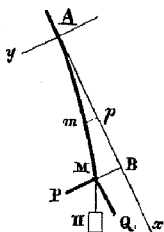
$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ c \cos \alpha + 6a \sin \alpha \right\},$$

woraus

$$\Pi = \frac{R'bc^2}{c \cos \alpha + 6a \sin \alpha}.$$

Die Werthe, welche man für  $R'$  bei den verschiedenen Materialien anzunehmen hat, findet man in § 181 u. folgd.

Fig. 70.



§ 415. Man nehme jetzt an, der Stab  $AM$  (Fig. 70) werde am obern Ende  $A$  festgehalten, und die Belastung wirke am untern Ende, so dass das Gewicht  $\Pi$  den Stab auszudehnen, und nicht ihn zusammenzudrücken strebt. Behält man die Benennungen aus § 412 bei, so hat man hier die Gleichgewichtsgleichung

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) - Q(f-y),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p^2(a-x) - q^2(f-y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist <sup>1)</sup>

$$f-y = Ae^{q(a-x)} + Be^{-q(a-x)} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen,  $A$  und  $B$  aber zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt  $A$  hat man  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  
und für den Punkt  $M$ ,  $x=a$ ,  $y=f$ ; daher

$$\begin{aligned} f &= Ae^{qa} + Be^{-qa} + \frac{p^2 a}{q^2}, \\ 0 &= q(Ae^{qa} - Be^{-qa}) + \frac{p^2}{q^2}, \\ 0 &= A + B; \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} B &= -A, \\ A &= -\frac{p^2}{q^2(e^{qa} + e^{-qa})}, \\ f &= \frac{p^2}{q^2} \left\{ qa - \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\}. \end{aligned}$$

Das Gewicht II muss einen solchen Werth besitzen, dass die letzte Formel für  $f$  eine sehr kleine Grösse giebt.

Die Gleichung der Curve ist

$$y = \frac{p^2}{q^2} \left\{ qx - \frac{e^{qa} - e^{-qa} - eq(a-x) + e^{-q(a-x)}}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\}.$$

1) Setzt man

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = p^2(a-x) - q^2(f-y),$$

so erhält man durch eine zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = +q^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = q^2 \cdot z,$$

daher

$$z = A_1 e^{qx} + B_1 e^{-qx} = p^2(a-x) - q^2(f-y)$$

$$f-y = \frac{-A_1}{q^2} e^{qx} + \frac{-B_1}{q^2} e^{-qx} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

oder

$$f-y = Ae^{q(a-x)} + Be^{-q(a-x)} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wenn man die willkürlichen Constanten  $A_1$  und  $B_1$  so verändert, dass

$$\frac{-A_1}{q^2} = Be^{-qa} \text{ und } \frac{-B_1}{q^2} = Ae^{qa}$$

wird.



§ 416. Dieselben Betrachtungen wie in § 407 können auch hier Anwendung finden. Die Fasern des Stabes werden zunächst durch die Wirkung der Composante  $Q$  um die Grösse  $\frac{Q}{E\omega}$  gleichförmig ausgedehnt. In Folge der Biegung werden sodann die Fasern in dem Punkte  $A$  um die Grösse  $\frac{v'P^2}{q} \cdot \frac{eqa - e^{-qa}}{eqa - e^{-qa}}$  ausgedehnt oder zusammenge-  
drückt, je nachdem sie auf der convexen oder concaven Seite liegen. Soll daher die grösste Spannung der Fasern den Werth  $R'$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v'P}{VQ\epsilon} \cdot \frac{e}{\frac{a\sqrt{\frac{Q}{\epsilon}} - a\sqrt{\frac{Q}{\epsilon}}}{e + e}}$$

Der grösste Werth, welchen man für das Gewicht  $\Pi$  annehmen darf, bestimmt sich durch die Bedingung, dass die Composanten  $P, Q$  dieses Gewichtes der vorstehenden Gleichung Genüge leisten müssen.

§ 417. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die grössere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so ist  $\omega = bc$ ,  $\epsilon = E \frac{bc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ . Aus der vorstehenden Gleichung wird

$$R' = \frac{1}{bc^2} \left\{ Qc + \frac{6P}{\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} \cdot \frac{e}{\frac{a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}} - a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}{e + e}} \right\}$$

d. h.

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ c \cos \alpha + \frac{6 \sin \alpha}{\sqrt{\frac{12\Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}} \cdot \frac{e}{\frac{a\sqrt{\frac{12\Pi \cos \alpha}{Ebc^3}} - a\sqrt{\frac{12\Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}}{e + e}} \right\}$$

Ist der Bruch  $\frac{12\Pi \cos \alpha}{E b c^3}$  eine sehr kleine Grösse, was in den meisten Fällen, die in der Praxis vorkommen werden, der Fall sein wird, so unterscheidet sich die letzte Gleichung sehr wenig von

$$R' = \frac{\Pi(c \cos \alpha + 6a \sin \alpha)}{b c^2},$$

woraus man erhält

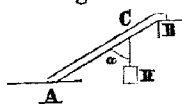
$$\Pi = R' \frac{b c^2}{c \cos \alpha + 6a \sin \alpha},$$

wie in dem vorhergehenden Falle.

**Gleichgewicht eines geneigten Stabes, wenn derselbe zwischen seinen Enden belastet ist.**

§ 418. Der einfachste Fall ist hier der, wenn ein geneigter Stab  $AB$  (Fig. 71), welcher in  $C$  mit dem Gewichte  $\Pi$  belastet ist, an den beiden Enden auf Theilen von horizontalen Ebenen ruht. Ein solcher Stab hat kein Bestreben zu gleiten, weil in Folge des Gleitens das Gewicht  $\Pi$  an keine tiefere Stelle gelangen würde.

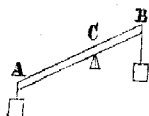
Fig. 71.



Bezeichnet man mit  $a$  und  $a'$  die Längen  $AC$  und  $BC$ , so hat man  $\Pi \frac{a'}{a+a'}$  und  $\Pi \frac{a}{a+a'}$  als die Verticalkräfte, welche in  $A$  und  $B$  zur Wirkung kommen. Man kann nun jeden der beiden Theile  $AC$  und  $BC$  so ansehen, als würde er in  $C$  festgehalten und an dem Ende  $A$  oder  $B$  von einer entsprechenden Verticalkraft sollicitirt. Es befindet sich also der Theil  $AC$ , welcher in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird, in demselben Falle, wie der in § 412 untersuchte Stab, wobei für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft hier  $\Pi \frac{a'}{a+a'}$  zu setzen ist. Der Theil  $BC$  hingegen, welcher in der Richtung seiner Länge ausgedehnt wird, befindet sich in demselben Falle, wie der in § 415 untersuchte Stab, wobei für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft hier  $\Pi \frac{a}{a+a'}$  zu setzen ist.

§ 419. Ein Stab  $AB$  (Fig. 72), welcher in geneigter Lage auf einem Stützpunkte  $C$  ruht, ohne auf demselben gleiten zu können, während er an seinen Endpunkten mit Gewichten belastet ist, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, wird auf dieselbe Weise (aber im entgegengesetzten Sinne) sollicitirt, wie der in dem vorhergehenden Paragraphen untersuchte Stab. Der Theil  $BC$ , welcher

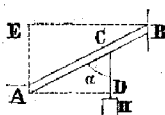
Fig. 72.



zusammengedrückt wird, befindet sich in demselben Falle, wie der in § 412 untersuchte Stab, und der Theil  $AC$ , welcher ausgedehnt wird, befindet sich in demselben Falle, wie der in § 415 untersuchte Stab.

§ 420. Ein geneigter Stab  $AB$  (Fig. 73), welcher in  $C$  mit einem Gewichte belastet ist, wird oft auf andere Weise unterstützt, als dies in § 418

Fig. 73.



angenommen wurde. Das obere Ende wird dann von einer Verticalebene und das untere Ende von einer Horizontalebene gestützt; dieses untere Ende hat aber ein Bestreben zu gleiten, und muss daher entweder sich gegen eine Stütze legen oder von einem Bindebalken zurückgehalten werden. Das Gewicht  $\Pi$  wird hier gänzlich von der Stütze  $A$  aufgenommen. In  $B$  übt der Stab einen Horizontaldruck aus, dessen Grösse durch die Bedingung bestimmt wird, dass das Moment desselben, bezogen auf den Punkt  $A$ , also mit dem Hebelarm  $AE$ , gleich dem Momente des Gewichtes  $\Pi$  mit dem Hebelarm  $AD$  sein muss; denselben Horizontaldruck erhält man auch gegen die in  $A$  anzubringende Stütze. Nennt man  $a$  und  $a'$  die Längen  $AC$  und  $BC$ , und  $\alpha$  den Winkel  $ACD$ , so erhält man

$$\Pi \frac{a \tan \alpha}{a + a'}$$

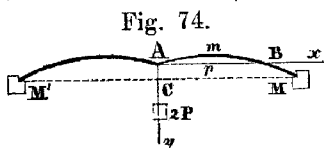
für den in Rede stehenden Horizontaldruck. Jeder der beiden Theile  $AC$  und  $BC$  ist in demselben Falle, als wenn der Stab in  $C$  festgehalten und an den beiden Enden von den vorhin angegebenen Kräften sollicitirt würde. Es muss daher der Theil  $AC$ , welcher zusammengedrückt wird, dem in § 412 untersuchten Stabe gleichgestellt werden, wobei die in dem genannten Para-

graphen mit  $P$ ,  $Q$  und  $\Pi$  bezeichneten Kräfte hier respective gleich  $\Pi \sin \alpha \cdot \left\{1 - \frac{a}{a+a'}\right\}$ ,  $\Pi \cos \alpha \cdot \left\{1 + \frac{a \tan \alpha^2}{a+a'}\right\}$  und  $\Pi \sqrt{1 + \frac{a^2 \tan \alpha^2}{(a+a')^2}}$  sind. Der Theil  $BC$  welcher ebenfalls zusammengedrückt wird, muss demselben Stabe gleichgestellt werden; die in § 412 mit  $P$ ,  $Q$  und  $\Pi$  bezeichneten Kräfte sind aber hier respective  $\Pi \frac{a \sin \alpha}{a+a'}$ ,  $\Pi \frac{a \sin \alpha \cdot \tan \alpha}{a+a'}$  und  $\Pi \frac{a \tan \alpha}{a+a'}$ .

### Fünftes Kapitel.

Widerstand eines gebogenen prismatischen Stabes, der horizontal zwischen zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wird.

§ 421. Man denke sich einen gebogenen prismatischen Stab  $MAM'$  (Fig. 74), so zwischen zwei Stützen gelegt, deren Abstand von



einander etwas geringer als die Länge des Stabes ist, dass die beiden Enden des Stabes sich in einer Horizontalen befinden und die convexe Seite nach oben gekehrt ist. Es handelt sich darum, die Gleichgewichtsbedingungen zu finden, wenn ein Gewicht  $2P$  in der Mitte des Stabes aufgehängt ist. Jeder Theil des Stabes befindet sich in demselben Falle, als wenn er in  $A$  festgehalten und an dem Ende  $M$  oder  $M'$  von einer Kraft sollicitirt würde, deren verticale Composante  $P$  ist. Nennt man daher

- $Q$  die horizontale Composante der gegen die Stütze  $M$  oder  $M'$  wirkenden Kraft;
- $x, y$  die Coordinaten  $Ap, mp$  eines beliebigen Punktes der Curve;

$a$  die halbe Entfernung  $AB$  der Stützen von einander;  
 $s$  die halbe Länge  $AMM$  des Stabes;  
 $f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes der Curve;  
 während  
 $\varepsilon$  die in § 80 angegebene Bedeutung behält;  
 so ist die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(a-x) + Q(f-y);$$

oder, wenn man zur Abkürzung  $p^2 = \frac{P}{\varepsilon}$ ,  $q^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$  setzt,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -p^2(a-x) + q^2(f-y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f-y = A \sin q(x+B) + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

§ 422. Für den Punkt  $A$  hat man  $x=0$ ,  $y=0$ ,  
 $\frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $M$ ,  $x=a$ ,  $y=f$ ; daher  
 folgen die drei Bedingungen

$$f = A \sin qB + \frac{p^2}{q^2}a,$$

$$0 = qA \cos qB - \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \sin q(a+B), \text{ oder } q(a+B) = i\pi,$$

wo  $\pi$  das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser und  $i$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Es ergibt sich daraus

$$A = -\frac{p^2}{q^3 \cos qa};$$

und es bleibt die Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tang} qa = qa - \frac{q^2 f}{p^2}, \text{ oder } f = \frac{p^2}{q^3}(qa - \operatorname{tang} qa).$$

Der Werth der Kraft  $Q$  ist also durch die Bedingung bestimmt, dass die Tangente des Bogens  $a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$  um die Grösse  $f \cdot \frac{Q}{P} \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$  kleiner als dieser Bogen sei;

und diese letztere Grösse muss sehr klein sein, weil die Durchbiegung des Stabes als sehr gering angenommen wurde.

§ 423. Aus den vorstehenden Werthen erhält man für die Gleichung der Curve

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left\{ qx - \frac{\sin qa - \sin q(a-x)}{\cos qa} \right\},$$

woraus sehr nahe folgt

$$s = a + \frac{p^4 a}{4q^4} \left\{ 3 - \frac{3 \tan qa}{qa} + (\tan qa)^2 \right\},$$

$$s = a + \frac{p^4 a^3}{4q^4} + \left\{ \frac{3p^2}{4q^2} - \frac{p^2 a^2}{2} \right\} f.$$

Bezeichnet man durch  $0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ , etc. die Reihe von Bogen, deren Länge gleich der Länge ihrer respectiven Tangenten ist, so geschieht der obigen Bedingung Genüge, wenn man für die Kraft  $Q$  successive solche Werthe annimmt, welche etwas kleiner als  $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}, \frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}, \frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$ , u. s. w. sind. Diesen Suppositionen werden Curven entsprechen, die eine immer grössere Anzahl von Beugungspunkten besitzen.

Nimmt man von jenen Werthen den ersten, so ergeben sich aus den Gleichungen in § 422 und § 423 die Werthe von  $Q$  und  $f$ , wenn  $a, s$  und  $P$  gegeben sind. Die Gestalt der Curve wird in diesem Falle durch Fig. 74 repräsentirt.

§ 424. Nimmt man  $f = 0$  an, so wird aus der in § 422 gefundenen Bedingungsgleichung

$$\tan qa = qa, \text{ woraus } Q = \frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2} = (4,4934)^2 \frac{\varepsilon}{a^2} 1);$$

$$s = a + \frac{p^4 a^3}{4q^4};$$

woraus

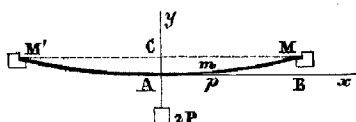
$$Q = \frac{P^2}{4\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{s-a}, \text{ und } 2P = \frac{4\mu_1 \varepsilon}{a^2} \sqrt{\frac{s-a}{a}},$$

welche letzte Formel den Werth des Gewichtes  $2P$  ausdrückt, das man in der Mitte des Stabes aufzuhängen hat, wenn der Mittelpunkt bis zu dem Niveau der beiden

1) Die Zahl 4,4934 ist die Bogen- oder Tangentenlänge eines Winkels von nahe  $257^{\circ} 27'$ .

Enden des Stabes herabgezogen werden soll. Dieses Gewicht muss man als das grösste ansehen, welches der

Fig. 75.



Stab noch tragen kann. Denn nähme man wirklich den Punkt A als unterhalb des Punktes C (Fig. 75) liegend an, so würde, wenn man

die von unten nach oben genommenen Ordinaten als positiv ansieht, die Gleichgewichtsgleichung sein

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) + Q(f-y).$$

Daraus würde die Bedingungsgleichung folgen

$$\operatorname{tang} qa = qa + \frac{q^2 f}{p^2}, \text{ oder } f = \frac{p^2}{q^2} (\operatorname{tang} qa - qa);$$

und die Gleichung der Curve wäre

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left\{ \frac{\sin qa - \sin q(a-x)}{\cos qa} - qx \right\}.$$

Die Kraft  $Q$  müsste etwas grösser angenommen werden als 0,  $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}$ ,  $\frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}$ ,  $\frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$ , etc. Die erste von diesen Suppositionen muss hier genommen werden, und daraus ergeben sich für  $Q$  so wie für das Gewicht  $2P$  weit kleinere Werthe, als bei der Annahme, dass der Mittelpunkt des Stabes oberhalb der Horizontalen liege. Die sich ergebende Curve, welche keinen Beugungspunkt mehr enthält, wird durch Fig. 75 dargestellt.

Aus dem Obigen erklärt es sich, wesshalb ein gebogener Stab, dessen Enden sich zwischen festen Hindernissen befinden, einen grössern Widerstand leisten kann, als ein gerader Stab. Man sieht, dass dieser Widerstand eine Grenze hat, die man nicht überschreiten kann, ohne den Stab zu zwingen, sofort seine Gestalt zu ändern. Das Gewicht, welches der Stab nach dieser Aenderung noch tragen kann, ist weit geringer, als dasjenige, welches der Stab bei gleicher Krümmung würde tragen können, wenn die Enden desselben einfach auf Stützen gelegt wären.

## Sechstes Kapitel.

### Widerstand eines prismatischen Stabes mit bogenförmiger Axe.

§ 425. In dem vorhergehenden Kapitel beschäftigten wir uns mit einem Stabe, dessen natürliche Gestalt als geradlinig angenommen wurde, und den man zwang, eine Bogenform anzunehmen, um das Tragvermögen des Stabes zu vermehren. Hier hingegen handelt es sich um die Stäbe, deren natürliche Gestalt bogenförmig ist, wie bei den Bogen aus Holz oder Eisen, deren man sich beim Brückenbau bedient.

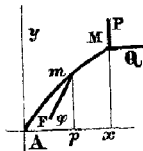
Bei den Stäben dieser Art kann zwischen der Vertheilung der Belastungen und der Gestalt der Curve (welche die Axe des Stabes bildet) eine solche Relation bestehen, dass der Stab nur zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, ohne ein Bestreben zu besitzen, seine Gestalt zu ändern; in diesem Falle sagt man, der Stab sei nach der Gleichgewichtscurve geformt. In allen andern Fällen suchen die Gewichte, mit denen der Stab belastet ist, diesen zu biegen.

### Untersuchung der Stäbe, die nach der Gleichgewichtscurve geformt sind.

§ 426. Bei der Aufsuchung der Gleichgewichtscurve für eine gegebene Vertheilung der Belastungen geht man von den Principien aus, welche schon bei der Theorie der Gewölbe aufgestellt wurden. Man betrachte einen Stab, dessen natürliche Gestalt die ebene Curve  $AM$  (Fig. 76) sei, und auf jeden Punkt desselben wirke

Fig. 76. eine Kraft, deren Richtung in die Ebene der Curve fällt. Dieser Stab wird im Gleichgewicht sein und wird keine Neigung zu einer Biegung besitzen, wenn der Druck in einem beliebigen Punkte  $m$  in der Richtung der Curve gleich und entgegengesetzt der Resultanten ist, welche sich aus den Kräften ergibt, die auf

den Theil  $mm$  des Stabes wirken. Es wird ausserdem das Ende  $A$  als gegen eine feste Ebene gestützt angesehen, die auf der Curve normal ist. Nennt man daher, wie in § 303,





- $x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap$ ,  
 $pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve;  
 $s$  die Länge des Bogens  $Am$ ;  
 $a, b$  die Coordinaten für den Endpunkt  $M$ ;  
 $S$  die ganze Länge  $AmM$  der Curve;  
 $\rho$  den Krümmungshalbmesser der Curve für den Punkt  $m$ ;  
 $\alpha$  den Winkel, welchen die Tangente in dem Punkte  $m$  der Curve mit der Horizontalen bildet;  
 $F$  den Theil der Belastung, welcher in dem Punkte  $m$  zur Wirkung kommt, bezogen auf die Einheit der Bogenlänge;  
 $\varphi$  den Winkel, welchen die Richtung der Kraft  $F$  mit der horizontalen Abscissenaxe bildet;  
 $T$  den Druck in der Richtung der Curve, welcher in dem Punkte  $m$  stattfindet;  
 $P$  und  $Q$  die Vertical- und Horizontalkraft in dem Punkte  $M$ ;  
 so hat man allgemein

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \cdot F \sin \varphi,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds \cdot F \cos \varphi,$$

als die Bedingungen, denen Genüge geleistet werden muss, wenn der Stab kein Bestreben haben soll sich zu biegen.

§ 427. Aus diesen Bedingungen findet man, wie in § 305

$$-dT = F ds \left\{ \frac{dy}{ds} \sin \varphi + \frac{dx}{ds} \cos \varphi \right\},$$

als die Gleichung, aus welcher sich der Werth des Druckes in der Axe des Stabes berechnen lässt.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur Axe desselben gerichtet sind.**

§ 428. In diesem Falle findet man, wie in § 306, dass der Druck  $T$  in der ganzen Ausdehnung der Curve constant sein muss. Die Gestalt der Curve bestimmt sich aus der Bedingung

$$\rho = \frac{T}{F}, \text{ woraus } T = \rho F;$$

d. h. der Krümmungshalbmesser muss überall gleich sein dem Drucke  $T$ , dividirt durch den Werth des auf die Einheit der Bogenlänge bezogenen Normaldruckes.

§ 429. Ist der Normaldruck constant, so muss die Gestalt des Stabes ein Kreisbogen sein.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich vertical gerichtet sind.**

§ 430. Nennt man in diesem Falle  $p$  das auf die Einheit der Bogenlänge bezogene und als Function des Bogens ausgedrückte Gewicht, womit der Punkt  $m$  belastet ist, so wird aus den Gleichungen in § 426

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \cdot p,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q.$$

Die horizontale Composante des Druckes  $T$  ist in der ganzen Ausdehnung der Curve constant und der Kraft  $Q$  gleich.

§ 431. Aus der Gleichung in § 427 wird jetzt

$$-dT = p ds \cdot \frac{dy}{ds}, \text{ oder } -dT = p dy.$$

§ 432. Anstatt die Kraft  $F$  und das Gewicht  $p$  als durch eine Function des Bogens ausgedrückt anzunehmen, kann man sie als durch eine Function der Abscisse  $x$  ausgedrückt ansehen. In diesem Falle wird aus den Gleichungen in § 430

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_x^a dx \cdot p,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q.$$

Anstatt der Gleichung in § 431 hat man

$$-dT = p dx \cdot \frac{dy}{ds}.$$

§ 433. Der einfachste Fall ergibt sich, wenn man  $p$  als constant ansieht, d. h. wenn man den Stab als

so belastet annimmt, dass gleichen Theilen der horizontalen Abscissenaxe  $Ax$  auch gleiche Gewichte entsprechen. In diesem Falle hat man

$$T \frac{dy}{ds} = P + p(a-x),$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q,$$

woraus

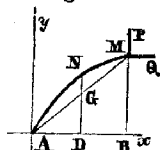
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P + p(a-x)}{Q},$$

$$y = \frac{1}{Q} \left\{ Px + p \left[ ax - \frac{1}{2} x^2 \right] \right\}.$$

§ 434. Der Werth des Druckes  $T$  ist

$$T = Q \frac{ds}{dx}, \text{ oder } T = Q \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

§ 435. Man nehme an, der bogenförmige Stab  $AM$  (Fig. 77) sei auf die eben angegebene Weise belastet, und ausser der Lage des Endpunktes  $M$  sei noch die Ordinate  $DN$  in der Mitte von  $AB$  bekannt. Nennt man  $g$  den Verticalpfeil  $NG$ , so muss sich aus der



vorhergehenden Gleichung  $y = \frac{b}{2} + g$  ergeben, wenn man  $x = \frac{a}{2}$ , und  $y = b$ , wenn man  $x = a$  setzt; daraus folgt

$$P = \frac{pab}{8g} - \frac{pa}{2},$$

$$Q = \frac{pa^2}{8g};$$

und als die Gleichung der Curve, welche ein Parabelbogen ist,

$$y = \frac{(b + 4g)x}{a} - \frac{4gx^2}{a^2}.$$

§ 436. Die Neigung der Curve in dem Punkte  $A$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{P + pa}{Q}, \text{ oder } \tan \alpha = \frac{b + 4g}{a}.$$

Die Formel im § 434 giebt für den Druck  $T$ , welcher in einem beliebigen Punkte stattfindet,

$$T = \frac{pa^2}{8g} \sqrt{1 + \left\{ \frac{b+4g}{a} - \frac{8gx}{a^2} \right\}^2},$$

und für den Druck, welcher respective in  $A$  und  $M$  stattfindet,

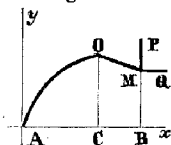
$$T = \frac{pa^2}{8g} \sqrt{1 + \left\{ \frac{b+4g}{a} \right\}^2},$$

und

$$T = \frac{pa^2}{8g} \sqrt{1 + \left\{ \frac{b-4g}{a} \right\}^2}.$$

§ 437. Man nehme jetzt an, der bogenförmige Stab sei wieder auf die vorhin angegebene Weise belastet, und ausser der Lage des Endpunktes  $M$  (Fig. 78) sei noch die Abscisse des Punktes  $Q$  bekannt, welcher den Scheitel der Curve bildet und für den die Richtung der Tangente horizontal ist. Nennt man diese Abscisse  $a'$ , so muss sich  $\frac{dy}{dx} = 0$

Fig. 78.



ergeben, wenn man  $x = a'$  setzt. Daraus folgt

$$P = -p(a-a'),$$

$$Q = \frac{pa(2a'-a)}{2b};$$

und aus der Gleichung der Curve wird

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{2a'x - x^2}{2a' - a},$$

§ 438. Wenn statt der Abscisse  $AC$  oder  $a'$  des Punktes  $O$  die Ordinate desselben gegeben wäre, und diese Ordinate durch  $b'$  bezeichnet würde, so hätte man

$$P = -\frac{pa\sqrt{b'^2 - bb'}}{b' + \sqrt{b'^2 - bb'}},$$

$$Q = \frac{pa^2}{2b} \cdot \frac{b' - \sqrt{b'^2 - bb'}}{b' + \sqrt{b'^2 - bb'}}$$

$$a' = \frac{a}{b} \cdot (b' - \sqrt{b'^2 - bb'});$$

und die Gleichung der Curve wäre

$$y = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{2ab'x - (b' + \sqrt{b'^2 - bb'})x^2}{b' - \sqrt{b'^2 - bb'}}$$

§ 439. Für den Fall, welcher in § 437 betrachtet wurde, hat man

$$\tan \alpha = \frac{2ba'}{a(2a' - a)};$$

und für den Fall des § 438

$$\tan \alpha = \frac{2}{a} (b' + \sqrt{b'^2 - bb'}).$$

Der Werth des Druckes  $T$  berechnet sich nach der Formel in § 434 zu

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \tan \alpha - \frac{px}{Q} \right\}^2},$$

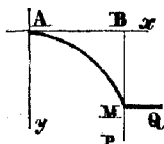
und ist daher an den Endpunkten  $A$  und  $M$

$$T = Q \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \tan \alpha - \frac{pa}{Q} \right\}^2}.$$

§ 440. Wir wollen noch den Fall untersuchen, in welchem die Curve sich in  $A$  (Fig. 79) gegen eine

Fig. 79.



Verticalebene stützt, und wo daher die Tangente der Curve mit der horizontalen Axe  $Ax$  zusammen fallen muss. Sieht man die von oben nach unten gezählten Ordinaten als positiv an, und beachtet, dass aus den Gleichungen in § 433 folgen muss  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $y = 0$ , wenn

man  $x = 0$ ; hingegen  $y = b$ , wenn man  $x = a$  setzt, wobei  $a$  und  $b$  wie vorhin die Coordinaten des Endpunktes  $M$  bezeichnen, so hat man

$$P = -pa, \quad Q = \frac{pa^2}{2b};$$

und als die Gleichung der Curve

$$y = \frac{bx^2}{a^2}.$$

§ 441. Der Werth des Druckes  $T$  ist

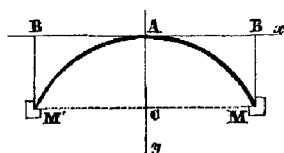
$$T = Q \sqrt{1 + \frac{p^2 x^2}{Q^2}}, \text{ oder } T = \frac{pa^2}{2b} \sqrt{1 + \frac{4b^2 x^2}{a^4}}.$$

In dem Endpunkte  $M$  bildet die Tangente der Curve mit der Abscissenaxe einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente  $= \frac{2b}{a}$  ist. Der Werth des Druckes  $T$  ist in diesem Punkte

$$\frac{pa}{2b} \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

§ 442. Anstatt sich in  $A$  eine feste Ebene angebracht zu denken, könnte man auf der andern Seite dieses Punktes einen Curventheil  $AM$  (Fig. 80) denken, der mit dem ersten gleiche Gestalt und gleiche Belastung haben müsste. Daraus folgt, dass die gewöhnliche Parabel, welche durch die Gleichung in § 440 repräsentirt wird, die Gleichgewichtscurve für einen Stab  $MAM$  mit bogenförmiger Axe ist, der auf zwei Stützen gelegt

Fig. 80.



und mit Gewichten belastet wird, die man gleichförmig auf der Horizontalen vertheilt. Die obigen Werthe für  $P$  und  $Q$  geben die Drücke an, welche die beiden Stützen in verticaler und in horizontaler Richtung

erleiden. Die Werthe für  $T$  in § 441 geben den Druck an, welchen die verschiedenen Theile der Curve erleiden, und der im Scheitel  $A$  gleich  $Q$  ist.

§ 443. Wenn die Belastung des bogenförmigen Stabes, anstatt gleichförmig auf der Linie  $AB$  (Fig. 79) vertheilt zu sein, von dem Punkte  $A$  nach dem Punkte  $B$  hin gleichförmig zunähme, so würde aus den Gleichungen in § 432, wofern  $k$  eine Constante bezeichnet,

$$-T \frac{dy}{ds} = P + \int_x^a dx (p + kx),$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q;$$

Woraus

Navier's Baumechanik.

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q} [P + p(a-x) + \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)],$$

$$-y = \frac{1}{Q} [Px - p(ax - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2}k(a^2x - \frac{1}{6}x^3)].$$

Für den Punkt  $A$  muss  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$  sein; für den Punkt  $B$  aber  $x=a$ ,  $y=b$ ; daraus folgt für die Kräfte, welche an dem Endpunkte angebracht werden müssen,

$$-P = pa + \frac{1}{2}ka^2,$$

$$Q = \frac{3pa^2 + ka^3}{6b};$$

und für die Gleichgewichtscurve

$$y = \frac{b(3px^2 + kx^3)}{3pa^2 + ka^3}.$$

§ 444. Für den Druck  $T$  erhält man nach der Formel des § 434

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \frac{3b(2px + kx^2)}{3pa^2 + ka^3} \right\}^2};$$

daher für den Endpunkt  $M$ ,

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \frac{3b(2p + ka)}{3pa + ka^2} \right\}^2}.$$

Die Curve bildet in diesem Punkte mit der Horizontalen einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich

$$\frac{3b(2p + ka)}{3pa + ka^2}$$

ist.

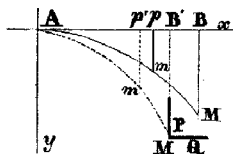
§ 445. Bei der Annahme einer gleichförmig über die Länge des Stabes vertheilten Belastung würde man als Gleichgewichtscurve die krumme Linie erhalten, welche unter dem Namen der Kettenlinie bekannt ist. Der Druck, welchen die einzelnen Theile des Stabes erleiden, würde auf dieselbe Weise zu berechnen sein, wie man die Spannung der Kettenlinie berechnet. Man kann sich also in diesem Falle der Formeln bedienen, welche man in den Lehrbüchern der Statik findet. <sup>1)</sup>

1) Man sehe auch das Werk: Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, par Navier.

# Biegung der Stäbe mit bogenförmiger Axe.

§ 446. Wir wollen jetzt einen bogenförmigen Stab  $AmM$  (Fig. 81) untersuchen, von dem wir annehmen, dass das Ende  $A$  horizontal festgehalten werde, während an dem andern Ende  $M$  eine Verticalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken und den Stab in die Lage der Curve  $Am'M$  biegen.

Fig. 81.



Es handelt sich nun darum, die Gestalt der Curve  $AM$ , zu finden, wenn die Gestalt der Curve  $AM$ , das Elasticitätsmoment des Stabes und die Kräfte  $P$  und  $Q$  gegeben sind. Man nenne

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap$ ,  $pm$  eines beliebigen Punktes der Curve  $AM$ ;

$s$  die Länge des Bogens  $Am$ ;

$x', y'$  die Coordinaten des Punktes  $m'$ , in welchem sich der Punkt  $m$  nach der Biegung befindet;

$a, b$  die Coordinaten  $AB, MB$  des Endpunktes  $M$ ;

$a', b'$  die Coordinaten  $AB', M'B'$  des Punktes  $M'$ , in welchem sich der Punkt  $M$  nach der Biegung befindet;

$\varphi$  den Winkel, welchen die Normale für den Punkt  $m$  der Curve  $AM$  mit der Verticalen bildet;

$\varphi'$  den Winkel, welchen nach der Biegung die Normale für den Punkt  $m'$  der Curve  $AM'$  mit der Verticalen bildet;

$\epsilon$  das Elasticitätsmoment des bogenförmigen Stabes  $AM$ , wofür der allgemeine Ausdruck in § 80 gegeben ist.

Man nehme jetzt die in § 77 angestellten Betrachtungen wieder auf, und nenne, wie dort,  $v$  die Entfernung eines beliebigen Punktes des Querschnittes von der Gleichgewichtsaxe (oder von der neutralen Faserschicht). Vor der Biegung ist die Länge eines unendlich kleinen Theiles einer Faser, welche sich in dem Abstände  $v$  von der Gleichgewichtsaxe befindet, gleich  $ds + v d\varphi$ , weil  $d\varphi$  der Winkel ist, welchen zwei auf einander folgende Normalen mit einander bilden. Nach der Biegung ist die Länge desselben Fasertheils gleich



$ds + v d\varphi'$ , wenn man von der Aenderung absieht, welche die Länge des Elementes  $ds$  erlitten haben könnte. Das Verhältniss der Ausdehnung dieses Fasertheiles zu der ursprünglichen Länge desselben ist daher

$$\frac{(d\varphi' - d\varphi)v}{ds + v d\varphi'}, \text{ oder einfach } \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} v,$$

wenn man  $v d\varphi$  gegen  $ds$  vernachlässigt, was in den Fällen, die in der Praxis gewöhnlich vorkommen, meist geschehen kann, indem die Dicke des Stabes im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser sehr klein zu sein pflegt. Man schliesst hieraus, dass bei einem bogenförmigen Stabe die Gleichgewichtsbedingungen sich auf dieselbe Weise werden ausdrücken lassen, wie bei einem geraden Stabe, wenn man nur die Function  $\frac{1}{\rho}$  oder  $\frac{d^2y}{dx^2}$  durch  $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  ersetzt.

§ 447. Der Gleichgewichtszustand des bogenförmigen Stabes  $AM$  wird demnach durch die folgende Gleichung ausgedrückt

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = P(a-x) + Q(b-y);$$

es folgt daraus

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)].$$

Da die Biegung stets als sehr gering vorausgesetzt wird, so können die Winkel  $\varphi'$  und  $\varphi$  nur sehr wenig von einander verschieden sein, und die rechte Seite der Gleichung muss daher einen Winkel ausdrücken, der von seinem Sinus (fast) nicht verschieden, und dessen Cosinus (fast) gleich der Einheit ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt daher <sup>1)</sup>

$$\cos \varphi' - \cos \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \sin \varphi \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$\sin \varphi' - \sin \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cos \varphi \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

1) Sieht man  $\varphi' - \varphi$  als die Variation von  $\varphi$  an, so hat man (weil das Variiren nach denselben Gesetzen geschieht, wie das Differenziren)  $\varphi' - \varphi = \delta \varphi$ ,  
 $\cos \varphi' - \cos \varphi = -\delta \cos \varphi = -\delta \varphi \cdot \sin \varphi$ ,  $\sin \varphi' - \sin \varphi = \delta \sin \varphi = \delta \varphi \cdot \cos \varphi$ .

Man hat aber  $\cos \varphi = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$ ,  $\cos \varphi' = \frac{dx'}{ds}$ ,  
 $\sin \varphi' = \frac{dy'}{ds}$ , wenn man  $ds$  als constant ansieht, d. h. wenn  
 man annimmt, dass die Länge der Axe des Stabes durch  
 die Biegung nicht verändert werde. Demnach ist

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

welche Gleichungen nur noch integrirt werden müssen,  
 um die Verschiebung eines jeden der Punkte des bogen-  
 förmigen Stabes anzugeben, sobald die Form des Stabes  
 bekannt ist.

§ 448. Entwickelt man die Wurzelgrösse in einer  
 Reihe, so erhält man statt der obigen Ausdrücke

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \text{etc.} \right\} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \text{etc.} \right\} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

In der Praxis wird man wegen der geringen Weite der  
 Curve der Stäbe fast immer bei dem zweiten Gliede der  
 Reihe stehen bleiben können. Selbst bei Vernachlässi-  
 gung dieses Gliedes wird man in vielen Fällen nur sehr  
 unbedeutende Fehler begehen.

§ 449. Bei einem bogenförmigen Stabe, der auf  
 die in § 446 angegebene Weise sollicitirt wird, dehnt  
 die Wirkung der Kraft  $P$  die Theile in der Richtung  
 der Länge des Stabes aus; die Wirkung der Kraft  $Q$   
 hingegen drückt sie zusammen. Die Spannung oder  
 Pressung, welche in einem beliebigen Punkte der Curve  
 eine jede der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  hervorbringt,  
 erhält man, wenn man diese Kräfte parallel zu der Rich-  
 tung der Curve in diesem Punkte zerlegt. Bezeichnet  
 man, wie oben, die Pressung durch  $T$ , so hat man hier

$$T = -P \frac{dy}{ds} + Q \frac{dx}{ds},$$

oder

$$T = \frac{-P \frac{dy}{dx} + Q}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Anwendung auf den Fall, in welchem die Axe des Stabes ein Parabelbogen ist.

§ 450. In diesem Falle hat man  $y = \frac{bx^2}{a^2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$ , durch Substitution dieser Werthe in die Formeln des § 448 findet man

$$\begin{aligned} dx' - dx &= -\frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ \frac{2b}{a^2} \left[ P \left[ ax^2 - \frac{x^3}{2} \right] + Q \left[ bx^2 - \frac{bx^4}{3a^2} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4b^3}{a^6} \left[ P \left[ \frac{ax^4}{3} - \frac{x^5}{4} \right] + Q \left[ \frac{bx^4}{3} - \frac{bx^6}{5a^2} \right] \right] - \text{etc.} \right\}; \\ dy' - dy &= \frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ P \left[ ax - \frac{x^2}{2} \right] + Q \left[ bx - \frac{bx^3}{3a^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b^3}{a^4} \left[ P \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] + Q \left[ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{5a^2} \right] \right] - \text{etc.} \right\}; \end{aligned}$$

woraus durch Integration folgt

$$\begin{aligned} x' - x &= -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{2b}{a^2} \left[ P \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right] + Q \left[ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{15a^2} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4b^3}{a^6} \left[ P \left[ \frac{ax^5}{15} - \frac{x^6}{24} \right] + Q \left[ \frac{bx^5}{15} - \frac{bx^7}{35a^2} \right] \right] - \text{etc.} \right\}; \\ y' - y &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P \left[ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + Q \left[ \frac{bx^2}{2} - \frac{bx^4}{12a^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b^3}{a^4} \left[ P \left[ \frac{ax^4}{12} - \frac{x^5}{20} \right] + Q \left[ \frac{bx^4}{12} - \frac{bx^6}{30a^2} \right] \right] - \text{etc.} \right\}. \end{aligned}$$

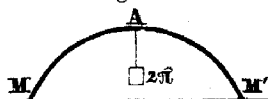
Bezeichnet man mit  $h$  und  $f$  respective die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes  $M$ , so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man  $x = a$  setzt,

$$\begin{aligned} -h &= \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \text{etc.} \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^4}{105a} - \text{etc.} \right\}, \\ f &= \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} - \text{etc.} \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \text{etc.} \right\}. \end{aligned}$$

§ 451. Man untersuche jetzt einen bogenförmigen Stab  $MAM'$  (Fig. 82), der aus zwei gleichen Hälften

besteht, und in verticaler Stellung von zwei Theilen einer

Fig. 82.



Horizontalebene unterstützt wird, während in der Mitte A ein Gewicht  $2\Pi$  thätig ist. Der Stab wird der Wirkung dieses Gewichtes nachgeben, der Scheitel wird sich senken und zugleich

werden die beiden Enden sich von einander entfernen. Die Hälfte  $AM$  des Stabes befindet sich in demselben Gleichgewichtszustande, als wenn dieser Theil des Stabes in  $A$  horizontal festgehalten und an dem Ende  $M$  nur von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $\Pi$  sollicitirt würde. Setzt man daher in den obigen Gleichungen  $P = -\Pi$  und  $Q = 0$ , und behält aus den Reihen nur die beiden ersten Glieder bei, so drücken die Werthe

$$h = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} \right\},$$

$$-f = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} \right\},$$

respective die horizontale Verschiebung eines jeden der beiden Punkte  $M$  und  $M'$ , und die Senkung des Scheitels des Stabes aus. Die Senkung ist etwas grösser, als sie bei gleicher Entfernung der beiden Stützen von einander für einen Stab mit geradliniger Axe sein würde.

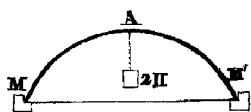
§ 452. Nach der Formel in § 449 erhält man als den Druck in der Richtung der Curve für einen Punkt, dessen Abscisse gleich  $x$  ist, sehr nahe

$$T = \Pi \left\{ \frac{2bx}{a^2} - \frac{4b^3x^3}{a^6} \right\}.$$

Da hier  $b$  als sehr klein gegen  $a$  angenommen wird, so wird dieser Druck ein Maximum an den Endpunkten  $M$  und  $M'$ , für welche  $x = a$  ist.

§ 453. Man untersuche nun einen bogenförmigen, auf dieselbe Weise belasteten Stab (Fig. 83), aber unter

Fig. 83.



der Voraussetzung, dass die Stützen den beiden Endpunkten  $M$  und  $M'$  nicht erlauben, sich von einander zu entfernen. Jede Hälfte des Stabes ist hier in demselben Gleichgewichtszustande, als wenn sie in

*A* horizontal festgehalten und an dem andern Ende *M* oder *M'* sollicitirt würde von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $\Pi$  und von einer gewissen Horizontalkraft *Q*, deren Grösse aus der Bedingung bestimmt werden muss, dass die Punkte *M* und *M'* keine horizontale Verschiebung erleiden dürfen. Wenn man in den beiden letzten Gleichungen in § 450 daher —  $\Pi$  für *P* und  $h=0$  setzt, und aus den Reihen nur die beiden ersten Glieder beibehält, so werden die dadurch sich ergebenden Werthe

$$Q = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} \right\},$$

$$f = -\frac{\Pi}{e} \left\{ \frac{a^2}{128} - \frac{23ab^2}{6720} \right\},$$

respective den Horizontalschub des bogenförmigen Stabes *MAM* gegen die Stützen und die Senkung des Scheitels dieses Stabes ausdrücken. Es ist demnach bei einem Bogen von geringer Spannweite die Senkung des Scheitels fast unabhängig von der Pfeilhöhe des Bogens, und wenn man sie mit dem in § 86 enthaltenen Werthe für *f* vergleicht, so sieht man, dass sie kaum  $\frac{1}{10}$  derjenigen Senkung beträgt, welche bei einem Stabe mit geradliniger Axe eintreten würde, wenn dieser dieselben Dimensionen hätte. Man darf jedoch nicht vergessen, dass bei der Berechnung des obigen Werthes keine Rücksicht auf die Contraction genommen ist, welche in Folge des Druckes in der Axe des Stabes eintreten muss, und die gemeinschaftlich mit der Biegung dazu beiträgt, den Scheitel der Curve zu senken.

§ 454. In dem in Rede stehenden Falle streben die auf den Stab wirkenden Kräfte nur, denselben zusammenzudrücken. Nach der Formel in § 449 erhält man, wenn man  $P = -\Pi$  und  $Q = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} \right\}$  setzt, und nur die Glieder von der Ordnung  $\frac{b^2}{a^2}$  beibehält

$$T = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3} \right\},$$

als den Druck in der Richtung der Curve für einen beliebigen Punkt, dessen Abscisse gleich *x* ist. Dieser

Druck wird ein Maximum für den Punkt, dessen Abscisse gleich  $\frac{16a}{25}$  ist; der Maximalwerth ist

$$T = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} + \frac{423b}{700a} \right\}.$$

**Anwendung auf den Fall, in welchem die Axe des Stabes ein Kreisbogen ist.**

§ 455. Man behalte die in § 446 gebrauchten Benennungen, welche sich auf Fig. 81 beziehen, bei, und bezeichne ferner mit

$A$  den Halbmesser des Kreisbogens, welchen die Axe des Stabes bildet;

$\phi$  den Werth des Winkels  $\varphi$ , welcher dem Endpunkt der Curve zugehört.

Man untersuche jetzt, wie in jenem Paragraphen geschehen ist, den Fall, in welchem das eine Ende des Stabes horizontal festgehalten und das andere Ende von einer Verticalkraft  $P$  und einer Horizontalkraft  $Q$  sollicitirt wird. Beachtet man, dass

$$\begin{aligned} x &= A \sin \varphi & a &= A \sin \Phi & ds &= A d\varphi; \\ y &= A (1 - \cos \varphi), & b &= A (1 - \cos \Phi), \end{aligned}$$

so wird sich die Gleichung in § 447, welche die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand des bogenförmigen Stabes ausdrückt, schreiben lassen

$$\varepsilon (d\varphi' - d\varphi) = A^2 \cdot d\varphi [P (\sin \Phi - \sin \varphi) + Q (\cos \varphi - \cos \Phi)];$$

woraus durch Integration folgt

$$\varepsilon (\varphi' - \varphi) = A^2 [P (\varphi \sin \Phi + \cos \varphi - 1) + Q (\sin \varphi - \varphi \cos \Phi)].$$

Verfährt man mit diesem Ausdrücke ebenso, wie in dem citirten Paragraphen, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\varepsilon (dx' - dx) = -A^2 d\varphi \cdot \sin \varphi [P (\varphi \cdot \sin \Phi + \cos \varphi - 1) + Q (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \Phi)],$$

$$\varepsilon (dy' - dy) = A^2 d\varphi \cdot \cos \varphi [P (\varphi \cdot \sin \Phi + \cos \varphi - 1) + Q (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \Phi)];$$

und hieraus durch Integration

$$\varepsilon (x' - x) = -A^2 \left\{ P [\sin \Phi (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \varphi - 1] \right. \\ \left. + Q [\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \Phi (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)] \right\}$$

$$\varepsilon (y' - y) = A^2 \left\{ P [\sin \Phi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi] \right. \\ \left. + Q [\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos \Phi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1)] \right\}.$$

Diese Ausdrücke geben die horizontale und verticale Verschiebung eines beliebigen Punktes als eine Function des zu diesem Punkte gehörenden Winkels  $\varphi$  an. Setzt man  $\varphi = \Phi$ , so erhält man für die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes  $M$ , welche wir mit  $h$  und  $f$  bezeichnen,

$$- \varepsilon h = A^3 \left\{ P \left( \frac{3}{2} \sin \Phi^2 - \Phi \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \cos \Phi - 1 \right) \right. \\ \left. \left\{ Q \left( \frac{1}{2} \Phi - \frac{3}{2} \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \Phi \cdot \cos \Phi^2 \right) \right\} \right\},$$

$$\varepsilon f = A^3 \left\{ P \left( \Phi \sin \Phi^2 + \frac{5}{2} \sin \Phi \cos \Phi - 2 \sin \Phi + \frac{1}{2} \Phi \right) \right\} \\ \left\{ Q \left( \frac{3}{2} \sin \Phi^2 - \Phi \sin \Phi \cos \Phi + \cos \Phi - 1 \right) \right\}.$$

Der Druck  $T$ , welchen ein beliebiges Element der Curve erleidet, wird durch die Formel ausgedrückt

$$T = -P \sin \varphi + Q \cos \varphi.$$

§ 457. Untersucht man zunächst den Fall, in welchem der Winkel  $\Phi$  nicht sehr beträchtlich ist, so findet man, wenn man keine höhere Potenzen von  $\Phi$  nimmt, als die fünfte,

$$-h = \frac{PA^3}{\varepsilon} \frac{5\Phi^4}{24} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{2\Phi^5}{15}.$$

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon} \left\{ \frac{\Phi^3}{3} - \frac{3\Phi^5}{20} \right\} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{5\Phi^4}{25};$$

wofür man schreiben kann

$$-h = \frac{Pa^3}{\varepsilon} \frac{5a}{24A} + \frac{Qa^3}{\varepsilon} \frac{a^2}{30A^2},$$

$$f = \frac{Pa^3}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{a^2}{60A^2} \right\} + \frac{Qa^3}{\varepsilon} \frac{5a}{24A},$$

wo  $a$  den horizontalen Abstand zwischen den beiden Endpunkten der Curve bezeichnet. Diese Formeln stimmen mit den in § 450 u. folgd. gegebenen überein, so dass es bei dem in Rede stehenden Grade der Annäherung gleichgültig ist, ob man die Curve als Parabelbogen oder als einen Kreisbogen ansieht.

§ 458. Nimmt man ferner an, dass der bogenförmige Stab die Gestalt eines Viertelkreises habe, und setzt in den in § 455 enthaltenen Formeln  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , so erhält man

$$-h = \frac{PA^3}{e} \frac{1}{2} + \frac{QA^3}{e} \frac{\pi}{4},$$

$$f = \frac{PA^3}{e} \frac{3\pi-8}{4} + \frac{QA^3}{e} \frac{1}{2}.$$

Wenn es sich um einen Halbkreis handelt, der von zwei Stützen getragen wird, welche den Endpunkten des Halbkreises nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und die Belastung im Scheitel ein Gewicht  $2\Pi$  ist, so setze man, wie in § 453,  $h=0$  und  $P=-\Pi$ , woraus folgen wird

$$Q = \frac{2\Pi}{\pi},$$

$$-f = \frac{\Pi A^3}{e} \frac{3\pi^2-8\pi-4}{4\pi}.$$

Es ist also die Kraft, mit welcher die beiden Endpunkte des Stabes sich von einander zu entfernen streben, oder was man gewöhnlich den Horizontalschub nennt, etwas geringer, als der dritte Theil des Gewichtes  $2\Pi$ , welches im Scheitel des Halbkreises thätig ist.

§ 459. Nach der Formel in § 456 findet man

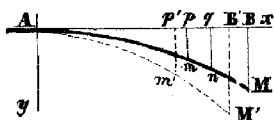
$$T = \Pi \left\{ \sin\varphi + \frac{2\cos\varphi}{\pi} \right\}$$

für den Druck in der Richtung der Curve, welchen ein beliebiges Element des Halbkreises erleidet.

### Biegung eines bogenförmigen Stabes, der auf seiner ganzen Länge belastet ist.

§ 460. Man betrachte jetzt den bogenförmigen Stab  $AM$  (Fig. 84) als in  $A$  horizontal festgehalten

Fig 85.



und in allen seinen Punkten mit Gewichten belastet, deren Wirkung ihn nöthigt, die Lage  $AM'$  anzunehmen. Behält man die in § 446 angegebenen Bezeichnungen bei und nennt ferner

$p$  das in dem Punkte  $m$  thätige Gewicht, bezogen auf die Längeneinheit und ausgedrückt als Function der Abscisse  $x$  des Punktes  $m$ ;



$x_1$  die Abscisse  $Aq$  eines beliebigen Punktes  $n$ , der zwischen  $m$  und  $M$  liegt;  
 $p_1$  den Werth von  $p$  für den Punkt  $n$ ;  
 so hat man, um die Gleichgewichtsbedingungen auszudrücken, statt der Gleichung in § 447,

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

woraus, wie in dem genannten Paragraphen folgt

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

aus welchen Formeln man die Verschiebung eines jeden Punktes der Curve erfahren kann.

§ 461. Entwickelt man die Wurzelgrösse in eine Reihe, so erhält man

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \frac{1}{8} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^4 + \dots \right\} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \frac{1}{8} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^4 + \dots \right\} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

§ 462. Der Druck, welcher in dem Punkte  $m$  stattfindet, ergiebt sich, wenn man die Summe der Gewichte, mit denen der Theil  $mM$  belastet ist, parallel zu der Richtung der Curve in diesem Punkte zerlegt. Dieser Druck ist demnach

$$T = -\frac{dy}{ds} \int_x^a dx_1 p_1, \text{ oder } T = -\frac{\frac{dy}{dx} \int_x^a dx_1 p_1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2}}$$

Dieser Werth ist negativ, wenn  $\frac{dy}{dx}$  positiv ist: alsdann wird die Curve nicht zusammengedrückt, sondern in der Richtung ihrer Länge ausgedehnt.

Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Axe des Stabes ein Parabelbogen ist.

§ 463. Ist die Belastung so vertheilt, dass gleiche Gewichte auf gleiche Theile der horizontalen Abscissenaxe  $Ax$  kommen, so ist  $p$  constant, und aus den Formeln in § 461 wird

$$dx' - dx = -\frac{p}{\varepsilon} dy \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \text{etc.} \right\} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$dy' - dy = \frac{p}{\varepsilon} dx \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \text{etc.} \right\} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

Da die Gleichung der Curve  $y = \frac{bx^2}{a^2}$  und daher  $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$  ist, so hat man

$$x' - x = -\frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4a} + \frac{bx^5}{15a^2} + \frac{2b^3}{a^6} \left[ \frac{a^2x^5}{15} - \frac{ax^6}{12} + \frac{x^7}{35} \right] - \text{etc.} \right\},$$

$$y' - y = \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{b^2}{a^4} \left[ \frac{a^2x^4}{12} - \frac{ax^5}{10} + \frac{x^6}{30} \right] - \text{etc.} \right\}.$$

Bezeichnet man wieder mit  $h$  und  $f$  respective die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes  $M$ , so hat man, wenn man  $x=a$  setzt und sich auf die beiden ersten Glieder der Reihen beschränkt,

$$-h = \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{3a^3b}{20} + \frac{ab^3}{42} \right\},$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60} \right\}.$$

§ 464. Für die Spannung in einem beliebigen Punkte der Curve erhält man nach der Formel in § 462 sehr nahe

$$T = 2p\delta \frac{ax - x^2}{a^2} \left\{ 1 - \frac{2b^2x^2}{a^4} \right\}.$$

§ 465. Man untersuche jetzt den bogenförmigen Stab  $MAM'$  (Fig. 85), der aus zwei gleichen Hälften mit parabolischer Axe besteht und in verticaler Stellung von zwei Stützen getragen wird, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen. Die Belastung sei auf die in



§ 463 angegebene Weise vertheilt. Jede Hälfte des

Stabes ist in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, als wenn dieselbe in  $A$  festgehalten und ausser von den auf der Strecke  $AM$  oder  $AM'$  vertheilten Gewichten an ihrem Endpunkte  $M$  oder  $M'$  noch sollicitirt würde von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $pa$ , und einer Horizontalkraft  $Q$ , deren Grösse aus der Bedingung  $h=0$  bestimmt werden muss. Unter dieser Voraussetzung erhält man die horizontale und verticale Verschiebung eines beliebigen Punktes, wenn man die in § 448 und § 461 erhaltenen Resultate mit einander verbindet. Für die Verschiebungen der Endpunkte erhält man demnach durch Verbindung der in § 450 und § 463 erhaltenen Resultate

$$-h = \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^4}{105a} \right\} + \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{3a^2b}{20} + \frac{ab^3}{42} \right\},$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} \right\} + \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60} \right\}.$$

In dem in Rede stehenden Falle hat man aber  $P = -pa$ , und  $Q$  bestimmt sich aus der Bedingung, dass  $h=0$  sein muss, wesshalb der Horizontalschub gegen die Stützen gleich

$$Q = \frac{pa^2}{2b}$$

ist; und setzt man diesen Werth in den Ausdruck für  $f$ , so findet man  $f=0$ . Diese Resultate stimmen mit denen in § 440 und § 442 überein. Da die Gestalt, welche für den bogenförmigen Stab angenommen wurde, mit der Gleichgewichtcurve übereinstimmt, so muss man für die Senkung des Scheitels einen Werth gleich Null finden.

§ 466. Wenn der Stab  $MAM'$  (Fig. 85) von derselben parabolischen Gestalt ausser der über seine Länge in der oben angegebenen Weise vertheilten Last  $2pa$  in seinem Scheitel noch ein Gewicht  $2\Pi$  trägt, so ist der Horizontalschub gegen die Stützen die Summe von dem eben vorhergehenden Werthe  $Q$  und dem in § 453 gefundenen, d. h.

$$Q = \frac{pa^2}{2b} + \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} \right\}.$$

Die Senkung des Scheitels wird durch den in § 453 für  $f$  gefundenen Werth ausgedrückt.

§ 467. Der Druck, welchen die einzelnen Theile des Stabes in der Richtung der Länge desselben erleiden, wird durch die Summe der beiden Werthe von  $T$ , welche respective in §441 und §454 gegeben sind, ausgedrückt. und ist daher

$$T = \frac{pa^2}{2b} + \frac{pbx^2}{a^2} + \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{25x}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3} \right\}.$$

Ist  $16pa - 25\Pi$  positiv, so wird dieser Druck ein Maximum an den Endpunkten  $M$  und  $M'$  und ist hier

$$\frac{pa^2}{2b} + 4pb + \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} + \frac{45b}{112a} \right\}.$$

Ist aber  $16pa - 25\Pi$  negativ, so findet das Maximum des Druckes statt in dem Punkte, dessen Abscisse ist

$$x = a \frac{16\Pi}{25\Pi - 16pa} \cdot 1)$$

**Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Axe des Stabes ein Kreisbogen ist.**

§ 468. Ist die Belastung gleichförmig über die Länge des Bogens vertheilt und nennt man  $p$  den Werth des Gewichtes, welches in einem beliebigen Punkte  $m$  (Fig. 84) thätig ist und auf die Einheit der Bogenlänge bezogen gedacht wird, so hat man statt der Gleichung in § 460

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = pA^3 d\varphi \int_{\varphi}^{\Phi} d\varphi' (\sin \varphi' - \sin \varphi),$$

oder

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = pA^3 d\varphi [\cos \varphi - \cos \Phi - (\Phi - \varphi) \sin \varphi];$$

und durch Integration (zwischen den Grenzen 0 und  $\varphi$ )

$$\varepsilon(\varphi' - \varphi) = pA^3 [2 \sin \varphi - \varphi (\cos \Phi + \cos \varphi) - \Phi (1 - \cos \varphi)].$$

Aus dieser Gleichung folgt, wie in § 460

$$\varepsilon(dx' - dx) = -pA^4 d\varphi \cdot \sin \varphi [2 \sin \varphi - \varphi (\cos \Phi + \cos \varphi) - \Phi (1 - \cos \varphi)],$$

$$\varepsilon(dy' - dy) = pA^4 d\varphi \cdot \cos \varphi [2 \sin \varphi - \varphi (\cos \Phi + \cos \varphi) - \Phi (1 - \cos \varphi)],$$

1) Ist aber  $a \frac{16\Pi}{25\Pi - 16pa} > a$  oder  $16pa - 9\Pi$  positiv, so ist auch jetzt noch die Maximalstelle an den Enden.

und durch Integration findet man, da  $p$  als constant angesehen wird,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x' - x) &= -pA^4 \left\{ \frac{3}{4} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \Phi (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right\}, \\ \varepsilon(y' - y) &= pA^4 \left\{ \frac{5}{4} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{4} \varphi^3 \right. \\ &\quad \left. - \cos \Phi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) + \Phi \left( \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \right) \right\}. \end{aligned}$$

welche Ausdrücke die horizontale und verticale Verschiebung eines beliebigen Punktes der Curve angeben. Setzt man  $\varphi = \Phi$ , so erhält man für die Verschiebung des Endpunktes

$$\begin{aligned} -h &= \frac{pA^4}{\varepsilon} \left\{ \Phi \left( \frac{1}{4} + \cos \Phi + \cos \Phi^2 \right) - \frac{3}{4} \sin \Phi \cos \Phi \right\}, \\ f &= \frac{pA^4}{\varepsilon} \left\{ \cos \Phi - \cos \Phi^2 + \frac{1}{4} \Phi^2 - \Phi (\sin \Phi + \sin \Phi \cos \Phi) + \frac{3}{4} \sin \Phi^2 \right\}. \end{aligned}$$

§ 469. Die Spannung in der Richtung der Curve ist für einen beliebigen Punkt derselben

$$T = pA (\Phi - \varphi) \sin \varphi.$$

§ 470. Untersucht man einen Bogen von geringer Spannweite, so geben die Formeln in § 468, wenn man von  $\varphi$  keine höhere Potenzen beibehält als die fünfte,

$$\begin{aligned} -h &= \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{3\Phi^5}{40}, \text{ oder } -h = \frac{pa^4}{\varepsilon} \frac{3a}{40A}, \\ f &= \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\Phi^4}{8}, \quad f = \frac{pa^4}{\varepsilon 8}, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke mit den in § 463 gegebenen übereinstimmen, so dass es, wenn man sich auf diesen Grad der Annäherung beschränken will, gleichgültig ist, ob die Curve angesehen wird als ein Kreisbogen, über dessen Länge, oder als ein Parabelbogen, über dessen Horizontalprojection die Belastung gleichförmig vertheilt ist.

§ 471. Ist die Curve ein Viertelkreis, so hat man in den Formeln des § 468  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  zu setzen, wodurch man für die Verschiebung des Endpunktes erhält

$$\begin{aligned} -h &= \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\pi}{8}, \\ f &= \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\pi^2 - 8\pi + 20}{16}. \end{aligned}$$

§ 472. Wenn auf einen Stab mit kreisbogenförmiger Axe ausser dem gleichförmig über seine Länge verbreiteten Gewichte noch eine Verticalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken, und diese an dem andern Endpunkte angreifen, so hat man die in § 455 und § 468 für  $h$  und  $f$  gegebenen Werthe zusammen zu nehmen, um die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes zu erhalten. Im Fall die Axe des Stabes ein Viertelkreis ist, hat man

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\pi}{8} + \frac{PA^3}{\varepsilon} \frac{1}{2} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{\pi}{4},$$

$$f = \frac{pA^4 \pi^2 - 8\pi + 20}{\varepsilon 16} + \frac{PA^3 3\pi - 8}{\varepsilon 4} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{1}{2};$$

und wenn man sich einen auf die angegebene Weise belasteten Stab in Form eines Halbkreises denkt, der von zwei Stützen getragen wird, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, so muss man  $P = -pA \cdot \frac{\pi}{2}$  (weil diese Grösse den Verticaldruck auf jede Stütze angibt) und  $h = 0$  setzen. Man erhält hieraus

$$Q = \frac{pA}{2},$$

$$f = \frac{pA^4 5\pi^2 - 8\pi - 24}{\varepsilon 16}.$$

Der Horizontalschub eines Stabes in Form eines Halbkreises gegen zwei Stützen, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, ist demnach gleich der Belastung einer jeden Hälfte multiplicirt mit dem Bruche  $\frac{1}{\pi}$ , also etwas geringer als der dritte Theil dieser Belastung; der Horizontalschub ist ausserdem halb so gross, als er sein würde, wenn die ganze Belastung des Halbkreises im Scheitel desselben thätig wäre. Der obige Werth für  $f$  giebt die Senkung des Scheitels des Halbkreises an. Diese Grösse ist hier ebenfalls geringer, als sie sein würde, wenn die ganze Belastung desselben concentrirt wäre, und zwar in dem Verhältnisse von  $5\pi^2 - 8\pi - 24$  zu  $6\pi^2 - 16\pi - 8$ .<sup>1)</sup>

1) D. h. von 0,2152 zu 0,9590 oder von 1 zu  $4\frac{1}{2}$ .

§ 473. Der Druck in der Richtung der Curve ist für einen beliebigen Punkt derselben

$$T = -pA(\Phi - \varphi) \sin \varphi - P \sin \varphi + Q \cos \varphi.$$

Setzt man in dieser Formel  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , und für  $P$  und  $Q$  ihre respectiven Werthe  $-pA \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{pA}{2}$ , so erhält man

$$T = pA \left\{ \varphi \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{2} \right\}.$$

### Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis.

§ 474. Die vorhergehenden Resultate geben die Mittel an die Hand, um in den verschiedenen Gleichgewichtsfällen, welche oben untersucht wurden, die Grenzen der zulässigen Belastungen für einen Stab mit bogenförmiger Axe zu bestimmen.

Bildet die Axe des Stabes die Gleichgewichtscurve, welche der Belastung entspricht, so wird der Stab nur in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt; und da die Dimensionen des Querschnittes gewöhnlich im Verhältniss zur Länge sehr klein sind, so kann man sich den Druck über die ganze Ausdehnung des Querschnittes gleichförmig vertheilt denken. Hat man daher den Maximalwerth des in § 426 u. folgd. mit  $T$  bezeichneten Druckes berechnet, und nennt  $\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche des Stabes und (nach § 181 u. folgd.)  $R'$  die grösste zulässige Belastung einer Faser, deren Querschnittsinhalt gleich der Einheit des Flächenmasses ist, so kann man die Gleichung setzen

$$R' = \frac{T}{\omega},$$

wonach man ein passendes Verhältniss zwischen der Belastung, welche den Druck  $T$  hervorbringt, und den Dimensionen des Stabes wählen kann.

§ 475. Entspricht die Gestalt des Stabes nicht der Gleichgewichtscurve und biegt sich daher der Stab unter der Last, so lässt sich die Grenze der zulässigen Belastungen nach dem in § 327 Gesagten bestimmen. Man bezeichne nun mit  $\omega$  den Querschnitt des Stabes

und mit  $v'$  die Entfernung der Gleichgewichtsaxe von denjenigen Fasern, die am meisten zusammengedrückt werden. Vermöge des Druckes  $T$ , wofür die Werthe in § 449 u. folg. angegeben sind, werden die Fasern zunächst in der ganzen Ausdehnung des Querschnittes um den Bruch  $\frac{T}{E\omega}$  ihrer Länge zusammengedrückt. Durch die Biegung werden sodann die von der Gleichgewichtsaxe entferntesten Fasern um den Bruch  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  zusammengedrückt, was sich leicht nach § 77 und § 446 ergibt. Bezeichnet daher  $K'$  die grösste zulässige Belastung einer Faser, deren Querschnittsinhalt gleich der Einheit des Flächenmasses ist, so kann man die Gleichung setzen

$$\frac{K'}{E} = \frac{T}{E\omega} + v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds},$$

aus welcher sich die gesuchte Grenze finden lässt. Man beachte hierbei, dass der Werth, welchen man nach den vorhergehenden Formeln für  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  erhält, positiv oder negativ ausfallen muss, je nachdem für den Punkt, zu welchem dieser Werth gehört, der Winkel den die Normale der Curve mit der verticalen Axe der  $y$  bildet, in Folge der Biegung zu- oder abgenommen hat. Man darf aber hier auf das Vorzeichen dieser Grösse keine Rücksicht nehmen, sondern muss den absoluten Werth derselben dem absoluten Werthe von  $\frac{T}{E\omega}$  hinzufügen. Man wird sich ausserdem erinnern, dass  $T$  als positiv angesehen wurde, wenn es einen Druck (negativ hingegen, wenn es eine Spannung) bezeichnete. Findet man daher einen negativen Werth für  $T$ , so zeigt dies an, dass der Stab nicht zusammengedrückt, sondern ausgedehnt wird. Lässt sich nun der Querschnitt durch eine zur Biegungsebene normale Axe nicht in zwei symmetrische Hälften theilen, so muss  $v'$  den Abstand der Gleichgewichtsaxe (welche nach § 78 zu bestimmen ist) von der am meisten zusammengedrückten Faser bezeichnen, wenn  $T$  positiv; ist aber  $T$  negativ, so muss  $v'$  den Abstand der Gleichgewichtsaxe von der Faser bezeichnen, welcher am meisten ausgedehnt wird.



Endlich wird man die Summe der beiden absoluten Werthe von  $\frac{T}{Ew}$  und  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  als Function der Abscisse  $x$  ausgedrückt erhalten, und es ist klar, dass man denjenigen Werth von  $x$  zu nehmen hat, für welchen die Function so gross wird, wie es in der ganzen Ausdehnung der Curve möglich ist.

§ 476. Man nehme z. B. den in § 453 untersuchten Fall, wo ein Stab in parabolischer Form vertical von zwei Stützen getragen wird, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und die Belastung ein Gewicht  $2\Pi$  ist, welches im Scheitel des Stabes aufgehängt ist. Nach § 454 hat man

$$\frac{T}{Ew} = \frac{\Pi}{Ew} \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3} \right\}.$$

Aus § 447 folgt

$$\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{P}{\varepsilon} (a - x) + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ b - \frac{bx^2}{a^2} \right\},$$

wo man  $P$  durch  $-\Pi$  und  $Q$  durch den dafür in § 453 gegebenen Werth zu ersetzen hat. Man hat also

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v\Pi}{\varepsilon} \left\{ -\frac{7a}{32} - \frac{b^2}{28a} + x - \left[ \frac{25}{32a} - \frac{b^2}{28a^2} \right] x^2 \right\}.$$

Der Werth von  $T$  ist in der ganzen Ausdehnung der Curve positiv, so dass der Stab überall in der Richtung der Länge zusammen gedrückt wird. Der Werth von  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  ist zuerst negativ, wird darauf positiv und reducirt sich auf Null, wenn  $x = a$  wird. Ohne auf das Vorzeichen dieser Grösse Rücksicht zu nehmen, füge man sie dem Werthe von  $\frac{T}{Ew}$  hinzu, und, indem man die Werthe von  $v'$  und  $\varepsilon$  nach dem darüber in § 475 Gesagten ermittelt, bestimme man  $\Pi$  so, dass für alle zwischen 0 und  $a$  liegenden Werthe von  $x$  die Summe der Werthe von  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  und  $\frac{T}{Ew}$  die Grenze  $\frac{R}{F}$  nicht überschreite.

§ 477. Der in § 465 untersuchte Fall, wo ein ähnlicher Stab mit einem über seine Länge in der in § 463 angegebenen Weise vertheilten Gewichte  $2pa$  belastet ist, gehört mit zu den Gleichgewichtsfällen, welche in § 474 erwähnt sind.

§ 478. Bei einem Stabe, wie in § 455, mit kreisbogenförmiger Axe, dessen oberes Ende horizontal festgehalten wird, während an dem untern Ende eine Vertikalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken, hat man nach § 456

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{1}{E\omega} \{ -P \sin \varphi + Q \cos \varphi \};$$

und nach § 455,

$$v' \frac{d\varphi - d\psi}{ds} = \frac{v' A}{\varepsilon} \{ P(\sin \Phi - \sin \varphi) + Q(\cos \varphi - \cos \Phi) \}.$$

§ 479. Handelt es sich, wie in § 458, um einen Bogen in Form eines Halbkreises, der von zwei Stützen getragen wird, die den Enden nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und dessen Scheitel mit einem Gewichte  $2\Pi$  belastet ist, so hat man  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $P = -\Pi$ ,

$Q = \frac{2\Pi}{\pi}$ ; woraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{T}{E\omega} &= \frac{\Pi}{E\omega} \left\{ \sin \varphi + \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \right\} \\ v' \frac{d\varphi - d\psi}{ds} &= \frac{v' \Pi a}{\varepsilon} \left\{ \sin \varphi - 1 + \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke muss man auf das in § 475 Gesagte Rücksicht nehmen.

§ 480. Hat man, wie in § 466 einen Bogen von parabolischer Form, der ausser dem über seine Länge verbreiteten Gewichte  $2pa$  noch ein im Scheitel aufgehängtes Gewicht  $2\Pi$  trägt, so muss man den Werth von  $T$  nehmen, welcher in § 467 gegeben ist, und hätte demnach

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{1}{E\omega} \left\{ \frac{pa^2}{2b} + \frac{pbx^2}{a^2} + \Pi \left[ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^2} \right] \right\}.$$

Da aber die Biegung allein durch das Gewicht  $2\Pi$  hervorgebracht wird, so ist der Werth von  $v' \frac{d\varphi - d\psi}{ds}$  derselbe, welcher in § 476 gegeben ist, und muss daher auf dieselbe Weise angewandt werden.

§ 481. Handelt es sich, wie in § 472, um einen Stab in Form eines Kreisbogens, der an seinem obern Ende horizontal festgehalten wird und mit einem gleich-

förmig vertheilten Gewichte  $p$  für jede Längeneinheit belastet ist, während an dem entgegengesetzten Ende eine Verticalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken, so ist der Werth von  $T$  die Summe der Werthe, welche in § 456 und § 469 gegeben sind, so dass man für das Verhältniss, in welchem ein beliebiges Element der Curve zusammengedrückt wird, erhält

$$\frac{T}{Ew} = \frac{1}{Ew} \{ -pA(\Phi - \varphi) \sin \varphi - P \sin \varphi + Q \cos \varphi \}.$$

Der Werth des Ausdruckes  $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  ist auf gleiche Weise die Summe der Werthe, welche dafür in § 455 und § 468 gegeben sind, so dass man hat

$$\begin{aligned} v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} &= \frac{v' p A^2}{\varepsilon} \{ \cos \varphi - \cos \Phi - (\Phi - \varphi) \sin \varphi \} \\ &+ \frac{v' A}{\varepsilon} \{ P(\sin \Phi - \sin \varphi) + Q(\cos \varphi - \cos \Phi) \}. \end{aligned}$$

§ 482. Bei einem Bogen in Form eines Halbkreises, der von zwei Stützen getragen wird, die den Enden des Bogens nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und über dessen Länge ein Gewicht  $\pi p A$  vertheilt ist, setze man  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $P = -\frac{\pi p A}{2}$ ,  $Q = \frac{p A}{2}$ ; es ergibt sich dadurch

$$\begin{aligned} \frac{T}{Ew} &= \frac{p A}{Ew} \{ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \}, \\ v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} &= \frac{v' p A^2}{\varepsilon} \{ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \}. \end{aligned}$$

Für die Anwendung dieser Ausdrücke gilt wieder das in § 475 Gesagte.

### **Einfluss des Druckes oder der Spannung in der Axe der bogenförmigen Stäbe auf eine Veränderung ihrer Länge und ihrer Form.**

§ 483. In den verschiedenen Gleichgewichtsfällen, welche oben untersucht wurden, ist auch der Druck  $T$  angegeben, welchen die Längenelemente der Curve in der Richtung derselben erleiden. Dieser Druck hat eine Verkürzung der in § 446 u. folgd. als unveränderlich angenommenen Länge der genannten Elemente zur Folge,

und diese Verkürzung trägt nächst der Biegung mit dazu bei, die Gestalt des Stabes zu verändern. Da es sich aber nur um sehr kleine Veränderungen handelt, so kann man den Einfluss der Biegung und der Längenverkürzung einzeln berechnen, und von den erhaltenen Resultaten die Summe nehmen.

Man behalte die Benennungen aus § 446 bei und nenne  $s'$  die Länge des Bogens  $Am'$  (Fig. 86), welche

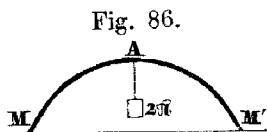


Fig. 86.

jetzt als verschieden von der Länge des Bogens  $Am$  angesehen wird. Die Verkürzung des Bogenelementes in dem Punkte  $m$ , welche der Druck in der Richtung des Elementes bewirkt, ist jetzt  $ds - ds'$  und die Verkürzung der Längeneinheit also  $\frac{ds - ds'}{ds}$ . Bezeichnet daher  $\omega$  den Querschnitt und  $T$  den Druck in der Richtung der Länge des Stabes für den Punkt  $m$ , so hat man

$$E\omega \frac{ds - ds'}{ds} = T;$$

woraus

$$s - s' = \frac{1}{E\omega} \int dx \cdot T \sqrt{1 + \left| \frac{dy}{dx} \right|^2},$$

aus welcher Gleichung sich die Längenveränderungen der einzelnen Theile des Stabes finden lassen. Da übrigens die Gestalt des Stabes (d. h. die Curve, welche die Axe desselben bildet) fast dieselbe bleibt, so wird man leicht die Verrückungen der Punkte auffinden können, welche sich aus diesen Längenveränderungen ergeben.

§ 484. Wir wollen z. B. den Fall aus § 453 untersuchen, wo ein Stab mit parabolischer Axe in verticaler Ebene von zwei Stützen getragen wird, die den Enden nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, während die Belastung ein im Scheitel aufgehängtes Gewicht  $2\eta$  ist. Setzt man  $\frac{2bx}{a^2}$  für  $\frac{dy}{dx}$ , und für  $T$  seinen Werth aus § 454, so wird aus der obigen Gleichung, wenn man sich auf die Glieder von der Ordnung  $\frac{b^2}{a^2}$  beschränkt,

$$s - s' = \frac{\Pi}{Ew} \int dx \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2} \right\},$$

oder

$$s - s' = \frac{\Pi}{Ew} \left\{ \frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2} \right\}.$$

Bezeichnet man die Totallänge der Theile  $AM$  oder  $AM'$  (Fig. 83) mit  $c$ , und die Länge, welche diese Theile in Folge des Druckes  $T$  annehmen, mit  $c'$ , so erhält man, wenn in der vorhergehenden Gleichung  $a = x$  gesetzt wird,

$$c - c' = \frac{\Pi}{Ew} \frac{25a^2}{32b} \left\{ 1 + \frac{216b^2}{175a^2} \right\}$$

als die Verkürzung, welche das Gewicht  $2\Pi$  bewirkt.

§ 485. Ist derselbe Stab mit einem über seine Länge vertheilten Gewichte  $2pa$  so belastet, wie es in § 442 angenommen wurde, so muss man für  $T$  den in § 441 gegebenen Ausdruck setzen. Aus der Gleichung in § 483 wird alsdann

$$s - s' = \frac{p}{Ew} \frac{a^2}{2b} \int dx \left\{ 1 + \frac{4b^2x^2}{a^4} \right\},$$

oder

$$s - s' = \frac{p}{Ew} \frac{a^2}{2b} \left\{ x + \frac{4b^2x^3}{3a^4} \right\};$$

woraus

$$c - c' = \frac{p}{Ew} \frac{a^3}{2b} \left\{ 1 + \frac{4b^2}{3a^2} \right\},$$

als die Totalverkürzung jeder Hälfte des Stabes.

§ 486. Ist endlich, wie in § 466, der Stab zu gleicher Zeit mit einem Gewichte  $2\Pi$  im Scheitel und mit einem über seine Länge vertheilten Gewichte  $2pa$  belastet, so wird die Verkürzung die Summe von denen sein, welche in den beiden vorhergehenden Paragraphen berechnet wurden. Man hat also

$$s - s' = \frac{p}{Ew} \frac{a^2}{2b} \left\{ x + \frac{4b^2x^3}{3a^4} \right\} + \frac{\Pi}{Ew} \left\{ \frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2} \right\},$$

$$c - c' = \frac{p}{Ew} \frac{a^3}{2b} \left\{ 1 + \frac{4b^2}{3a^2} \right\} + \frac{\Pi}{Ew} \frac{25a^2}{32b} \left\{ 1 + \frac{216b^2}{175a^2} \right\}.$$

§ 487. Die Senkung des Scheitels der Curve, welche in Folge der Verkürzung eintritt, lässt sich auf folgende Weise berechnen. Für eine Parabel hat man <sup>1)</sup>

$$c = a \left\{ 1 + \frac{1}{3.2} \left[ \frac{2b}{a} \right]^2 - \frac{1}{5.8} \left[ \frac{2b}{a} \right]^4 + \frac{1}{7.16} \left[ \frac{2b}{a} \right]^6 - \text{etc.} \right\},$$

$$\left\{ \frac{2b}{a} \right\}^2 = 6 \left\{ \frac{c-a}{a} + \frac{9}{10} \left[ \frac{c-a}{a} \right]^2 - \frac{54}{175} \left[ \frac{c-a}{a} \right]^3 + \text{etc.} \right\}.$$

Aus der Gleichung folgt

$$\frac{db}{dc} = \frac{3a}{4b} \left\{ 1 + \frac{2.9}{10} \cdot \frac{c-a}{a} - \frac{3.54}{175} \left[ \frac{c-a}{a} \right]^2 + \text{etc.} \right\}.$$

Ist daher  $c - c'$  eine kleine Aenderung der halben Länge  $c$  der Curve, und  $b - b'$  die entsprechende Aenderung der Pfeilhöhe  $b$ , so hat man sehr nahe, wenn man sich wieder auf die Glieder von der Ordnung  $\left\{ \frac{b}{a} \right\}^2$  beschränkt,

$$b - b' = \frac{3a}{4b} (c - c').$$

§ 488. Für den Stab mit kreisbogenförmiger Axe muss man die Gleichung in § 483 schreiben

$$s - s' = \frac{A}{Ew} \int d\varphi \cdot T,$$

und für  $T$  seinen Werth als Function des Bogens  $\varphi$  setzen, wie dies oben angegeben wurde.

§ 489. Um nun die Senkung des Scheitels zu ermitteln, welcher einer gegebenen Länge der Curve des Stabes entspricht, beachte man, dass

$$c = A\Phi = A \cdot \arcsin \frac{a}{A}.$$

$$b = A \cos \Phi = A \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right\};$$

1) Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 75. Es ist nämlich, wenn man den Scheitel als Ursprung und den Pfeil als Abscissenaxe ansieht,  $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \frac{dx}{dy} \frac{2by}{a^2}$ ,

$c = \int_0^a dy \sqrt{1 + \left\{ \frac{dx}{dy} \right\}^2} = \int_0^a dy \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{2b}{a} \right]^2 \cdot \frac{y^2}{a^2} - \frac{1}{8} \left[ \frac{2b}{a} \right]^4 \cdot \frac{y^4}{a^4} + \text{etc.} \right\}$   
woraus sich die erste Gleichung sofort ergibt. Die zweite Gleichung folgt dann leicht durch die gewöhnliche Umkehrung.

differentiirt man zuerst nach  $A$  und setzt nachher für  $\frac{a}{A}$  seinen Werth  $\sin\Phi$ , so erhält man

$$\frac{db}{dc} = \frac{1 - \cos\Phi}{\sin\Phi - \Phi \cos\Phi};$$

und daher

$$b - b' = \frac{1 - \cos\Phi}{\sin\Phi - \Phi \cos\Phi} (c - c'). \quad 1)$$

Ist der Winkel  $\Phi$  sehr klein, so stimmt diese Formel mit der in § 487 gegebenen überein.

### Versuche und Beobachtungen über den Widerstand einfacher Stäbe mit bogenförmiger Axe.

§ 490. Bei Versuchen, welche Duleau<sup>2)</sup> anstellte, wurde ein schmiedeiserner Stab von 0,06 Meter Breite und 0,02 Meter Höhe kalt in die Form eines Kreisbogens von 6,32 Meter Spannweite und 0,7 Meter Pfeilhöhe gebogen. Als dieser Stab darauf vertical zwischen zwei Stützen gestellt wurde, welche den Enden nicht erlaubten sich von einander zu entfernen, bewirkte das eigene Gewicht des Stabes keine merkliche Aenderung in der Gestalt desselben.

Als die Pfeilhöhe des Bogens gleich 0,709 Meter war und der Stab successive mit 20, 120, 220, 260 und 280 Kil. im Scheitel belastet wurde, senkte sich dieser Scheitel successive um 4, 34, 68, 89 und 112 Millimeter. Bei einer Belastung von 288 Kil. wurde der Stab völlig durchgebogen.

Bei einem andern Versuche war die ursprüngliche Pfeilhöhe gleich 0,694 Meter und bei einer successiven Belastung des Scheitels mit 50, 100, 150, 200 und

1) Man kann dieses Resultat auch auf folgende Weise finden. Es ist  
 $a = A \sin\Phi$  (eine Constante),  $da = \sin\Phi \cdot dA + \cos\Phi \cdot A d\Phi = 0$   
 $b = A(1 - \cos\Phi)$ ,  $db = (1 - \cos\Phi) dA + \sin\Phi \cdot A d\Phi$   
 $c = A\Phi$ ,  $dc = \Phi dA + A d\Phi$   
 Aus der Gleichung für  $da = 0$  folgt  $A d\Phi = -\tan\Phi \cdot dA$   
 $db = dA(1 - \cos\Phi - \sin\Phi \tan\Phi)$ ,  
 $dc = dA(\Phi - \tan\Phi)$ ,  
 $\frac{db}{dc} = \frac{1 - (\cos\Phi + \sin\Phi \tan\Phi)}{\Phi - \tan\Phi} = \frac{1 - \cos\Phi}{\sin\Phi - \Phi \cos\Phi}$ ,  
 wenn man den Bruch im Zähler und Nenner mit  $-\cos\Phi$  multiplicirt.

2) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 44.

250 Kil. senkte sich derselbe successive um 10, 22, 39, 57 und 92 Millimeter. Nachdem die Gewichte wieder fortgenommen waren, zeigte sich eine bleibende Senkung des Scheitels von 0,024 Meter. Die völlige Durchbiegung des Stabes erfolgte bei einer Belastung von 270 Kil., welche nicht ganz genau in der Mitte angebracht worden war.

Derselbe Stab stand auf dem Punkte, sich gänzlich durchzubiegen unter zwei Gewichten von 280 und 285 Kil., welche auf jeder Seite nach dem von den Enden aus gerechneten ersten Sechstel der Länge angebracht worden waren.

Derselbe Stab wurde bei einer ursprünglichen Pfeilhöhe von 0,696 Meter in dem Punkte, welcher nach dem ersten Viertel der Länge, von einem Ende aus gerechnet, liegt, successive mit einem Gewichte von 20 bis 100 Kil. belastet, wobei der genannte Punkt sich um 8 bis 45 Millimeter senkte. Der Scheitel der Curve stieg zuerst etwas, er senkte sich später, als die Belastung bis auf 150 Kil. gebracht war. Der Stab bog sich gänzlich durch unter einer Belastung von 177 Kilogramm.

§ 491. Bei den nach den Entwürfen des Colonel Emy ausgeführten gezimmerten Bogen, welche das Dach der Reitbahn in der Caserne zu Libourne tragen, ist das Hauptstück jedes Gespärres ein Bogen in Form eines Halbkreises mit 10,6 Meter Halbmesser. Diese Bogen tragen eine Last von 9333 Kil.<sup>1)</sup> Sie bestehen aus fünf Lagen von Bohlen aus Fichtenholz, welche so gebogen wurden, dass sich die einzelnen Bohlen dicht an einander legen mussten. Jede Bohle ist 0,135 breit und 0,054 Meter dick, und der Querschnitt der fünf Bohlen zusammen ist daher 36 450 Quadratmillimeter. In der Nähe der Anfänge des Bogens, wo der Druck am stärksten ist, erleidet demnach jeder Quadratmillimeter des Querschnittes einen Druck von  $\frac{4667}{36450} = 0,12$  Kilogramm.

1) Mémorial du génie, Nr. 12. Man sehe auch von Emy das Werk: Description d'un nouveau système d'arcs pour les grandes charpentes, Emy scheint anzunehmen, dass bei dem in Rede stehenden Systeme kein Horizontalschub stattfindet. Dies darf man indess nicht zugeben, wenn auch der Horizontalschub unter gewissen Umständen, wo er sehr schwach ist, keine merkliche Wirkung hervorbringen sollte.



### Siebentes Kapitel.

**Ueber die verschiedenen Formen, in denen einfache Stäbe bei Constructionen vorkommen. Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind.**

§ 492. Es wurde bisher angenommen, dass die Gestalt der Stäbe, mit denen wir uns beschäftigten, eine prismatische sei. Die Mehrzahl der Stäbe, welche bei Holzconstructionen vorkommen, hat wirklich eine solche Gestalt; bei den Eisenconstructionen aber, und besonders, wenn man Gusseisen anwendet, giebt man den Stäben diejenige Form, welche sich der Natur der Belastungen angemessen zeigt. Auf diese Weise erhält man eine gleiche Widerstandsfähigkeit bei einem geringern Aufwande von Material und Unkosten.

Die Dimensionen eines Stückes sind besonders aus der Untersuchung der Widerstandsfähigkeit gegen den Bruch zu bestimmen. Man wird in der That den Stücken eine solche Stärke geben müssen, dass die Ausdehnungen und Zusammendrückungen, denen die einzelnen Theile ausgesetzt sind, eine bestimmte Grenze nicht überschreiten können. Die Formeln für den Widerstand gegen den Bruch lassen sich hier anwenden, wenn man nur, in Uebereinstimmung mit dem siebenten Kapitel des ersten Abschnittes, einen passenden Werth für die Constante annimmt, welche das Maximum des Widerstandes repräsentirt, den die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes leisten können.

Die einfachste Form, welche man einem Stabe geben kann, ist die eines rechtwinkligen Prisma's. Diese Form lässt sich dadurch modificiren, dass man einen andern Querschnitt wählt; ohne dem Stabe seine prismatische Gestalt zu nehmen, oder dass man dem Querschnitte an den einzelnen Stellen der Länge des Stabes verschiedene Dimensionen giebt.

**Ueber die zweckmässigste Gestalt des Querschnittes.**

§ 493. Wir wollen zunächst den Fall untersuchen, in welchem die Kräfte rechtwinklig zur Längensaxe des Stabes wirken und die Richtung der Biegung daher bestimmt ist, wie z. B. bei einem horizontalen Stabe, der

mit Gewichten belastet ist. Nimmt man für den Querschnitt eine rechteckige Gestalt an, und nennt

$b$  die Breite,

$c$  die Höhe desselben, während

$E$  und  $R$  die dafür in § 77 und § 113 angegebenen Bedeutungen haben, so ist nach § 81 das Elasticitätsmoment

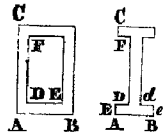
$$\varepsilon = E \frac{bc^3}{12},$$

und nach § 115 das Moment des Widerstandes gegen den Bruch

$$\rho = R \frac{bc^2}{6}.$$

Bleibt der Inhalt des Querschnittes derselbe, so nimmt der Widerstand proportional mit der Höhe  $c$  zu. Im Allgemeinen kann man aber nicht über eine gewisse Grenze hinaus die Höhe  $c$  vergrössern und die Breite  $b$  vermindern, weil der Stab nicht mehr die nöthige Stabilität besitzen und in der horizontalen Richtung einen gar zu geringen Widerstand leisten würde.

§ 494. Ohne die Querschnittsfläche und den Widerstand zu ändern, kann man dem Stabe eine grössere Stabilität dadurch geben, dass man für den Querschnitt die Gestalt eines hohlen Rechtecks (Fig. 87) oder zweier einander entgegengesetzter  $T$  (Fig. 88) wählt. Nennt man



$b$  die äussere Breite  $AB$ ,

$b'$  die innere Breite  $DE$  (Fig. 87)

oder die Summe der Breiten  $DE$ ,  $de$  (Fig. 88),

$c$  die äussere Höhe  $AC$ ,

$c'$  die innere Höhe  $DF$ ,

so ist das Elasticitätsmoment

$$\varepsilon = E \frac{bc^3 - b'c'^3}{12},$$

und das Moment des Widerstandes gegen den Bruch

$$\rho = R \frac{bc^3 - b'c'^3}{6c}.$$

Wäre der Querschnitt ein volles Rechteck und sollte es den beiden eben genannten Figuren an Inhalt und Wider-

stand gleichstehen, so müssten die Breite und die Höhe des Rechteckes respective gleich

$$\frac{(bc-b'c')^2c}{bc^3-b'c'^3} \text{ und } \frac{bc^3-b'c'^3}{(bc-b'c')c}.$$

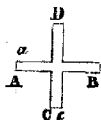
sein. Die in Fig. 87 und 88 dargestellten Querschnitte scheinen die passendsten zu sein, welche man in dem in Rede stehenden Falle wählen kann. Dabei scheint der erstere von den beiden Querschnitten noch etwas mehr Solidität zu gewähren, als der zweite; ist das Material aber Gusseisen, so ist es schwer, Röhren mit rechteckigem oder kreisförmigen Querschnitt fehlerfrei herzustellen. <sup>1)</sup>

§ 495. Handelt es sich um ein mit Gewichten belastetes Horizontalstück, welches der Last nach und nach seine verschiedenen Seiten darbieten muss, wie dies z. B. bei den Horizontalachsen der rotirenden Maschinen stattfindet, so hat man einen solchen Querschnitt zu wählen, dass der Widerstand des Stückes gegen die Biegung nach allen Richtungen gleich gross ist. Ein massiver Cylinder und ein cylindrisches Rohr haben offenbar diese Eigenschaft, und nach § 83 besitzen ein massives Prisma mit quadratischem Querschnitt und ein solches Rohr sie ebenfalls. <sup>2)</sup> Das Gleiche findet statt, wenn der Querschnitt eine solche Gestalt hat, wie sie Fig. 89 und 90 darstellt. Nennt man bei der ersteren Figur

1) Die einzelnen Theile solcher gusseiserner Röhren müssen fast gleiche Dimensionen erhalten, damit die bei der Abkühlung des Gusses stattfindende Contraction desselben keine Trennung der Theile veranlasse.

2) Ueber die passendste Form für rotirende Achsen findet man Untersuchungen in den practical Essays on mill-work von Buchanan mit Noten von T. Tredgold, 1823, Theil I, pag. 262, so wie in dem practical Essay on the strength of cast iron des Letzteren, 1824, pag. 59. Tredgold scheint den Kreis für den einzigen Querschnitt zu halten, welcher die Achsen befähigt, der Biegung in jeder Richtung einen gleichen Widerstand zu leisten. Dieser Irrthum hat darin seinen Grund, dass der genannte Ingenieur für den Widerstand gegen die Biegung denselben Ausdruck als Mass gelten lässt, welcher den Widerstand gegen den Bruch misst. Es ist schon angeführt, dass bei einem quadratischen Querschnitte der Widerstand gegen die Biegung in der Richtung der Seiten ebenso gross ist, wie in der Richtung der Diagonalen. Dasselbe gilt auch für jede andere Richtung, und die gleiche Eigenschaft besitzt eine Menge von Figuren, die sich durch eine symmetrische Combination des Kreises mit dem Quadrate bilden lassen. Hieraus muss man schliessen, dass bei den durch hervortretende Rippen verstärkten Achsen, welche die Engländer gefiederte Wellen (feathered shafts) nennen, wenn diese sich nicht so brauchbar zeigen, als massive Achsen mit quadratischem oder kreisförmigem Querschnitt, dies wahrscheinlich daher kommt, dass sie der Torsion nicht so gut widerstehen können, nicht aber in einem ungleichen Widerstande gegen die Biegung seinen Grund hat.

Fig. 89.



$b$  die äussere Dimension  $AB$  oder  $CD$   
 $\beta$  die Breite  $Aa$ ,  $Cc$  eines jeden der  
 Rechtecke, welche sich rechtwinklig  
 durchkreuzen,

so ist das Moment des Widerstandes gegen  
 die Biegung, und zwar für jede beliebige  
 Richtung,

$$\varepsilon = E \frac{b^3\beta + b\beta^3 - \beta^4}{12}.$$

Das Bruchmoment ist für die Richtung der Seiten der  
 Rechtecke

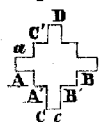
$$\rho = E \frac{b^3\beta + b\beta^3 - \beta^4}{6b};$$

und für die Richtung der Diagonale des Quadrates, dem  
 die Figur eingeschrieben werden kann,

$$\rho = R \frac{\sqrt{2}(b^3\beta + b\beta^3 - \beta^4)}{6(b+\beta)}.$$

§ 496. Nennt man in Fig. 90

Fig. 90.



$b$  die äussere Dimension  $AB$  oder  $CD$ ,  
 $b'$  die Dimension  $A'B'$  oder  $A'C'$ ,  
 $\beta$  die Breite  $Aa$ ,  $Cc$  der Rechtecke, welche  
 aus dem Quadrate heraustreten,

so ist das Moment des Widerstandes gegen  
 die Biegung für jede beliebige Richtung

$$\varepsilon = E \frac{b'^4 + (b^3 - b'^3)\beta + (b - b')\beta^3}{12}.$$

Das Bruchmoment ist für die Richtung der Seiten

$$\rho = R \frac{b'^4 + (b^3 - b'^3)\beta + (b - b')\beta^3}{6b};$$

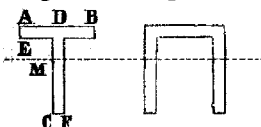
und für die Richtung der Diagonale,

$$\rho = R \frac{\sqrt{2}[b'^4 + (b^3 - b'^3)\beta + (b - b')\beta^3]}{6(b+\beta)}.$$

§ 497. Wir wollen jetzt ein Verticalstück unter-  
 suchen, dessen obere Endfläche belastet ist. Da die  
 Richtung der Biegung hier unbestimmt ist, so muss man  
 entweder ein Rohr mit kreisförmigem oder quadratischem  
 Querschnitt anwenden, oder auch eine von den in § 495  
 angegebenen symmetrischen Figuren als Querschnitt

wählen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass man sicher sei, dass die Kraft stets genau in der Richtung der Axe des Stabes wirken werde. Zuweilen geschieht es aber, dass die Kraft ein Bestreben hat, auf eine der Seitenflächen des Stabes zu wirken, wie dies z. B. bei den schief stehenden Stücken der Fall ist, welche als Streben dienen. Alsdann kann man einen der in Fig. 91

Fig. 91. Fig. 92.



u. 92 dargestellten Querschnitte wählen, von denen der erste häufig angewandt wird.

Man nenne

$b$  die Breite  $AB$  des Rechteckes, dem die Figur eingeschrieben ist;

$c$  die Höhe  $CD$  dieses Rechteckes;

$\beta$  die Dicke  $CF$  des Seitenstückes;

$\gamma$  die Dicke  $AE$  des Vorderstückes;

$z$  den Abstand  $DM$  der Vorderfläche  $AB$  von der Gleichgewichtsaxe, welche den Querschnitt der Fasern bildet, deren Länge durch die Biegung nicht verändert wird.

Bevor sich der Werth des Momentes des Widerstandes gegen die Biegung auffinden lässt, muss man nach Vorschrift der §§ 78 und 80 die Lage der Gleichgewichtsaxe ermitteln. Aus der in § 78 ausgesprochenen Bedingung folgt hier

$$bz^2 - (b - \beta)(z - \gamma)^2 = \beta(c - z)^2,$$

woraus

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{b\gamma^2 - \beta\gamma^2 + \beta c^2}{b\gamma - \beta\gamma + \beta c}.$$

Das Moment des Widerstandes gegen die Biegung ist nach der Formel in § 80

$$\varepsilon = \frac{E}{8} [bz^3 - (b - \beta)(z - \gamma)^3 + \beta(c - z)^3],$$

in welche Formel man für  $z$  seinen eben angegebenen Werth zu setzen hat.

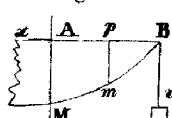
Beachtet man, dass die in § 113 mit  $v'$  bezeichnete Entfernung hier gleich  $CM$  oder  $c - z$  ist, so ist nach dem genannten Paragraphen der Werth des Bruchmomentes

$$\rho = \frac{R}{8} \cdot \frac{bz^3 - (b - \beta)(z - \gamma)^3 + \beta(c - z)^3}{c - z}.$$

## Ueber die zweckmässigste Gestalt des Längenschnittes.

§ 498. Bei einem prismatischen Stabe giebt es im Allgemeinen eine Stelle in der Länge desselben, welche dem Bruche mehr ausgesetzt ist, als alle übrigen. Leistet der Stab an dieser Stelle einen ausreichenden Widerstand, so ist er an allen übrigen Stellen stärker, als es nothwendig ist. Es lässt sich nun die Gestalt eines Stabes so bestimmen, dass der Widerstand überall genügend, und nirgend überflüssig gross wird, und einen Stab, dessen Gestalt so bestimmt worden ist, nennt man einen Körper von gleichem Widerstande. Einige Beispiele werden hinreichen, um zu zeigen, wie solche Untersuchungen zu führen sind, da diese keine Schwierigkeiten darbieten.

Es stelle Fig. 93 einen Körper vor, dessen eines Ende horizontal festgehalten wird,



während an dem andern Ende ein Gewicht  $P$  wirkt; die beiden Seitenflächen werden von zwei Verticalebenen und die obere Endfläche von einer Horizontalebene gebildet.

Man nenne

- $a$  die Länge  $AB$  des Körpers;
- $b$  die Breite desselben;
- $c$  die Höhe  $AM$  des festgehaltenen Endes;
- $x$  und  $v$  die Abscisse  $Bp$  und die Ordinate  $pm$  der Curve  $BM$ , welche den Körper nach unten begrenzt, und

$R$  behalte die dafür in § 113 angegebene Bedeutung. Um die Höhe des Körpers  $AM$  zu bestimmen, hat man zuerst

$$R \frac{bc^2}{6} = Pa, \text{ woraus } c = \sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}.$$

Um die Gestalt der Curve  $BmM$  zu bestimmen, hat man sodann

$$R \frac{bv^2}{6} = Px, \text{ woraus } v^2 = \frac{c^2 x}{a};$$

diese Curve ist also eine Parabel, deren Axe  $BA$  ist.

§ 499. Wollte man die Gestalt kennen, welche der Körper  $ABM$  annehmen wird, wenn er sich unter dem

Gewichte  $P$  biegt, so verfähre man, wie folgt. Das Moment des Widerstandes gegen die Biegung ist hier für einen beliebigen Querschnitt  $pm$

$$\epsilon = E \frac{bv^3}{12} = E \frac{bc^3 x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man also, wie in § 85, mit  $y$  die Ordinate der Curve, welche die Axe des Körpers nach der Biegung bildet, so hat man für die Gleichgewichtsgleichung

$$E \frac{bc^3 x^{\frac{1}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = Px,$$

woraus folgt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E} \frac{12a^{\frac{3}{2}}}{bc^3 x^{\frac{1}{2}}},$$

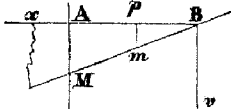
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E} \frac{24a^{\frac{3}{2}}}{bc^3} \left\{ x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$y = \frac{P}{E} \frac{24a^{\frac{3}{2}}}{bc^3} \left\{ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} \right\},$$

$$f = \frac{P}{E} \frac{8a^3}{bc^3}.$$

Dieser Werth von  $f$  oder die Senkung des Endpunktes  $B$  ist doppelt so gross, als derjenige, welcher stattfinden würde, wenn alle Querschnitte des Körpers dieselbe Höhe  $c$  hätten.

Fig. 94.



§ 500. Bei einem Körper (Fig. 94), über dessen Länge ein Gewicht gleichförmig vertheilt ist, hat man, wenn die früheren Benennungen beibehalten werden und  $p$  das Gewicht

genannt wird, welches die Längeneinheit trägt,

$$R \frac{bc^2}{6} = pa \cdot \frac{a}{2}, \quad \text{woraus } c = a \sqrt{\frac{3p}{Rb}};$$

ferner

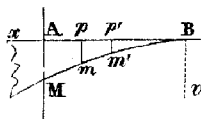
$$R \frac{bv^3}{6} = px \cdot \frac{x}{2}, \quad \text{woraus } v = \frac{cx}{a}.$$

Der Körper wird nach unten von einer Ebene begrenzt.

§ 501. Besteht die Belastung des Körpers (Fig. 95)

Fig. 95.

nur in dem eigenen Gewichte desselben, und nennt man



$\rho$  das Gewicht einer Volumeneinheit des Körpers;

$x$  die Abscisse  $Bp$ , zu welcher die Ordinate  $v$  gehört;

$x'$  die Abscisse  $Bp'$  eines beliebigen Punktes zwischen  $B$  und  $m$ , zu welcher die Ordinate  $v'$  gehört;

so hat man

$$\rho \int_0^x dx' (x - x') v' = R \cdot \frac{v^2}{6}.$$

Differentiirt man zweimal nach einander nach  $x$ , so erhält man

$$\rho \int_0^x dx' \cdot v' = \frac{R}{6} \frac{dv^2}{dx}, \quad \rho v = \frac{R}{6} \cdot \frac{d^2 v^2}{dx^2},$$

und das Integral hiervon ist

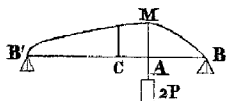
$$v = \frac{\rho x^2}{2R};$$

die Curve  $BM$  ist also eine Parabel, deren Axe  $Bv$  ist.

Dieselben Fragen wird man leicht auflösen, wenn die Querschnitte sämtlich Kreise sind, deren Mittelpunkte sich auf derselben Horizontallinie befinden; wenn die Querschnitte sämtlich ähnliche Rechtecke sind; wenn das Gesetz für die Breiten und Höhen solcher Rechtecke gegeben ist; u. s. w.

§ 502. Wir wollen ferner einen Körper (Fig. 96) untersuchen, der horizontal auf zwei Stützen gelegt und in  $M$  mit einem Gewichte  $2P$  belastet ist. Nennt man

Fig. 96.



$b$  die Breite des Körpers;

$c$  die Höhe  $AM$  in dem Punkte, wo das Gewicht aufgehängt ist;

$a$  die halbe Entfernung  $CB$  der beiden Stützen von einander;

$z$  die Entfernung  $AC$ ;

so hat man

$$R \frac{b c^2}{6} = P \frac{a^2 - z^2}{a}, \quad \text{woraus } c = \sqrt{\frac{6P(a^2 - z^2)}{Rab}};$$



und die beiden Curventheile  $BM$ ,  $BM$  werden zu zwei Parabeln gehören, deren Axe mit der Geraden  $BB'$  zusammen fällt.

§ 503. Soll unter der Voraussetzung, dass das Gewicht  $2P$  in einem beliebigen Punkte der Strecke  $BB'$  aufgehängt werde, der Körper stets den nöthigen Widerstand leisten, so muss die Ordinate der Curve, welche den Körper nach oben begrenzt, überall dem obigen Ausdrücke für  $c$  Genüge leisten. Dieser Ausdruck entspricht einer Ellipse, deren kleine Axe gleich  $\sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}$  ist, und da diese Ellipse die einhüllende Curve für die Parabeln ist, welche den Körper nach oben begrenzen, wenn das Gewicht  $2P$  in einem bestimmten Punkte der Länge aufgehängt ist, so wird ein nach dieser Ellipse profilirter Körper an allen Stellen, mit Ausnahme dieses einen Punktes, einen Ueberschuss an Widerstand darbieten.

§ 504. Wir wollen ferner einen Körper (Fig. 97)

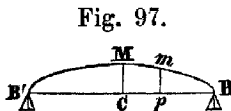


Fig. 97.

untersuchen, der horizontal auf zwei Stützen gelegt und mit über seine Länge gleichförmig vertheilten Gewichten belastet ist.

Man nenne

$p$  das Gewicht, welches von der Einheit der Länge getragen wird;

$a$  die halbe Entfernung  $BC$  der Stützen von einander;

$b$  die constante Breite des Körpers;

$c$  die Höhe  $CM$  des Körpers in der Mitte zwischen den beiden Stützen;

$x, v$  die Abscisse  $Cp$  und die Ordinate  $pm$  der Curve, welche den Körper nach oben begrenzt,

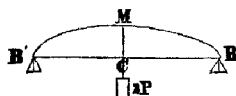
und beachte, wie in § 90, dass jede Hälfte des Körpers einen eben solchen Widerstand leistet, wie ein Stab, der an einem Ende horizontal festgehalten wird, während am andern Ende eine Verticalkraft  $pa$  und über die ganze Länge des Stabes vertheilt eine entgegengesetzt gerichtete Kraft  $pa$  wirkt. Man hat alsdann

$$R \frac{bc^2}{6} = \frac{1}{2} pa^2, \quad \text{woraus} \quad c = a \sqrt{\frac{3p}{Rb}};$$

$$R \frac{bv^2}{6} = pa(a-x) - \frac{1}{2}p(a-x)^2, \quad v = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Die Curve  $BMB'$  muss also eine halbe Ellipse sein.  
§ 505. Trägt der Körper ausser dem über seine Länge gleichförmig vertheilten Gewichte noch ein Gewicht

Fig. 98.



2P, welches in der Mitte zwischen den beiden Stützen aufgehängt ist (Fig. 98), so hat man, wenn man die früheren Benennungen beibehält,

$$R \frac{bc^3}{6} = \frac{1}{2}pa^2 + Pa,$$

$$R \frac{bv^2}{6} = (pa + P)(a-x) - \frac{1}{2}p(a-x)^2,$$

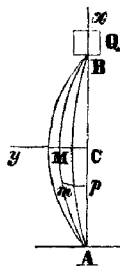
woraus

$$c = \sqrt{\frac{3a(pa + 2P)}{Rb}},$$

$$v = c \sqrt{\frac{[p(a+x) + 2P](a-x)}{(pa + 2P)a}}.$$

§ 506. Wir wollen ferner ein Verticalstück (Fig. 99), dessen oberes Ende mit einem Gewichte  $Q$  belastet ist, unter der Voraussetzung untersuchen, dass sämtliche Querschnitte des Körpers Kreise seien. Man nenne

Fig. 99.



$a$  die halbe Länge  $AC$  oder  $BC$  des Körpers;

$x, y$  die Abscisse  $Cp$  und die Ordinate  $mp$  der Curve  $AMB$ , welche die Axe des Körpers (in Folge der Biegung) bildet;

$f$  den Pfeil  $CM$  dieser Curve;

$r$  den Halbmesser des Querschnittes in  $m$ .

Nimmt man an, dass der Körper nur eine sehr geringe Krümmung habe, wenn er kurz vor dem Bruche ist, so lässt sich die Untersuchung vereinfachen, wenn man die Curve welche der Körper bildet, als eine Parabel ansieht, deren Gleichung

$$y = f \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}.$$

ist. Die Gleichgewichtsgleichung ist alsdann

$$R \frac{\pi r^3}{4} = Qy, \text{ oder } r^3 = \frac{4Qy}{\pi R} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Man hat also einen Körper von gleichem Widerstande, wenn  $r$  der Grösse  $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  proportional ist. Der Durchmesser der Querschnitte nimmt dann ab von der Mitte aus nach den beiden Enden hin, und diese Letzteren müssen in eine Spitze auslaufen.

§ 507. Es kann in der Praxis oft von Nutzen sein, sich den Formen zu nähern, in welchen die Körper von gleichem Widerstande sind, wenn man den Extremitäten der Stücke eine genügende Stärke gegeben hat. Hauptsächlich ist dies beim Gusseisen und bei allen solchen Stücken der Fall, gegen deren Längensaxe die Kraft rechtwinklig wirkt. Bei solchen Stücken, die in der Richtung ihrer Länge zusammengedrückt werden, ist es gut, ihnen in der Nähe der Mitte eine grössere Dicke zu geben, wenn die Länge im Verhältniss zur Dicke beträchtlich ist, doch müssen auch die Enden stets eine solche Stärke erhalten, dass sie von dem Drucke nicht zerquetscht werden können. In vielen Fällen ist es sogar vortheilhaft, den Enden die Form einer Säulenbasis (*embase*) zu geben, welche die Wände berühren muss, zwischen denen sich der Körper befindet. Eine solche Einrichtung strebt, dem Körper jenen Ueberschuss an Widerstand zu geben, welchen er (nach § 393) leisten würde, wenn die Enden eingemauert wären.

#### Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind.

§ 508. Besteht ein Stück aus mehreren Theilen, so hängt die Grösse des Widerstandes von der Art ab, in der die Theile mit einander verbunden sind.

Wir untersuchen zunächst eine Verbindung von mehreren über einander gelegten Stäben (Fig. 100)

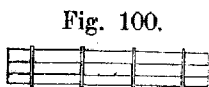


Fig. 100.

unter der Voraussetzung, dass diese durch eiserne Bänder so zusammengehalten werden, dass sie bei der Biegung fortwährend mit einander in Berührung bleiben, obwohl sie sich über einander verschieben können. Der Widerstand eines solchen Sy-

stemes ist gleich der Summe der Widerstände, welche die einzelnen Stäbe leisten. Ist daher der Querschnitt der Stäbe rechteckig, und nennt man

$b$  die gleiche Breite der über einander gelegten Stäbe;

$c$  die Höhe jedes einzelnen Stabes;

$n$  die Anzahl der Stäbe, und behalten

$\varepsilon$  und  $\rho$  die dafür in § 80 und § 113, so wie

$E$  und  $R$  die dafür in § 77 und § 113 angegebenen Bedeutungen;

so hat man (nach § 81) für das Moment des Widerstandes gegen die Biegung

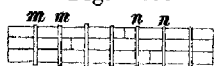
$$\varepsilon = nE \frac{bc^3}{12};$$

und (nach § 115) für das Bruchmoment,

$$\rho = nR \frac{bc^2}{6}.$$

Es ist hier von der Wirkung der Reibung abgesehen, welche durch die Kraft entsteht, mit der die Stäbe während der Biegung gegen einander gepresst werden. Für den Widerstand des Systemes ist es gleichgültig, ob die Stäbe in der Richtung der Biegung über einander oder neben einander liegen.

§ 509. Besteht die eben untersuchte Verbindung aus Stäben, die in der Richtung der Länge in mehrere Theile zerfallen (Fig. 101), so muss man das Widerstandsmoment gegen die Biegung



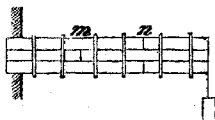
als in den einzelnen Theilen verschieden ansehen. Für den Theil  $mm$  ist das Widerstandsmoment

gegen die Biegung gleich der Summe der Momente der drei über einander gelegten Stäbe; für den Theil  $nn$  ist es nur die Summe der Momente von zweien dieser Stäbe. So viel es möglich ist, sind die Stösse so anzubringen, dass nicht mehrere in eine Ebene fallen; und ist dies geschehen, so kann man den Biegungs- oder Bruchwiderstand des Systemes, als die Summe der Widerstände sämmtlicher Stäbe, mit Ausnahme von einem, ansehen.

In einigen Fällen kann man sogar, bei passender Anordnung der Stösse, den Widerstand des Systemes

als der Summe der Widerstände der über einander gelegten Stäbe gleich annehmen. Ist z. B. der Körper, welchen Fig. 102 darstellt und der aus drei über ein-

Fig. 102.

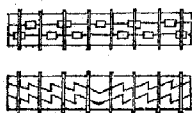


ander gelegten Stäben besteht, mit dem einen Ende eingemauert und an dem andern Ende belastet, so ist der Widerstand in dem Befestigungspunkte gleich der Summe der Widerstände der drei Stäbe.

In den Punkten  $m$  und  $n$ , die in dem ersten und zweiten Drittheil der Länge liegen mögen, ist der Widerstand des Systemes respective nur zwei und ein Drittheil des vorigen; da aber die Wirkung des Gewichtes  $P$ , um eine Biegung oder den Bruch in diesen Punkten zu erzeugen, auch respective nur zwei und ein Drittheil von der Wirkung dieses Gewichtes auf den Befestigungspunkt beträgt, so ist der Widerstand des Systemes überall wenigstens eben so gross, wie in diesem Punkte. Die Theile des obern und untern Stabes, welche jenseit des Punktes  $n$  liegen, könnten offenbar fortgelassen werden, ohne den Widerstand zu schwächen, welchen das System dem Bruche entgesetzt.

§ 510. Sind mehrere über einander gelegte Stäbe (Fig. 103) durch eine Verzahnung oder durch Keile mit einander verbunden und werden sie durch eiserne Bänder

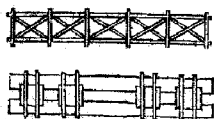
Fig. 103.



kräftig zusammen gehalten, so wird der Widerstand, den eine solche Verbindung der Biegung oder dem Bruche entgesetzt, nicht merklich von dem Widerstande abweichen, den ein einzelner Stab mit denselben Dimensionen leisten würde.

§ 511. Sind zwei einzelne Stäbe (Fig. 104) so mit einander verbunden, dass eine Linie, welche man vor

Fig. 104.



der Biegung normal zur Länge zieht, nach der Biegung eine gemeinschaftliche Normale für die beiden Curven ist, welche die Stäbe dann bilden, so findet man den Widerstand des Systemes, wenn man von dem Biegemomente des als massiv be-

trachteten Körpers das Biegemoment eines zwischen den beiden Stäben liegenden Körpers abzieht. Nennt man daher

$b$  die gleiche Breite der beiden Stäbe;

$c_1$  die Höhe der Verbindung;

$c_2$  die Höhe des Raumes zwischen den beiden Stäben;

so erhält man für das Moment des Widerstandes gegen die Biegung

$$\epsilon = E \frac{b(c_1^3 - c_2^3)}{12},$$

und für das Bruchmoment

$$\rho = R \frac{b(c_1^3 - c_2^3)}{6c_1}.$$

Bei einer parallelen Lage der beiden Stäbe lässt sich die Hypothese, auf welche sich die gegebenen Formeln stützen, nur dann erfüllen, wenn die Stäbe durch eine Reihe von Querstücken und Andreaskreuzen, oder durch Keile, welche in Einschnitten liegen, mit einander verbunden sind. Fig. 104 stellt diesen Fall dar. Ist aber der eine der Stäbe bogenförmig, Fig. 105,

Fig. 105.



oder sind sie es beide, so genügt, um die obigen Formeln anwenden zu können, eine Verbindung mittelst einfacher Querstücke, wenn die Stäbe nur an ihren Enden so verbunden werden, dass sie nicht auf einander

gleiten können.<sup>1)</sup> Vorthailhaft wird es sein, in den einzelnen Fällen die Krümmung der Stäbe nach den in dem vorhergehenden Kapitel entwickelten Principien so zu bestimmen, dass das System von gleichem Widerstande wird.

§ 512. Bei den in Fig. 104 und 105 dargestellten Systemen erleidet der Stab, welcher sich auf derjenigen Seite befindet, die bei der Biegung concav wird, nur einen Druck in der Richtung seiner Längsaxe, und man kann ihn daher durch mehrere Theile ersetzen, welche mit ihren Enden so zusammenstossen müssen, dass sämtliche Theile in der Verlängerung jedes einzelnen liegen. Dasselbe gilt für den Stab, welcher sich auf der Seite befindet, die bei der Biegung convex

<sup>1)</sup> Dies ist nur richtig, wenn starke gebogene Balken durch kurze Klütze von einander getrennt sind.

wird, und welcher einem Zuge in der Richtung seiner Längsaxe zu widerstehen hat, wenn die Theile nur so mit einander verbunden werden, dass die Verbindung derselben einen eben so grossen Widerstand leistet, als der Stab selbst. Eine solche Zertheilung des obern und untern Stabes wird den Widerstand des Systemes nicht merklich schwächen.

§ 513. Ist die Natur der Kräfte bekannt, welche auf die einzelnen Stücke einer Verbindung dieser Art wirken, so kann man für jeden Theil das vortheilhafteste Material wählen. Die Wahl wird durch die Bedingung bestimmt, einen gegebenen Widerstand bei möglichst geringen Kosten zu erhalten. Hält man die respectiven Widerstände des Guss- und Schmiedeisens gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung mit den Preisen dieser Materialien zusammen, so wird man finden, dass es stets vortheilhaft ist, für solche Stücke, welche eine Zusammenrückung erleiden, Gusseisen, hingegen für solche Stücke, welche eine Ausdehnung erleiden, Schmiedeisen zu nehmen. Diese Anordnung bietet auch eine grössere Sicherheit, wenn die Construction Stössen ausgesetzt ist, da das Schmiedeisen oft eine plötzliche Ausdehnung erleiden kann, ohne zu zerreißen, welche Eigenschaft das Gusseisen fast gänzlich entbehrt.

Eichen- oder Tannen- (Fichten-) Holz kommt bei demselben Widerstande gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung billiger zu stehen, als Schmied- oder Gusseisen; auch hat es weniger von der Wirkung der Stösse zu fürchten, aber es steht dem Eisen an Dauer nach, wenn die Feuchtigkeit darauf einwirken kann.

§ 514. Man hat oft vorgeschlagen, die Holzverbindungen durch Eisenarmirungen zu verstärken. Wirkt der Druck rechtwinklich gegen die Länge des Stabes, so ist die beste Anordnung die, wenn in die Seitenflächen des Stabes eine Eisenverbindung eingelassen wird, welche aus einem bogenförmigen und einem geraden Stücke besteht, wobei die Enden des Bogens sich gegen Vorsprünge an den Enden des geraden Stückes stützen.

Fig. 106.



(Fig. 106). Eine ähnliche Eisenverbindung kann auch zwischen zwei neben einander gelegte und durch Bolzen verbundene Balken

eingelassen werden. Nimmt man an, dass die Berührung, welche zwischen den einzelnen Punkten des Eisens und denen des Holzes stattfindet, während der Biegung genau in denselben Verhältnissen fort dauere, oder hat man zur grössern Sicherheit die Eisenverbindungen durch Querstücke, wie in Fig. 105, verstärkt, so kann man den Widerstand des ganzen Systemes als die Summe der Widerstände ansehen, welche der Balken und die Armirung einzeln leisten würden. Das gerade Stück muss stets von Schmiedeeisen sein; aber für den Bogen ist es vorthellhaft, Gusseisen zu nehmen.

**Versuche über den Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind.**

§ 515. Bei einem von Aubry <sup>1)</sup> angestellten Versuche wurde ein Stab aus Eichenholz von 1 Zoll Breite und  $2\frac{1}{2}$  Zoll Höhe horizontal auf zwei Stützen gelegt, deren Entfernung von einander 5 Fuss betrug, und sodann in der Mitte belastet. Dieser Stab brach unter einem Gewichte von 755 Pfd., nachdem er sich 2 Zoll durchgebogen hatte.

Ein anderer Stab aus demselben Holze, von 1 Zoll Breite und 2 Zoll Höhe, bestand aus drei Theilen, die von 6 zu 6 Zoll bis 3 Linien tiefe Einschnitte (Verzahnungen) hatten und durch zwei Bolzen von  $1\frac{1}{4}$  Linien im Durchmesser zusammen gehalten wurden. Die Unterstützung und Belastung war mit dem vorigen Stabe übereinstimmend. Der Bruch erfolgte unter einem Gewichte von 475 Pfd., nachdem sich der Stab um 3 Zoll 2 Linien durchgebogen hatte.

§ 516. Die Versuche von Dulcau <sup>2)</sup> haben die folgenden Resultate geliefert. Die Stäbe, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden, waren sämmtlich 0,06 Meter breit und durch Bolzen mit einander verbunden, welche 0,02 Meter im Durchmesser hielten und in Zwischenräumen von 0,4 Meter angebracht waren. Aus den directen Versuchsergebnissen ist die Durchbiegung jeder Verbindung unter einer Belastung von 10 Kil. berechnet.

1) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, pag. 65.

2) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 40.



Bezeichnung der Verbindung	Ent- fernung der Stützen von einander	Totalhöhe der Verbindung	Lichte Höhe zw- ischen den beiden Stäben	Grösse der Durchbie- gung
	Meter	Millimeter	Millimeter	Millimeter
Zwei Stäbe aus Perigord- eisen, flach aufeinander gelegt und ohne Bolzen	2	21,1	0	7
Desgl., flach auf einander gelegt und verbolzt. . .	4	21	0	11,5
Desgl., durch Keile um 0,011 Meter aus einander gehalten und durch Bolzen verbunden . . .	4	32	11	4,57
Desgl., auf dieselbe Weise um 0,021 Meter aus ein- ander gehalten . . . .	4	42	21	2,6
Desgl., auf dieselbe Weise um 0,032 Meter aus ein- ander gehalten . . . .	4	53	32	1,8
Desgl., durch Kreuze um 0,153 Meter aus einander gehalten . . . . .	5,8	174	153	0,275
Zwei Stäbe aus Perigord- eisen, aufeinandergelegt und verbolzt . . . . .	4	40	0	2,2

Der Biegungswiderstand des Systemes mit den Kreuzen weicht wenig von dem Werthe ab, den man nach der Formel in § 511 finden würde. Bei den nur durch Bolzen mit einander verbundenen Stäben ist der Widerstand geringer, und um so mehr, je grösser die lichte Weite zwischen den Stäben ist; der Grund für diese Erscheinung muss in der Biegung der Bolzen gesucht werden. <sup>1)</sup>

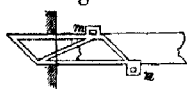
**Ueber die Eisenconstructions, welche zur Verlängerung der Stäbe oder zur Verbindung solcher Stäbe dienen, die in derselben Längenrichtung liegen.**

§ 517. Wir wollen zunächst solche Stäbe betrachten, gegen deren Länge die einwirkenden Kräfte rechtwinklig

1) Einige, den vorhergehenden analogen Versuche findet man in dem vierten Bande von Rondelet's Art de bâtir, pag. 529. Auch Barlow hat in seinem Essay on the strength and stress of timber, pag. 496 einige Versuche an Modellen von verstärkten Balken mitgetheilt.

gerichtet sind. Diese lassen sich auf durchaus solide Weise verlängern oder mit einander verbinden, während sie in derselben Längenrichtung liegen, wenn man auf die zusammenstossenden Enden zweier Stäbe ein kurzes Rohr schiebt und es darauf gut befestigt. Da aber die innere Wand des Rohres nicht in ihrer ganzen Ausdehnung einen Druck erfahren würde, so kann man einen Theil des Rohres weglassen und einfachere, jedoch auf demselben Principe beruhende Mittel anwenden. So können z. B. Hölzer, deren Enden horizontal eingemauert werden sollen, in der Einmauerung dadurch verlängert werden, dass man an jeder der beiden (verticalen)

Fig. 107.



Seitenflächen derselben eine Armierung aus Gusseisen (Fig. 107) anbringt, und in *m* und *n* den nöthigen Verband durch Querstücke bewirkt. Zwischen diesen Querstücken und der obern und untern Seite der Hölzer muss mittelst dazwischen getriebener Keile oder mittelst Druckschrauben eine starke Spannung hergestellt werden. Bei einer solchen Anordnung kann der Bruch nur oberhalb des Querstückes *n* erfolgen, wenn die Hölzer einem von oben nach unten gerichteten Drucke nachgeben sollten.

Die Armierung, welche Fig. 108 darstellt, lässt sich zur Verlängerung von Hölzern anwenden, an deren einem

Fig. 108.



Ende ein Gewicht aufgehängt werden soll, und in umgekehrter Lage kann man dieselbe Armierung zu den Enden eines Balkens gebrauchen; dies Letztere kann oft mit Nutzen geschehen, wenn solche Balken ausgebessert werden sollen, bei denen die Enden verfault sind.

Endlich kann man die in Fig. 109 dargestellte Armierung anwenden, um zwei Hölzer mit den Enden zusammenzufügen, oder um einen Balken zu consolidiren,

Fig. 109.



der unter der Belastung zerbrochen ist. In dem letzteren dieser beiden Fälle ist man aber eines guten Erfolges nicht so sicher, als in dem ersteren, weil in dem letzteren Falle die Armierung da angebracht werden muss, wo der Balken die Neigung zu der

grössten Krümmung hat, wodurch eine vollkommenere Berührung zwischen dem Balken und der Armirung nöthig wird, wenn keine merkliche Biegung eintreten soll.<sup>1)</sup>

Bei derartigen Constructionen lässt sich der Widerstand der Armaturen nach § 511 berechnen. Die Flächen, auf welche der Druck wirkt, müssen eine hinreichende Ausdehnung besitzen, damit das Holz an diesen Stellen nicht zerdrückt werde. Der Werth des Druckes wird sich immer leicht berechnen lassen. In dem Falle der Fig. 107 muss z. B. der Druck in  $m$  den Gewichten, mit denen der Stab belastet ist, gegen eine Drehung um den Punkt  $n$  das Gleichgewicht halten, und in  $n$  ist der Druck die Summe aus der Belastung des Stabes und den in  $m$  stattfindenden Drucke.

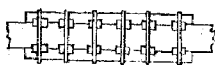
§ 518. Die Theile eines Balkens, der einer Biegung nach unten ausgesetzt ist, können auch auf die in

Fig. 110.



Fig. 110 angegebene Weise mittelst eines darunter gelegten Stückes in Verband sein, wobei durch Keile von hartem Holze, welche in Einschnitten liegen, und durch herumgelegte eiserne Schienen dies Stück mit den Theilen des Balkens verbunden wird. Denn, da während der Biegung die Fasern in dem obern Theile *am* des Querschnittes zusammengedrückt, und in dem untern Theile *an* ausgedehnt werden, so schadet die Fuge *mn* dem Widerstande der Fasern, welche zusammengedrückt werden, nicht, und der Widerstand der zerschnittenen Fasern, welche ausgedehnt werden würden, findet sich durch den Widerstand des darunter gelegten Stückes ersetzt. Die Stärke dieses Stückes lässt sich aus der Bedingung bestimmen, dass das Widerstandsmoment seiner Fasern in Bezug auf die Gleichgewichtsaxe *a* gleich sein muss dem auf dieselbe Axe bezogenen Momente der durchschnittenen Fasern, welche in dem Intervalle *an* liegen.

Fig. 111.

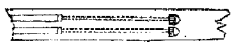


§ 519. Hölzer, von welchen die einen in der Verlängerung der andern liegen, und die einen Zug in der Richtung ihrer Länge ertragen müssen, lassen sich auf die in Fig. 111

1) Ein Verfahren, die verdorbenen Enden von Balken zu consolidiren, findet man auch in den Transactions of the society of arts and manufactures, 1820. Man sehe auch den Jahrgang 1824 derselben Sammlung, oder das Bulletin de la société d'encouragement, Juin 1825.

angebene Weise mittelst seitlich angelegter Stücke verbinden, die durch Keile und eiserne Schienen befestigt werden. Man kann auch eiserne Anker anwenden, die entweder in das Holz eingelassen Fig. 112, oder ausser-

Fig. 112.



halb befestigt werden. In allen Fällen findet an der Verbandstelle eine Schwächung der Hölzer statt, da durch die Einschnitte die Querschnittsfläche vermindert wird. Der Widerstand der Anker muss demjenigen gleich sein, welcher dem Holze noch bleibt, und die Holztheile, gegen welche die Anker fassen, müssen eine hinreichende Oberfläche haben, damit weder sie zerdrückt werden können, noch ihre Parallelcohäsion mit den nebenliegenden Fasern aufgehoben werden könne.

#### Achtes Kapitel.

##### Die einfachsten Holzconstructions, welche zum Tragen und Aufziehen von Lasten dienen.

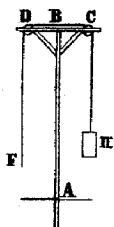
§ 520. Die Theile einer Holzconstruction sind der Einwirkung verschiedenartiger Kräfte ausgesetzt, und sie müssen der Biegung und dem Bruche auf eine unendlich verschiedene Weise widerstehen. In den vorhergehenden Kapiteln sind die einfachsten Gleichgewichtsfälle an einem einzelnen Stabe untersucht worden; in diesem Kapitel und in den folgenden sollen die Gleichgewichtsbedingungen für Constructions, welche aus mehreren Stäben bestehen, aufgesucht werden, wobei wir uns auf diejenigen Systeme beschränken, welche in der Praxis am häufigsten vorkommen.

§ 521. Ein Gewicht wird von einem einzelnen Stabe auf die einfachste Weise getragen, wenn man das Gewicht auf das obere Ende des vertical gestellten Stabes legt. Die Gleichgewichtsbedingungen sind für diesen Fall bereits in § 383 gefunden. Eine solche Vorrichtung

besitzt nur dann Stabilität, wenn das untere Ende des Stabes sich nicht drehen kann. Entgegengesetzten Falls kann man entweder durch Streben oder sonstige feste Stützen, oder durch Seile, welche von festen Punkten ausgehen, das obere Ende des Stabes in seiner Lage erhalten. Der Grad von Stärke, welchen man den Seilen geben muss, lässt sich im Allgemeinen nicht mit Genauigkeit bestimmen, da die Seile keinen andern Zweck haben, als den, das obere Ende des Stabes zu verhindern, seine instabile Gleichgewichtslage verlassen.

§ 522. Ein Gewicht kann mittelst eines einzelnen verticalen Stabes auch so getragen werden, dass dasselbe in einiger Entfernung von der Axe des Stabes aufgehängt wird, und dies muss immer geschehen, wenn das Gewicht nicht allein getragen, sondern auch gehoben werden soll. In § 406 ist der Fall untersucht, wenn das untere Ende des Stabes eingemauert ist, und das Gewicht nur getragen wird. Soll das Gewicht gehoben werden, so bringt man gewöhnlich in *C* und *D* (Fig. 113)

Fig. 113.



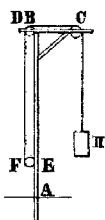
zwei Rollen an und zieht an dem Seile in *F*. Der Stab *AB* wird dann nicht nur von dem Gewichte II, sondern auch von der Spannung des Seiles *DF* sollicitirt. Wenn die Entfernungen *BC* und *CD* gleich sind, und die Spannung in den Seilzweigen *CII* und *DF* dieselbe wäre, so würde der Stab *AB* sich in derselben Lage befinden, als wenn das obere Ende desselben mit einem der Summe der Seilspannungen gleichem Gewichte belastet wäre. In der Wirklichkeit ist die Spannung in dem Seilzweige *DF* grösser, als in dem Zweige *CII*, und der Stab *AB* wird zu einer Biegung nach *DF* hin angeregt. Aus beiden Seilspannungen hat man die Resultante zu suchen, und dann die in § 406 u. folgd. gefundenen Resultate in der Weise anzuwenden, dass in den Formeln der genannten Paragraphen für II die Resultante, und für *l* der Abstand der Resultante von der Axe des Stabes gesetzt wird.

Die Stabilität des Gleichgewichtes hängt hier allein von dem Biegungswiderstande des Stabes ab, und eine Verschiebung des obern Endes vergrössert den Hebelarm der einwirkenden Kräfte. Es ist durchaus noth-

wendig, dieses Ende des Stabes durch Seile in seiner Lage zu erhalten; der Widerstand dieser Seile kann aber, eben wie in dem vorhergehenden Falle, nicht zum Voraus mit Genauigkeit berechnet werden.

§ 523. Zuweilen sind die Constructionen dieser Art so angeordnet, dass mit dem Stabe  $AB$  (Fig. 114)

Fig. 114. nahe an dessen unterm Ende, in  $E$ , ein Haspel fest verbunden ist, mittelst welcher das Seil  $DF$  angezogen wird. In diesem Falle befinden sich die beiden Theile  $AE$ ,  $BE$  in verschiedenen Gleichgewichtszuständen. Der Theil  $AE$  wird nur durch das Gewicht II zu einer Biegung angeregt, und man kann die in § 406 u. folgd. gefundenen Resultate auf denselben anwenden. Der Theil  $BE$  unterliegt der Wirkung des Gewichtes II und der Spannung des Seiles  $DF$ . Vernachlässigt man die Biegung des Theiles  $AE$ , so lässt sich auf den Theil  $BE$  das in dem vorhergehenden Paragraphen Gesagte anwenden.



§ 524. Bei der in Fig. 115 dargestellten Construction ist der Horizontalstab  $BB'$ , welcher in der Mitte  $C$  mit einem Gewicht II belastet ist, in dem

Fig. 115. Gleichgewichtszustande, welcher in den §§ 356 und 357 untersucht wurde. Die Verticalstäbe  $AB$ ,  $A'B'$  tragen jeder die Hälfte des Gewichtes II und befinden sich in den Gleichgewichtszuständen, welche in § 383 oder in § 389 untersucht wurden, je nachdem die unteren Enden der Stäbe frei aufstehen oder eingemauert sind. Sieht man

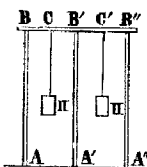
von dem Widerstande der Verbindungen in  $B$  und  $B'$  ab, so ist das Gleichgewicht nicht stabil und die Construction muss durch schräg gestellte Stäbe oder durch Seile in ihrer Lage erhalten werden.

Sollte das in dem Punkte  $C$  aufgehängte Gewicht nicht bloss getragen, sondern mittelst eines Seiles gehoben werden, welches über eine oder mehrere in  $C$  angebrachte Rollen ginge, so müsste man offenbar die Summe aus dem Gewicht II und der Spannung

des Seilendes, auf welches die Kraft wirkt, die das Gewicht  $\Pi$  zu heben strebt, als die Belastung des Punktes  $C$  ansehen.

§ 525. Als eine Vereinigung von zwei solchen Systemen, wie sie eben betrachtet wurden, lässt sich

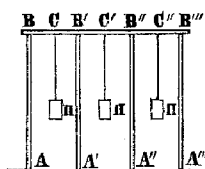
Fig. 116.



die in Fig. 116 dargestellte Construction ansehen, wenn das Horizontalstück  $BB'$  aus zwei Theilen besteht, welche in einer in  $B'$  befindlichen Fuge zusammenstossen. Die Verticalstäbe  $AB$  und  $A''B'$  tragen jeder die Hälfte von einem der Gewichte  $\Pi$ , und der Stab  $A'B'$  trägt das Doppelte oder ein ganz  $\Pi$ . Besteht aber der horizontale Balken  $BB'$  aus einem einzigen Stücke, so leistet jede der beiden Hälften  $BB'$  und  $B'B'$  denselben Widerstand, wie ein Horizontalstab, dessen eines Ende eingemauert ist, während das andere Ende frei auf einer Stütze liegt. Sieht man daher die Stäbe  $AB$ ,  $A'B'$  und  $A''B'$  als unbiegsame Stützen an, so lassen sich hier die in § 366 u. folgd. gewonnenen Resultate anwenden, welche mit der in § 375 u. folgd. gegebenen Lösung übereinstimmen. Man wird demnach annehmen, dass der Druck auf die beiden äussern Stäbe  $AB$  und  $A''B'$  für jeden gleich  $\frac{5}{16} \Pi$  ist, weshalb für den mittleren Stab  $A'B'$  ein Druck von  $\frac{22}{16} \Pi$  übrig bleibt. Die Verbindung der beiden Theile des Horizontalstückes  $BB'$  vermehrt also sehr merklich die Belastung des mittleren Pfosten  $A'B'$ , während sie die der beiden andern vermindert.

§ 526. Wir wollen noch die in Fig. 117 dargestellte Construction untersuchen, wo der horizontale Balken  $BB''$  aus einem einzigen Stücke besteht, der von drei in gleichen Zwischenräumen angebrachten verticalen Pfosten getragen wird und mit drei gleichen Gewichten  $\Pi$  belastet ist. Sieht man die verticalen Träger als unbiegsame Stützen an, so lässt sich der Widerstand, welchen der Balken  $BB''$  leisten muss, und der Druck auf jeden einzelnen Träger

Fig. 117.



durch eine ähnliche Rechnung finden, wie in § 371 u. folgte. Es kann in der That eine Hälfte  $BC'$  des Balkens als ein mit dem Ende  $C'$  horizontal eingemauerter Stab angesehen werden, der von drei Verticalkräften sollicitirt wird, die in den Punkten  $B$  und  $B'$  von unten nach oben, und in dem Punkte  $C$  von oben nach unten gerichtet sind. Man bemerke zunächst, dass bei dem Stabe  $AMM'$  (Fig. 118) welcher in § 371

Fig. 118.



untersucht wurde, für den dritten Theil  $M'M''$  desselben, unter Beibehaltung der in jenem Paragraphen gebrauchten Benennungen, die folgenden Gleichungen gelten, wenn man die Constanten so bestimmt, dass sich für  $x=a'$  dieselben Werthe für  $\frac{dy}{dx}$  und für  $y$  ergeben, wie aus den Gleichungen für den Theil  $MM'$ :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi'' (a' - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \frac{1}{2} a^2 - \Pi' \frac{1}{2} a'^2 + \Pi'' (a' x - \frac{1}{2} x^2),$$

$$\varepsilon y = \Pi (\frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{6} a^3) - \Pi' (\frac{1}{2} a'^2 x - \frac{1}{6} a'^3) + \Pi'' (\frac{1}{2} a' x^2 - \frac{1}{6} x^3).$$

Wenden wir jetzt diese Gleichungen, so wie die, welche schon in dem citirten Paragraphen gegeben sind, auf die Hälfte  $BC'$  des Balkens  $BB''$  (Fig. 117) an. Nennt man

$a$  die Hälfte von einem der gleichen Intervalle  $BB'$ ,  $B'B''$ ;

$Q$  den Druck auf den Pfosten  $AB$ ;

$Q'$  den Druck auf den Pfosten  $A'B$ ;

so entsprechen die genannten Gleichungen dem vorliegenden Falle, wenn man  $Q'$  für  $\Pi$ ,  $\Pi$  für  $\Pi'$ ,  $Q$  für  $\Pi''$ ,  $2a$  und  $3a$  für  $a'$  und  $a'$  schreibt. Man erhält daher für die Theile  $B'C'$ ,  $CB'$  und  $BC$  respective die Gleichungen

$$\varepsilon y = Q' (\frac{1}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3) - \Pi (a x^2 - \frac{1}{6} x^3) + Q (\frac{3}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3),$$

$$\varepsilon y = Q' (\frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{6} a^3) - \Pi (a x^2 - \frac{1}{6} x^3) + Q (\frac{3}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3),$$

$$\varepsilon y = Q' (\frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{6} a^3) - \Pi (2a^2 x - \frac{1}{6} a^3) + Q (\frac{3}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3).$$



Setzt man hierin successive  $x=a$ ,  $x=2a$ ,  $x=3a$ , so erhält man für die Ordinaten der Punkte  $B'$ ,  $C$  und  $B$ , welche von der Horizontalen ausgezählt werden, die durch den Punkt  $C'$  geht:

$$\begin{aligned}\varepsilon y &= (2 Q' - 5 \Pi + 8 Q) \frac{1}{6} a^3, \\ \varepsilon y &= (5 Q' - 16 \Pi + 28 Q) \frac{1}{6} a^3, \\ \varepsilon y &= (8 Q' - 28 \Pi + 54 Q) \frac{1}{6} a^3.\end{aligned}$$

Die Ordinaten der Punkte  $B$  und  $B'$  müssen unter sich gleich sein; man hat daher

$$6 Q' - 23 \Pi + 46 Q = 0.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Gewichten  $\Pi$  und den Drücken auf die Pfosten folgt ausserdem

$$2 Q' - 3 \Pi + 2 Q = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich  $Q = \frac{7}{20} \Pi$  als der Druck auf jeden der beiden äusseren Pfosten  $AB$  und  $A''B''$ ; sowie  $Q' = \frac{23}{20} \Pi$  als der Druck auf jeden der beiden mittleren. Es wird auch hier dadurch, dass der Balken  $BB''$  aus einem einzigen Stücke besteht, die Belastung der mittleren Pfosten vermehrt, und die der äusseren vermindert.

§ 527. Was den Grad des Widerstandes anlangt, den der Balken  $BB''$  leisten muss, so beachte man, dass für die Theile  $B'C'$ ,  $B'C$  und  $CB$  desselben respective die Gleichungen gelten

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= Q' (a-x) - \Pi (2a-x) + Q (3a-x), \\ \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\Pi (2a-x) + Q (3a-x), \\ \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= Q (3a-x); \end{aligned}$$

oder, wenn man für  $Q$  und  $Q'$  ihre eben gefundenen Werthe setzt,

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\Pi}{20} (4a - 10x), \\ \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\Pi}{20} (-19a + 13x), \\ \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\Pi}{20} (21a - 7x).\end{aligned}$$

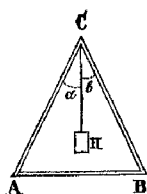
Die Maximalpunkte der Krümmung sind  $C'$   $B'$  und  $C$ : in dem ersteren derselben ist die Krümmung und die Neigung zum Bruche am grössten, man hat hier  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi \frac{7a}{20}$ . Die Bedingungen für den Bruch dieses Stabes finden sich daher nach § 358 durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\rho = \Pi \frac{7a}{20}.$$

Die verticalen Pfosten werden hier als unbiegsame Stützen betrachtet. Wollte man sie als biegsam oder zusammendrückbar ansehen, so wäre die Frage eine andere und verwickeltere. Es ist aber der Praxis wegen nicht nöthig, die Frage auf diese Weise zu behandeln, und es ist durchaus kein gefährlicher Irrthum zu befürchten, wenn man jedem Pfosten eine Stärke giebt, die zu den oben gefundenen Drücken in einem passenden Verhältnisse steht.

§ 528. Ein Gewicht kann mittelst eines einzigen geneigten Stabes getragen werden, wenn das untere Ende desselben festgehalten (eingemauert) wird. In § 412 u. folgd. ist dieser Fall des Gleichgewichtes untersucht worden. In Fig. 119 ist ein Gewicht dargestellt, welches

Fig. 119. von zwei geneigten Stäben getragen wird, deren untere Enden frei auf Stützen stehen. Nennt man  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel, welche die Stäbe  $AC$  und  $BC$  mit dem verticalen Seile  $CH$  bilden, so erhält man durch Zerlegung des Gewichtes  $\Pi$  in die Richtungen der beiden Stäbe respective die Kräfte



$$\Pi \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Diese Stäbe stützen sich in  $C$  gegen einander, und der Horizontaldruck, welcher in diesem Punkte stattfindet, ist

$$\Pi \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

In  $A$  und  $B$  suchen sie sich von einander zu entfernen, und dieselbe Formel giebt daher den Horizontal-

schub gegen die Stützen, von denen sie zurückgehalten werden, oder die Spannung eines Bandes an, wenn man sie mittelst eines Bandes verbinden will.

§ 529. Bilden die beiden Stäbe  $AC$ ,  $BC$  mit der Verticalen denselben Winkel  $\alpha$ , so ist der Druck in der Richtung eines jeden Stabes

$$\frac{\Pi}{2 \cos \alpha},$$

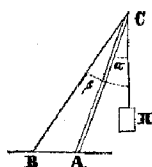
und der Horizontalschub wird ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2} \Pi \tan \alpha.$$

Bei den in Rede stehenden Constructionen befinden sich die beiden geneigten Stäbe in dem Gleichgewichtszustande, welcher in § 383 untersucht wurde, wobei der Druck in der Richtung der Stäbe die in jenem Paragraphen mit  $Q$  bezeichnete Kraft ersetzt.

§ 530. Bei der Construction, welche Fig. 120 darstellt, wird der Stab  $AC$  zusammengedrückt, und der Stab  $BC$  ausgedehnt. Der Druck in der Richtung  $AC$

Fig. 120.



muss die Resultante aus den Spannungen der Seile  $BC$  und  $CH$  sein. Bezeichnet man daher durch  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel, welche  $AC$  und  $BC$  mit dem verticalen Seile  $CH$  bilden, so hat man respective

$$\Pi \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \text{ und } \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$$

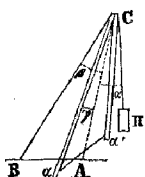
für den Druck in der Richtung  $AC$  und für die Spannung des Seiles  $BC$ . Der Stab  $AC$  hat ein Bestreben, auf seiner Stütze  $A$  zu gleiten, und der Horizontalschub gegen das Hinderniss, welches den Stab zurückhalten soll, ist

$$\Pi \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Die eben betrachteten Constructionen sind im stabilen Gleichgewichte in Bezug auf die Verschiebungen, welche

in der Verticalebene eintreten könnten, in denen sich die geneigten Stäbe und das Seil befinden, an welchen das Gewicht aufgehängt ist. In dieser Ebene müssen die Constructionen aber durch Seile erhalten werden.

§ 531. Um die Stabilität des Systemes zu vermehren, ersetzt man den einzelnen Stab  $AC$  durch zwei Stäbe  $aC$  und  $a'C$  (Fig. 121), wodurch die Vorrichtung entsteht, welche unter dem Namen „Hebebock“ bekannt ist. Es sei die Linie  $AC$  der Durchschnitt der Verticalebene,



in welcher sich die Seilzweige  $BC$ ,  $CII$  befinden, mit der Ebene  $aCa'$ , welche auf der erstern normal steht, und man nenne  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel  $BCII$  und  $ACII$ , und  $\gamma$  einen der beiden gleichen Winkel  $aCA$  und  $a'CA$ . Das Gewicht  $II$  wird in der Richtung eines jeden der beiden Stäbe  $aC$  und  $a'C$  einen Druck erzeugen, den die Formel ausdrückt

$$II \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha) 2 \cos \gamma}.$$

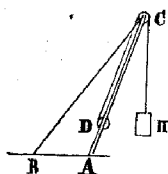
Die Spannung in dem Bande  $aa'$  ist

$$II \frac{\sin \beta \cdot \tan \gamma}{2 \sin (\beta - \alpha)}.$$

Die Spannung des Seiles  $BC$  und die Horizontalkraft, mit welcher die unteren Enden  $a$ ,  $a'$  der geneigten Stäbe in der Richtung parallel zu  $AB$  zu gleiten suchen, werden durch die in dem vorigen Paragraphen gegebenen Formeln ausgedrückt.

§ 532. Soll bei den Constructionen, welche wir so eben untersucht haben, das in  $C$  aufgehängte Gewicht nicht bloss getragen, sondern mittelst eines Seiles gehoben werden, welches über eine oder mehrere Rollen geht, die in  $C$  angebracht sind, so muss man, um den Druck in der Richtung der einzelnen Stäbe zu bestimmen, anstatt des Gewichtes  $II$  die Resultante aus diesem Gewichte und der Spannung des Seilendes, an welchem die bewegende Kraft wirkt, in Rechnung bringen. Ausserdem muss der in Fig. 122 dargestellte Fall unter-

Fig. 122.

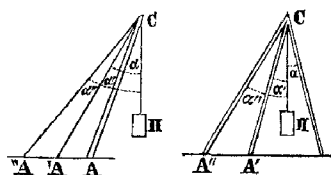


schieden werden, wo das Seil *CD* mittelst welches das Gewicht *II* aufgezogen wird, sich auf einem in *D*, nahe an dem untern Ende des Stabes *AC* befestigten Haspel aufrollt. In diesem Falle wird der Theil *AD* nur durch die Kraft zusammengedrückt, welche sich durch die Zerlegung des Gewichtes *II* ergibt, und die durch die Formeln in den vorhergehenden Paragraphen ausgedrückt wird. Die Spannung des Seiles *BC* behält ebenfalls den dafür in diesen Paragraphen gegebenen Werth. Aber der Theil *CD* des Hauptstückes wird in der Richtung seiner Länge mit einer Kraft zusammengedrückt, welche gleich der Summe aus der von der Wirkung des Gewichtes *II* herrührenden Kraft und der Spannung des Seiles *CD* ist. Der Gleichgewichtszustand dieses Theiles *CD* kann, ohne gefahrbringenden Irrthum, als demjenigen analog angesehen werden, in welchem sich der in § 383 betrachtete Stab befindet.

§ 533. Wird ein Gewicht von mehr als zwei geneigten Stäben getragen, die sich in derselben Ebene befinden, oder von mehr als drei geneigten Stäben, die sich in verschiedenen Ebenen befinden, so lassen die Gleichgewichtsbedingungen den Druck in der Richtung jedes einzelnen Stabes innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Denn, obgleich es scheint, als müsste das Gewicht von den sämtlichen Stäben gemeinschaftlich getragen werden, so verhindert doch nichts die Annahme, dass das Gewicht im erstern Falle, nur von zweien, und im letztern Falle nur von dreien dieser Stäbe getragen werde. Diejenigen unter ihnen, welche zusammengedrückt werden, befinden sich in dem Gleichgewichtszustande, welcher in § 383 untersucht wurde, und die Resultate der Lösung, welche in diesem Paragraphen gegeben ist, zeigen, dass man solche Stäbe als feste, unverrückbare Stützen ansehen kann, so lange die Kräfte, welche darauf wirken, eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Betrachtet man das System auf diese Weise, so muss, wenn die Construction eine gänzliche Sicherheit gewähren soll, der grösste Druck, welcher

auf einen einzelnen Stab je nach den verschiedenen Arten, auf welche sich das Gewicht vertheilen lässt, kommen kann, noch unter der eben besprochenen Grenze liegen. Man übersehe aber nicht, dass die Lösung des § 383, welche lehrt, dass ein Stab, der in der Richtung seiner Länge einen Druck erleidet, demselben nicht nachgiebt, so lange dieser Druck eine gewisse Grenze nicht überschreitet, nur die Neigung des Stabes zu einer Biegung berücksichtigt. In der Wirklichkeit wird der Stab vor der Biegung mehr und mehr zusammengedrückt vermöge der Elasticität des Materials. Dieser Umstand muss bei solchen Fragen, wie sie hier in Rede stehen, berücksichtigt werden, und alsdann verschwindet jede Unbestimmtheit hinsichtlich der Vertheilung der Belastung auf die Stützpunkte.

Fig. 123.



Um hiervon ein Beispiel zu haben, nehme man an, das Gewicht  $\Pi$  (Fig. 123) werde von den drei Stäben  $AC$ ,  $A'C$ ,  $A''C$ , die sich in derselben Ebene befinden, getragen, und man nenne

- $\alpha, \alpha', \alpha''$  die Winkel, welche die Richtungen der drei Stäbe mit dem verticalen Seile  $C\Pi$  einschliessen;
- $p, p', p''$  die Kräfte, welche sich in Folge der Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  in der Richtung eines jeden Stabes ergeben;
- $F, F', F''$  die Elasticitätskräfte der drei Stäbe;
- $a$  die Höhe des Punktes  $C$  über der Horizontalen  $AA''$ ;
- $h, f$  die Grössen, um welche der Punkt  $C$  durch die gleichzeitige Zusammendrückung der drei Stäbe in horizontaler und verticaler Richtung verschoben wird.

(Indem mit  $F$  die Elasticitätskraft des Stabes  $AC$  bezeichnet wird, soll darunter verstanden werden, dass ein Gewicht gleich  $F$  nöthig sei, um den Stab bis auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszudehnen, d. h.  $F$  ist das Product aus der Querschnittsfläche des Stabes und dem Elasticitätsmodul seines Materials).

Nach diesen Vorbemerkungen findet man zunächst für die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen dem Gewichte  $\Pi$  und den Pressungen in den Richtungen der einzelnen Stäbe

$$\begin{aligned} p \cos \alpha + p' \cos \alpha' + p'' \cos \alpha'' &= \Pi, \\ p \sin \alpha + p' \sin \alpha' + p'' \sin \alpha'' &= 0. \end{aligned}$$

Da ferner die Verschiebung des Punktes  $C$  als sehr gering vorausgesetzt wird, so sind die Grössen, um welche die einzelnen Stäbe zusammengedrückt werden, sehr nahe

$$f \cos \alpha - h \sin \alpha, f \cos \alpha' - h \sin \alpha', f \cos \alpha'' - h \sin \alpha'',$$

und da die Längen dieser Stäbe respective  $\frac{a}{\cos \alpha}$ ,  $\frac{a}{\cos \alpha'}$ ,  $\frac{a}{\cos \alpha''}$ , sind, so hat man

$$\frac{f \cos \alpha^2 - h \sin \alpha \cos \alpha}{a}, \frac{f \cos \alpha'^2 - h \sin \alpha' \cos \alpha'}{a}, \frac{f \cos \alpha''^2 - h \sin \alpha'' \cos \alpha''}{a},$$

als die Bruchtheile dieser Längen, um welche die einzelnen Stäbe zusammengedrückt worden sind. Es ergeben sich daraus die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= F \cdot \frac{f \cos \alpha^2 - h \sin \alpha \cos \alpha}{a}, \\ p' &= F' \cdot \frac{f \cos \alpha'^2 - h \sin \alpha' \cos \alpha'}{a}, \\ p'' &= F'' \cdot \frac{f \cos \alpha''^2 - h \sin \alpha'' \cos \alpha''}{a}, \end{aligned}$$

welche, mit den beiden vorhergehenden verbunden, die Werthe der Verschiebungen  $h$  und  $f$ , und der Kräfte  $p$ ,  $p'$  und  $p''$  liefern.

§ 534. Setzt man z. B. die Elasticitätskräfte der drei Stäbe als einander gleich, den mittlern Stab  $AC$  als vertical, und die Winkel  $\alpha$ ,  $\alpha''$  als gleich  $45^\circ$  voraus, so ist die horizontale Verschiebung  $h$  des Punktes  $C$  gleich Null und man kann die zweite von beiden Gleichgewichtsgleichungen weglassen. Man hat  $\cos \alpha' = 1$ ,  $\cos \alpha = \cos \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , und

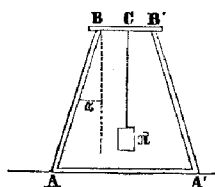
$$f = \frac{\sqrt{2} \cdot \Pi a}{F(1 + \sqrt{2})}, p = p'' = \frac{\Pi}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}, p' = \frac{\sqrt{2} \cdot \Pi}{1 + \sqrt{2}};$$

der Druck auf den mittlern Stab ist demnach doppelt so gross, als auf die beiden andern.

§ 535. Wären die drei Stäbe auf derselben Seite von dem verticalen Seile  $C\Pi$  (Fig. 123) angebracht, so würde nur der erste Stab zusammengedrückt werden und die beiden andern würden ausgedehnt werden. Die Gleichungen in § 533 passen auch für diesen Fall, wenn man die Vorzeichen von  $p'$  und  $p''$  ändert.

§ 536. Bei einer Construction, wie sie Fig. 124 darstellt, wo die beiden geneigten Stäbe,  $AB, A'B'$ ,

Fig. 124.



welche sich mit dem Seile  $C\Pi$  in derselben Verticalebene befinden, das Gewicht  $\Pi$  mittelst eines horizontalen Stabes  $BB'$  tragen, ist es zum Gleichgewichte des Systemes nothwendig, dass die Neigung der Stäbe  $AB, A'B'$  gleich gross sei, wofern von dem Widerstande des Verbandes abgesehen wird. Nennt man  $\alpha$  den Winkel, welchen die Stäbe mit der Verticalen einschliessen, so werden diese mit der Kraft  $\frac{\Pi}{2 \cos \alpha}$  in der Richtung ihrer Länge zusammengedrückt, und sie befinden sich in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie der in § 383 untersuchte Stab. Die Enden  $A, A'$  suchen sich mit einer Horizontalkraft gleich  $\frac{1}{2} \Pi \tan \alpha$  von einander zu entfernen.

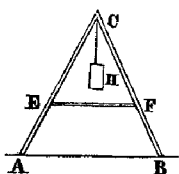
Was den Horizontalstab  $BB'$  anlangt, so befindet sich jede Hälfte  $BC$  oder  $B'C$  in derselben Lage, als wenn sie in  $C$  horizontal festgehalten würde, während an dem Ende  $B$  oder  $B'$  eine Kraft in der Richtung  $AB$  oder  $A'B'$  wirkt. Diese Hälften befinden sich also in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie der in § 412 untersuchte Stab, wobei die in jenem Paragraphen mit



$P$ ,  $Q$  und  $\Pi$  bezeichneten Kräfte hier respective  $\frac{1}{2} \Pi$ ,  $\frac{1}{2} \Pi \tan \alpha$  und  $\frac{\Pi}{2 \cos \alpha}$  sind.

§ 537. In § 528 wurde der Fall untersucht, wo ein Gewicht  $\Pi$  von zwei geneigten Stäben getragen wird, und es zeigte sich die Nothwendigkeit, die beiden unteren Enden dieser Stäbe, welche sich von einander zu entfernen streben, durch irgend ein Mittel zusammen zu halten. Das Letztere kann dadurch geschehen, dass man in einer gewissen Höhe die beiden Stäbe durch ein horizontales Band  $EF$  (Fig. 125) verbindet, während die untern Enden derselben frei auf der Horizontalebene stehen, von welcher sie getragen werden.

Fig. 125.



Man nenne

$\alpha$  den Winkel, welchen die Stäbe  $AC$ ,  $BC$  mit dem verticalen Seile  $C\Pi$  bilden;

$a$  die Länge der Theile  $CE$ ,  $CF$ ;

$a'$  die Länge der Theile  $AF$ ,  $BF$ .

Die Stützpunkte  $A$  und  $B$  erleiden jeder einen Verticaldruck gleich  $\frac{\Pi}{2}$ . Jeder Stab  $AC$ ,  $BC$  kann angesehen werden, als würde er durch die Kraft  $\frac{\Pi}{2}$  zu einer Drehung um seinen obern Endpunkte angeregt, und in dem Bande  $EF$  muss sich die nöthige Spannung finden, um eine solche Bewegung zu verhindern. Diese Spannung wird also durch die Bedingung bestimmt, dass ihr auf den Punkt  $C$  bezogenes Moment dem auf denselben Punkt bezogenen Momente der in  $A$  oder  $B$  wirkenden Vertikalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  gleich sein muss. Der Werth der in Rede stehenden Spannung ist demnach

$$\Pi \frac{a + a'}{2a} \tan \alpha;$$

und diese Formel giebt zugleich den Horizontaldruck, welchen die beiden Stäbe in  $C$  gegen einander ausüben. Man sieht demnach, dass sich die Theile dieser Stäbe

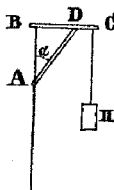
in demselben Falle befinden, wie der in § 512 u. folgd. untersuchte Stab. Der Theil  $AE$  muss angesehen werden, als werde er in  $E$  festgehalten und in  $A$  von der Verticalkraft  $\frac{11}{2}$  sollicitirt, welche ihn zusammenzudrücken strebt. Der Theil  $CE$  muss angesehen werden, als würde er ebenfalls in  $E$  festgehalten, und in  $C$  von der Verticalkraft  $\frac{11}{2}$  und der Horizontalkraft  $11 \frac{a+\alpha}{2a} \tan \alpha$  sollicitirt, welche Kräfte den Theil  $CE$  beide zusammenzudrücken streben.

§ 538. Bei der in § 528 betrachteten Construction könnte man ausser dem Bande  $AB$  (Fig. 119) sich noch ein Band  $EF$  (wie in Fig. 125) angebracht denken. In diesem Falle wird die Horizontalkraft  $\frac{1}{2} 11 \tan \alpha$ , mit welcher die beiden Stäbe sich von einander zu entfernen suchen, noch immer entweder gänzlich von den Hindernissen in  $A$  und  $B$ , oder von dem Bande  $EF$  aufgenommen. Der Stab  $AC$  muss eben so angesehen werden, wie der in § 383 untersuchte Stab, aber mit der Bedingung, dass ein Punkt dieses Stabes als fest betrachtet wird. Aus der in § 383 angestellten Untersuchung ergibt sich, dass, wenn die Stäbe als biegsame, aber nicht zusammendrückbare Ruthen angesehen werden und der feste Punkt  $E$  sich in einem Theilpunkte befindet, durch welche der Stab in 2, 3 etc. gleiche Theile getheilt wird, die Kraft, welche im Stande ist, den Stab zu biegen, das 4fache, 9fache derjenigen Kraft beträgt, welche stattgefunden haben würde, wenn kein fester Punkt da gewesen wäre. Ausserdem ist auf das in § 403 Gesagte Rücksicht zu nehmen, wenn man die Grenze der zulässigen Belastungen für den Stab bestimmen will.

Das in einem der Theilpunkte des Stabes  $AC$  angebrachte Band  $EF$  erleidet keine Horizontalspannung. Denn, obgleich die Existenz eines auf diese Weise befestigten Punktes eine besondere Art der Biegung bei diesem Stabe bedingt, so erleidet dieser Punkt doch keinen Druck.

Die eben gemachten Bemerkungen lassen sich auch auf die in § 536 betrachtete und in Fig. 124 dargestellte Construction anwenden, wenn man sich in einer

Fig. 126.



gewissen Höhe ein horizontales Band zwischen den Stäben  $AB$  und  $A'B'$  angebracht denkt.

§ 539. Bei der in Fig. 126 dargestellten Construction ist ein Gewicht  $\Pi$  an dem Ende  $C$  des horizontalen Stabes  $BC$  aufgehängt, der durch die Strebe  $AD$  verstärkt ist. Die Punkte  $A, B$  sind fest, es werden aber die Theile der Construction als um diese Punkte drehbar gedacht. Man nenne

$l, l'$  die Entfernungen  $BD, CD$ ;

$\alpha$  den Winkel  $BAD$ .

Auf den festen Punkt  $B$  wirkt eine von unten nach oben gerichtete Vertikalkraft  $\Pi \frac{l'}{l}$ , die (in entgegengesetzter Richtung gedacht) dem Gewichte  $\Pi$  das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt  $D$  hält. Der Punkt  $D$  ist mit der Summe aus dem Gewichte  $\Pi$  und der genannten Vertikalkraft, also mit  $\Pi \frac{l+l'}{l}$  belastet. Da diese Kraft von der Strebe  $AD$  aufgenommen werden muss, so entsteht in der Richtung dieses Stabes die Pressung  $\Pi \frac{l+l'}{l \cos \alpha}$ , und zugleich in der Richtung  $BD$  die Spannung  $\Pi \frac{l+l'}{l} \tan \alpha$ , welche von dem Widerstande des festen Punktes  $B$  vernichtet wird. Will man sich also Gewissheit verschaffen, ob die Construction stark genug ist, um das Gewicht  $\Pi$  zu tragen, so untersuche man zunächst, ob die Strebe  $AD$ , welche dem im § 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden muss, den Druck  $\Pi \frac{l+l'}{l \cos \alpha}$  in der Richtung ihrer Axe ertragen kann. Bei dem Stabe  $BC$  werden darauf die Punkte  $B$  und  $D$  als fest angesehen, während er sollicitirt wird von einer Axenspannung  $\Pi \frac{l+l'}{l} \tan \alpha$ , die im Theile  $BD$  thätig ist, und von einer Drehkraft, deren Moment  $\Pi l'$  ist, und die den Stab in  $D$  abbrechen sucht, in welchem Punkte sie eine Krümmung zu bewirken strebt, deren Halbmesser die Grösse  $\frac{\Pi l'}{\pi}$  als reciproken Werth hat. Soll demnach, wie in § 387, die grösste Kraft, von welcher die Flächeneinheit des Querschnittes in Anspruch

genommen wird, die Grenze  $R'$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

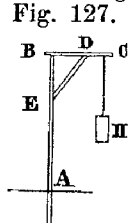
$$\frac{K'}{E} = \Pi \left\{ \frac{(l+l') \tan \alpha}{E \omega \cdot l} + \frac{v'l'}{\varepsilon} \right\},$$

aus welcher man erhält, wenn der Querschnitt ein Rechteck ist, dessen Breite und Höhe durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden,

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ \frac{c(l+l') \tan \alpha}{l} + 6l' \right\},$$

und diese Formel wird das grösste Gewicht  $\Pi$  geben, mit dem die Construction belastet werden darf.

§ 540. Man nehme jetzt an, dass der Horizontalstab  $BC$  und die Strebe  $DE$  mit einem Verticalstabe  $AB$  (Fig. 127) verbunden seien, dessen unteres Ende in  $A$  eingemauert ist. Das oben über die Theile  $BC$ ,  $DE$  Gesagte, gilt auch hier. Der Stab  $AB$  wird



in  $E$  von einer Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{l \cos \alpha}$  sollicitirt, welche in der Richtung  $DE$  wirkt und sich in eine Horizontalkraft  $\Pi \frac{l+l'}{l} \tan \alpha$ , und eine Vertikalkraft  $\Pi \frac{l+l'}{l}$  zerlegen lässt. Derselbe Stab wird ausserdem in  $B$  von einer Horizontalkraft  $\Pi \frac{l+l'}{l} \tan \alpha$

in der Richtung  $BD$ , und von einer von unten nach oben gerichteten Vertikalkraft  $\Pi \frac{l}{l'}$  sollicitirt. Man nehme nun der grössern Einfachheit wegen an, dass die Krümmung des Stabes  $AB$  ausserordentlich klein sei, so dass die Verschiebungen der Punkte  $B$ ,  $E$  im Vergleich zu der Länge des Stabes vernachlässigt werden können (was auch in den Fällen, die in der Praxis am häufigsten vorkommen, geschehen kann). Man sieht alsdann

1) dass der Stab  $AB$ , welcher in dem Intervalle  $AE$  durch die Kraft  $\Pi$  in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird, zum Bruche in einem beliebigen Punkte dieses Intervalles von einer Drehkraft angeregt wird, deren Moment gleich  $\Pi(l+l')$  ist und die daher eine Krümmung zu erzeugen strebt, deren Halbmesser

die Grösse  $\frac{\Pi(\ell + \ell')}{\varepsilon}$  als reciproken Werth hat. Nach dem in § 387 Gesagten wird demnach die Grenze der Werthe von  $\Pi$ , wenn die Fasern auf jeder Flächeneinheit des Querschnittes keinen grössern Druck als  $R'$  erleiden sollen, durch die Gleichung gegeben

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{1}{Ew} + \frac{v'(\ell + \ell')}{\varepsilon} \right\},$$

welche sich auf die folgende reducirt, wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist,

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} [c + 6(\ell + \ell')];$$

2) dass derselbe Stab  $AB$ , welcher in dem Intervalle  $BE$  in der Richtung seiner Länge durch die Kraft  $\Pi \frac{\ell'}{\ell}$  ausgedehnt wird, zum Bruche in  $E$  durch eine Kraft angeregt wird, deren Moment gleich  $\Pi(\ell + \ell')$  ist. Die Grenze der Werthe von  $\Pi$  wird demnach, wenn die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes keine grössere Spannung als  $R'$  erleiden sollen, durch die Gleichung gegeben

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{\ell'}{Ew \cdot \ell} + \frac{v'(\ell + \ell')}{\varepsilon} \right\},$$

welche sich auf die folgende reducirt, wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist,

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ \frac{c\ell'}{\ell} + 6(\ell + \ell') \right\}.$$

Liegt der Punkt  $D$  in der Mitte von  $BC$ , so ist in dem Stabe  $AB$  die Neigung zum Bruche in einem beliebigen Punkt des Intervalles  $AE$  und dem Punkte  $E$  gleich gross. Der Stab hat hingegen eine grössere Neigung in dem Intervalle  $AE$  zu brechen, als in  $E$ , wenn  $BD$  kleiner ist, als  $CD$ . Der Gleichgewichtszustand des Stabes ist von der Neigung der Strebe  $DE$  unabhängig.

§ 541. Wegen der Krümmung, welche der Stab  $AB$  annimmt, und auf welche die vorhergehenden Formeln keine Rücksicht nehmen, fallen die nach jenen Formeln berechneten Werthe von  $\Pi$  etwas zu gross aus, und die

Neigung des Stabes zum Bruche ist in dem Punkte  $A$  grösser, als in irgend einem andern Punkte des Intervalles  $AE$ .

Wir wollen jetzt den Gleichgewichtszustand des verticalen Stabes  $AB$  auf eine vollständige Weise untersuchen. Man nenne

$a$  die Länge des Theiles  $AE$ ;

$a'$  die Länge des Theiles  $BE$ ;

$x, y$  die verticale Abscisse und die horizontale Ordinate eines Punktes der Curve, welche die Axe des Stabes bildet,  $A$  als Ursprung des Coordinatensystemes gedacht;

$f$  die Ordinate des Punktes  $E$ ;

$f'$  die Ordinate des Endpunktes  $B$ .

Beachtet man, dass  $a' = \frac{l}{\tan \alpha}$ , so sieht man aus dem Vorhergehenden, dass der Stab  $AB$  sollicitirt wird 1) in  $E$  von der Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{l}$ , welche horizontal von rechts nach links wirkt, und von der Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{a'}$ , welche vertical von oben nach unten wirkt; und 2) in  $B$  von der Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{a'}$ , welche horizontal von links nach rechts wirkt, und von der Kraft  $\Pi \frac{l'}{l}$ , welche vertical von unten nach oben wirkt. Es ist demnach

1) die Gleichung, welche die Bedingungen für das Gleichgewicht des Theiles  $AE$  des Stabes ausdrückt,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = & - \Pi \frac{l+l'}{a'} (a-x) + \Pi \frac{l+l'}{l} (f-y) \\ & + \Pi \frac{l+l'}{a'} (a+a'-x) - \Pi \frac{l'}{l} (f'-y), \end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ l+l' + \frac{(l+l')f-lf'}{l} - y \right\}. \quad (\alpha)$$

2) Die Gleichung, welche die Bedingungen für das Gleichgewicht des Theiles  $BE$  ausdrückt,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{l+l'}{a'} (a+a'-x) - \frac{l'}{l} (f'-y) \right\}. \quad (\beta)$$

Verfährt man wie in § 406, so erhält man als das Integral der Gleichung ( $\alpha$ )

$$y = \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} \right\} \left\{ 1 - \cos x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\}, \quad (7)$$

welches die Gleichung der Curve ist, die der Theil  $AE$  des Stabes bildet.

Nennt man  $\varphi$  die Neigung der Tangente der Curve in dem Punkte, welcher nach der Biegung dem Punkte  $E$  entspricht, so muss für  $x=a$  aus der letzten Gleichung  $y=f$  und  $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\varphi$  folgen. Daher

$$f = \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} \right\} \left\{ 1 - \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\},$$

$$\text{tang}\varphi = \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} \right\} \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \cdot \sin a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}.$$

Verfährt man wie in § 415, so erhält man als das Integral der Gleichung ( $\beta$ ), oder als die Gleichung der Curve, welche der Theil  $BE$  des Stabes bildet,

$$f' - y = A \left\{ e \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} (a + a' - x) - e \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} (a + a' - x) \right\} + \frac{l(l+l')}{a'l'} (a + a' - x), \quad (8)$$

wo  $A$  eine willkürliche Constante ist. Aus dieser Gleichung muss ebenfalls  $y=f$  und  $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\varphi$  folgen, wenn  $x=a$  gesetzt wird, daher ergibt sich

$$f' - f = A \left\{ e \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} - e \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \right\} + \frac{l(l+l')}{l'},$$

$$\text{tang}\varphi = A \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \left\{ e \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} - e \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \right\} + \frac{l(l+l')}{a'l'}.$$

Da man also jetzt vier Gleichungen des ersten Grades zwischen den Grössen  $f, f', \text{tang}\varphi$  und  $A$  hat, so lassen sich die beiden letzteren leicht eliminiren und die Werthe von  $f, f'$  bestimmen. Substituirt man diese

Werthe in die Gleichungen ( $\gamma$ ) und ( $\delta$ ), so erhält man die Gleichungen der beiden Theile der Curve, welche der Stab bildet.

§ 542. Da hier nur sehr geringe Biegungen betrachtet werden, so lässt sich mit einem sehr geringen Fehler  $f$  und  $f'$  auf der rechten Seite der ersten beiden von den vier in Rede stehenden Gleichungen vernachlässigen. Man erhält demnach

$$f = (l + l') \left\{ 1 - \cos \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\},$$

$$\text{tang} \varphi = (l + l') \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \sin \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}};$$

woraus

$$A = (l + l') \frac{\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \sin \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} - \frac{l}{a'l'}}{\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \left\{ e^{a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} - a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \right\} + e}.$$

Aus der Gleichung ( $\gamma$ ) folgt für den Punkt  $A$ , in welchem die Krümmung des Theiles  $AE$  des Stabes am grössten ist,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon} (l + l').$$

Aus der Gleichung ( $\delta$ ) folgt für den Punkt  $E$ , in welchem die Krümmung des Theiles  $EB$  am grössten ist,

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = A \cdot \frac{\Pi l'}{\varepsilon l} \left\{ e^{a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} - a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \right\} - e.$$

oder, wenn man für  $A$  seinen obigen Werth setzt,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \cdot (l + l') \left\{ \frac{l}{a'l'} - \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \sin \alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\} \frac{e^{a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} - a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}{e^{a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} - a' \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} + e}.$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke mit  $\nu'$ , so geben sie die grösste Spannung an, welche die Fasern wegen



der Biegung erleiden, und können daher dazu dienen, die Dimensionen zu bestimmen, welche man dem Stabe geben muss, damit derselbe einer gegebenen Kraft widerstehen kann, wie man dies in den vorhergehenden Capiteln gesehen hat.

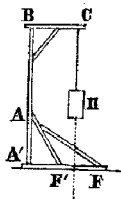
Die Grösse  $\frac{\Pi}{\varepsilon}$  wird in den meisten Fällen der Praxis sehr klein sein, und man kann daher den Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  in dem Punkte  $E$ , wenn man die Grössen von der Ordnung  $\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}$  vernachlässigt, auf

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon} (l + l')$$

reduciren, welcher Werth mit den Resultaten des § 540 übereinstimmt.

§ 543. Zuweilen ist der Stab  $AB$  mit seinem untern Ende nicht eingemauert und statt dessen durch einen geneigten Stab  $AF$  (Fig. 128) verstärkt. In

Fig. 128.

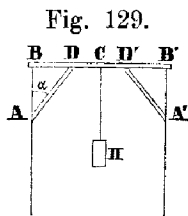


diesem Falle gilt alles in den vorhergehenden Paragraphen Gesagte für den Theil der Construction, welcher oberhalb des Punktes  $A$  liegt. Was den Theil der Construction unterhalb dieses Punktes anlangt, so nehme man zuerst an, dass der Punkt  $F$  jenseit (rechts von) der Verticalen liege, welche durch den Aufhängepunkt des Gewichtes  $\Pi$  geht. Man nenne  $h$  die Entfernung  $AA'$ ,  $\varphi$  den Winkel  $A'AF$  und  $l + l'$  bezeichne die Entfernung  $BC$ . Das Gewicht  $\Pi$  sucht den Stab  $AB$  um den Punkt  $A$  zu drehen und zwar mit einem Momente gleich  $\Pi (l + l')$ . Um diese Drehung zu verhindern, muss der Stab  $AF$  in der Richtung seiner Länge einen Widerstand  $\Pi \frac{l + l'}{h \sin \varphi}$  leisten, welcher in dem Punkte  $A$  und in der Richtung  $FA$  thätig wird und sich in eine Horizontalkraft  $\Pi \frac{l + l'}{h}$  und eine von unten nach oben gerichtete Verticalkraft  $\Pi \frac{l + l'}{h \tan \varphi}$  zerlegen lässt. Es muss daher 1) der Stab  $AF$  dem in § 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden, und die in jenem Paragraphen mit  $Q$  bezeichnete

Kraft ist hier  $\Pi \frac{l+l'}{h \sin \varphi}$ ; und 2) wird der Theil  $AA'$  des verticalen Stabes in der Richtung seiner Länge nur noch mit einer Kraft  $\Pi \left\{ 1 - \frac{l+l'}{h \tan \varphi} \right\}$  zusammengedrückt. Da aber mit dem gegen  $A$  von dem Stabe  $AF$  ausgeübten Horizontaldrucke ein entgegengesetzt gerichteter Druck in dem Stützpunkte  $A'$  combinirt werden muss, so befindet sich der Theil  $AA'$  in demselben Falle wie ein Stab, dessen eines Ende eingemauert ist, während an dem andern Ende ein Druck  $\frac{l+l'}{h \tan \varphi}$  in der Axe des Stabes und eine Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{h}$ , welche rechtwinklig gegen die Axe gerichtet ist, wirken.

Wenn nun der geneigte Stab  $AF$  so angebracht wäre, dass der Punkt  $F$  diesseit (links von) der Verticalen läge, welche durch den Aufhängepunkt des Gewichtes  $\Pi$  geht, so würde die Construction eine Neigung haben, sich um den Punkt  $F$  zu drehen. Die den Stab  $AF$  zusammendrückende Kraft wird auch dann durch  $\Pi \frac{l+l'}{h \sin \varphi}$  ausgedrückt und der Theil  $AA'$  des verticalen Stabes erleidet die Axenspannung  $\Pi \left\{ \frac{l+l'}{h \tan \varphi} - 1 \right\}$ . Dieser letztere Stab muss alsdann auf seinem Stützpunkte  $A'$  befestigt werden.

§ 544. Bei der in Fig. 129 dargestellten Construction ist das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte des horizontalen Stabes  $BB'$  aufgehängt, dessen Enden von festen Punkten gestützt werden, und der durch die Streben  $AD, A'D'$  verstärkt wird, die mit dem Stabe  $BB'$  verbunden sind und selbst von den festen Punkten  $A, A'$  gestützt werden. Indem das Gewicht  $\Pi$  den Stab  $BB'$  biegt und die Streben  $AD, A'D'$  zu-



sammendrückt, vertheilt sich dadurch die Wirkung dieses Gewichtes auf die vier festen Punkte. Auf demselben Wege, welcher bei verschiedenen, oben behandelten Fragen eingeschlagen wurde, würden sich die Bedingungen für die Biegung und den Bruch einer solchen

Construction finden lassen, da es sich aber in der Praxis weniger darum handelt, das Gewicht zu bestimmen, bei welchem der Bruch erfolgen würde, als eine Grenze zu kennen, über welche hinaus dieses Gewicht nothwendig liegen muss, so kann man hier und in ähnlichen Fällen auf folgende Weise die verwickelte Rechnung vermeiden, welche man sonst vornehmen müsste.

Man unterscheide bei der vorliegenden Construction zwei Systeme, von denen man sich ein jedes allein das Gewicht  $\Pi$  tragend denkt, wo sich dann bei jedem Systeme die Bedingungen für die Biegung und den Bruch sofort angeben lassen; nämlich 1) den Stab  $BB'$  mit den Stützpunkten  $B, B'$ , ohne Rücksicht auf die beiden Streben; 2) das Polygon  $ADD'A'$  mit den Stützpunkten  $A, A'$ , ohne Rücksicht auf die Verbindung des Theiles  $DD'$  der Schwelle  $BB'$  mit den Theilen  $BD, B'D'$  derselben. Da jedes dieser beiden Systeme für sich betrachtet schwächer ist, als die Construction, welche hier untersucht werden soll, so ist man sicher, dass das Gewicht, welches den Bruch der Construction bewirken würde, grösser ist, als das, welches den Bruch des stärksten dieser beiden Systeme bewirken würde.

Wenn der Stab  $BB'$  mit den Stützpunkten  $B, B'$  allein das Gewicht  $\Pi$  trüge, so müsste dieses Gewicht, dessen Werth durch die Bedingung bestimmt wird, dass der Stab nicht in  $C$  abgebrochen werden soll, nach § 122 berechnet werden.

Wenn das System  $ADD'A'$  allein das Gewicht  $\Pi$  trüge, ohne dass ein Druck auf die Punkte  $B, B'$  stattfände, so läge hier der Fall des § 536 vor. Bezeichnet man daher mit  $\alpha$  den Winkel  $BAD$ , so muss 1) damit das Gewicht  $\Pi$  nicht den Bruch des Stückes  $DD'$  in  $C$  veranlasse, dasselbe aus den Gleichungen in den §§ 413 und 414 bestimmt werden, wo  $a$  die Entfernung  $CD$  bezeichnet, und  $\frac{1}{2}\Pi$  und  $\frac{1}{2}\Pi \tan \alpha$  für  $P$  und  $Q$  an die Stelle gesetzt werden müssen; 2) muss das Gewicht  $\Pi$ , damit die beiden Streben demselben widerstehen können, nach den §§ 383 u. 403 bestimmt werden, wo  $\frac{\Pi}{2 \cos \alpha}$  als

der Druck anzusehen ist, welcher in der Richtung der Axe dieser Streben stattfindet.

In der Praxis wird die Gleichung in § 414 in der Regel sehr wenig von  $R' = \frac{1}{bc^2} (Qc + 6Pa)$ , oder, wenn man für  $P$ ,  $Q$  ihre obigen Werthe setzt, von

$$R' = \frac{11}{2bc^2} (c \tan \alpha + 6a)$$

abweichen. Andererseits folgt aus § 122, wenn man  $a'$  die Entfernung  $BB'$  nennt, durch Betrachtung des Gleichgewichtes des Stabes  $BB'$  mit den Stützpunkten  $B$ ,  $B'$ ,

$$R' = \frac{11 \cdot 6(a+a')}{2bc^2}.$$

Bei einem Stabe mit einem rechteckigen Querschnitt leistet also das System  $ADD'A'$  einen grössern Widerstand, als der Stab  $BB'$ , wenn  $\tan \alpha < \frac{6a'}{c}$  ist, vorausgesetzt, dass die Streben  $AD$ ,  $A'D'$  eine genügende Stärke besitzen.

§ 545. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Schwelle  $BB'$  und die Streben  $DE$ ,  $D'E'$  (Fig. 130) mit verticalen

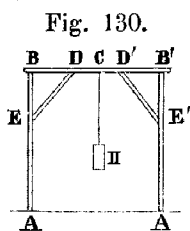


Fig. 130. Pfosten  $AB$ ,  $A'B'$  verbunden seien. Wären bei einer solchen Construction die untern Enden  $A$ ,  $A'$  der beiden Pfosten frei, so dass sie auf der Ebene, von welcher sie getragen werden, gleiten könnten, so würden die Streben dem Systeme nur ein stabiles Gleichgewicht verschaffen, ohne die Tragkraft desselben zu vermehren, und der Stab  $BB'$  würde auf die nämliche Weise zum Bruche in  $C$  angeregt werden, als ob die Streben nicht vorhanden wären. In der That wirkt in beiden Fällen in dem Punkte  $A$  eine von unten nach oben gerichtete Kraft  $\frac{1}{2}II$  mit dem Hebelarm  $BC$ , welche den Stab  $BB'$  in  $C$  abzubrechen sucht.

§ 546. Nimmt man im Gegentheil bei der in Fig. 130 dargestellten Construction die untern Enden  $A$ ,  $A'$  der

beiden Pfosten als fest an, so können diese Punkte auch einen Druck in schiefer Richtung aufnehmen, wodurch das Kraftmoment verringert wird, welches den Bruch des Stabes  $BB'$  in  $C$  zu bewirken sucht. Auf eine solche Construction lässt sich das in § 544 befolgte Verfahren anwenden, indem man zwei Systeme unterscheidet, von denen jedes einzeln das Gewicht  $\Pi$  tragen können muss; nämlich 1) den Stab  $BB'$ , in sofern er nur von den Pfosten  $AB, A'B'$  unterstützt wird, und 2) das Polygon  $EDD'E$ , welches sich in  $E, E'$  gegen dieselben Pfosten stützt.

Damit das erste System das Gewicht  $\Pi$  tragen könne, darf dieses Gewicht den Stab  $BB'$  nicht zerbrechen, wenn derselbe nur an seinen Enden unterstützt ist, und die Pfosten  $AB, A'B'$  müssen einem Drucke  $\frac{1}{2}\Pi$  in der Richtung ihrer Axe widerstehen.

Damit das zweite System dasselbe Gewicht tragen könne, müssen erstens das Stück  $DD'$  und die Streben  $DE, D'E'$  die nöthige Stärke besitzen, welche sich nach § 544 ergibt. Sodann beachte man, dass in dem Punkte  $E$  und in der Richtung  $DE$  ein Druck  $\frac{\Pi}{2\cos\alpha}$  stattfindet, welcher einer Horizontalkraft  $\frac{\Pi\tan\alpha}{2}$  und einer Verticalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  gleich gilt. Der Verticaldruck wird auf den Stützpunkt  $A$  übertragen, und die Horizontalkraft zerlegt sich in zwei andere, welche in  $A$  und  $B$  angreifen. Nennt man  $h$  und  $h'$  die Entfernungen  $AE$  und  $BE$ , so hat man  $\frac{\Pi h\tan\alpha}{2(h+h')}$  für die in  $A$  angreifende Composante, welche durch den Widerstand des Stützpunktes vernichtet wird, und  $\frac{\Pi h'\tan\alpha}{2(h+h')}$  für die in  $B$  angreifende Composante, welche eine Spannung in dem Theile  $BD$  hervorbringt. Es müssen daher zweitens die Theile  $BD, B'D'$  einer Spannung in der Richtung der Axe von  $\frac{\Pi h\tan\alpha}{2(h+h')}$  widerstehen können. Was drittens die verticalen Stäbe  $AB, A'B'$  anlangt, so kann man den Stab  $AB$  als in  $E$  festgehalten ansehen, während er an dem Ende  $A$  sollicitirt wird von einer Vertical-

kraft  $\frac{\Pi}{2}$  und einer Horizontalkraft, deren Moment, um eine Biegung des Stabes in  $E$  zu bewirken, gleich  $\Pi \frac{hh'tang\alpha}{2(h+h')}$  ist. Die Horizontalkraft, welche den Stab in  $B$  angreift, hat in Bezug auf den Punkt  $E$  ein eben so grosses Moment. Vernachlässigt man daher, wie in § 540, die Betrachtung der Krümmung der Stäbe, so wird, in Uebereinstimmung mit § 387, die Grenze der Werthe von  $\Pi$  durch die folgende Gleichung gegeben, wenn die verticalen Stäbe in den Bruchstellen  $E, E'$  für jede Flächeneinheit des Querschnittes keinen grössern Druck als  $K'$  erleiden sollen,

$$\frac{K'}{E} = \frac{\Pi}{2} \left\{ \frac{1}{E_0} + \frac{v' \cdot hh'tang\alpha}{\varepsilon(h+h')} \right\}.$$

Ist der Querschnitt der Stäbe ein Rechteck, so reducirt sich die Gleichung auf

$$K' = \frac{\Pi}{2bc^2} \left\{ c + \frac{6 \cdot hh'tang\alpha}{h+h'} \right\}.$$

Diese Formeln werden, wegen der vernachlässigten Krümmung der Stäbe, etwas zu grosse Werthe für  $\Pi$  geben, die aber in den gewöhnlichen Fällen der Praxis wenig von den wahren Werthen abweichen werden.

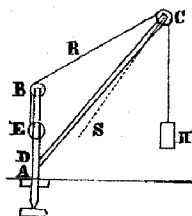
Ist das Gewicht  $\Pi$  so bestimmt worden, dass es von jedem der beiden genannten Systeme getragen werden kann, so wird es um so mehr von der in Rede stehenden Construction getragen werden können.

### Gleichgewicht der Krahne.

§ 547. Man unterscheidet unter den Krahnen zwei Arten: 1) diejenigen, deren Axe im Boden oder an der Mauer so befestigt ist, dass sie nicht von der Stelle gerückt werden können, und 2) die beweglichen Krahne, die frei auf den Boden stehen und von einem Orte zum andern transportirt werden können.

In Fig. 131 ist ein Krahn der ersten Art dargestellt, welcher nur aus dem Krahnbaum  $AB$  und dem geneigten

Fig. 131.



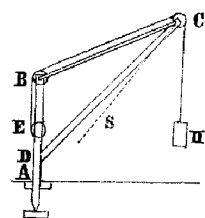
Stücke  $DC$  besteht, welches mit dem Baume so verbunden ist, dass sich der Winkel, den die beiden Theile mit einander bilden, nicht ändern kann. Der Baum hat an seinem untern Ende einen Zapfen, mittelst welchen er drehbar ist, und ein Halslager, wodurch er gehalten wird. Das Seil, mittelst welches das Gewicht  $\Pi$  aufgewunden wird, geht in  $C$  und  $B$  über Rollen und wickelt sich in  $E$  auf einen Haspel, dessen Achse an dem Kranbaum  $AB$  angebracht ist. Die Spannung  $R$  in dem Theile  $CB$  des Seiles kann etwas grösser oder kleiner als das Gewicht  $\Pi$  sein, je nachdem dieses Gewicht mittelst einer einfachen Rolle oder mittelst eines Flaschenzuges gehoben wird; die Resultante aus  $\Pi$  und der Spannung  $R$  wollen wir durch  $S$  bezeichnen. Den Stab  $CD$  muss man als nur in  $D$  festgehalten und in  $C$  von der Kraft  $S$  sollicitirt ansehen, man muss ihn daher dem in § 412 betrachteten Stabe gleichstellen, indem  $S$  für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft gesetzt wird. Sieht man von der Krümmung des Kranbaumes ab, so kann man den Theil  $BE$  des Baumes als einen Stab betrachten, der in  $E$  festgehalten und in  $B$  von der Resultanten aus den Spannungen in den beiden Theilen  $BC$ ,  $BE$  des Seiles sollicitirt wird. Der Theil  $DE$  widersteht auf dieselbe Weise, wie ein Stab, der in  $D$  festgehalten und in  $B$  von der Spannung  $R$  sollicitirt wird; derselbe muss daher den in § 415 betrachteten Stabe gleichgestellt werden, indem man  $R$  für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft, und  $DB$  für die mit  $a$  bezeichnete Entfernung setzt. Der Theil  $AD$  widersteht wie ein in  $A$  festgehaltener Stab, auf den das Gewicht  $\Pi$  wirkt; derselbe muss dem in § 406 betrachteten Stabe gleichgestellt werden, indem man für  $a$  und  $l$  respective die Entfernung  $AD$  und die horizontale Entfernung des Punktes  $C$  von dem Punkte  $A$  setzt. Was endlich den untersten Theil  $AA'$  des Kranbaumes anlangt, so beachte man, dass in  $A'$  gegen die Stütze ein horizontaler Druck entstehen muss, dessen Moment dem Momente des Gewichtes  $\Pi$  gleich sein

muss, wenn beide auf den Punkt  $A$  bezogen werden. Man muss daher den Theil  $AA'$  ansehen, als würde er in  $A$  festgehalten und in  $A'$  von der in Rede stehenden Horizontalkraft und einer Verticalkraft  $\Pi$ , welche den Theil  $AA'$  zusammendrückt, sollicitirt.

Die Richtung der Kraft  $S$  kann fast mit  $CD$  zusammenfallen, so dass der Verband in  $D$  sehr wenig in Anspruch genommen wird. Ein Krahn von dieser Art kann also eine ziemliche Solidität besitzen.

§ 548. Das Ende  $C$  des Stabes  $CD$  lässt sich durch das Band  $BC$  (Fig. 132) aufrecht halten und

Fig. 132.



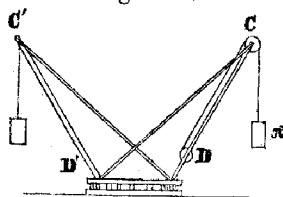
dann ist die Unveränderlichkeit des Winkels  $BDC$  nicht mehr von dem Verbande in  $D$  abhängig. In diesem Falle zerlege man die Resultante  $S$  aus dem Gewichte  $\Pi$  und der Spannung  $R$  des Seilzweiges  $BC$  in zwei Kräfte nach den Richtungen  $CD$  und  $CB$ . Der Stab  $CD$  widersteht, wie einer der beiden Stäbe, die in § 383 und § 389 betrachtet wurden, je nachdem dieser Stab  $CD$  sich frei um den Punkt  $D$  drehen kann oder nicht. Sieht man wieder von der Krümmung ab, welche der Krahnbaum annehmen kann, so muss der Theil  $BE$  als ein in  $E$  festgehaltener Stab angesehen werden, der in  $B$  von der Resultante aus den Spannungen der beiden Seilzweige  $BE$  und  $BC$  und von der Spannung des Bandes  $BC$  sollicitirt wird. Der Theil  $DE$  muss angesehen werden, als würde er in  $D$  festgehalten und in  $B$  von der Spannung  $R$  des Seilzweiges  $BC$  und von der Spannung des Bandes  $BC$  sollicitirt. Der Theil  $AD$  endlich, und der Theil  $AA'$  werden auf die oben angegebene Weise zum Bruch in  $A$  angeregt.

Das Stück  $CD$ , welches stets zusammengedrückt wird, muss von Holz oder von Gusseisen sein. Das Band  $BC$  kann, wenn es nur ausgedehnt wird, aus Stabeisen gemacht werden. Liegt aber die Resultante in dem Winkel  $BCD$ , so werden die Theile  $CD$ ,  $BC$  beide zusammengedrückt und müssen daher auch einer Druckkraft widerstehen können.



§ 549. Ein Krahn, der frei auf dem Boden stehen soll, ohne daran befestigt zu sein, muss so construirt werden, dass die Verticale, in welcher der Schwerpunkt der Gesamtlast liegt, stets innerhalb der Basis des Krahnes bleibt, wesshalb gewöhnlich die Anwendung eines Gegengewichtes nöthig wird.

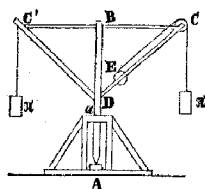
Fig. 133.



In Fig. 133 ist ein solcher Krahn dargestellt, der von einer kreisförmigen mit Rädern versehenen Scheibe getragen wird, wodurch der Krahnbau unnöthig gemacht ist. Die Stärke der Theile  $CD$  und  $C'D$  ist nach § 532 zu bestimmen.

§ 550. In Fig. 134 ist ein Krahn dargestellt mit drehbarem Baume, der in  $A$  einen Zapfen hat und in  $a$  von einem Halsbände gehalten wird. Das ganze Gewicht der Construction wird auf den Baum nach dem Punkte  $A$  übertragen. Das Stück  $CC'$  ist ein einfaches, horizontales Band, welches in  $B$  an dem Ende des Baumes befestigt werden muss. Die Stärke der Theile  $CD$ ,  $BC$ , oder  $C'D$ ,  $BC'$  ist nach § 532 zu bestimmen.

Fig. 134.

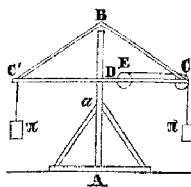


Der Theil  $BD$  des Baumes widersteht, wie ein Stab, der in  $D$  festgehalten und in  $B$  von einer Kraft sollicitirt wird, die gleich der Differenz der Spannungen in den Theilen  $BC$ ,  $BC'$  des Zugseiles ist. Der Theil  $Da$  widersteht, wie ein Stab, der in  $a$  festgehalten und von dem Totalgewichte der Construction sollicitirt wird; hat man daher die Entfernung der Axe  $AB$  von dem Schwerpunkte der sämmtlichen Gewichte gefunden, die von dem Punkte  $D$  getragen werden, so stelle man diesen Theil  $Da$  dem in § 406 betrachteten Stabe gleich, indem man für  $\Pi$  die Summe dieser sämmtlichen Gewichte, für  $l$  die horizontale Entfernung ihres Schwerpunktes von dem Punkte  $a$ , und für  $a$  die Entfernung  $Da$  einsetzt. Der Theil  $aA$  des Baumes endlich widersteht, wie ein in  $a$  festgehaltener Stab, dessen Ende  $A$  sollicitirt wird von einer Vertikalkraft, die dem Gewichte der Construction

gleich ist, und einer Horizontalkraft, die gross genug ist, um diesem Gewichte das Gleichgewicht gegen eine Drehung um den als fest angenommenen Punkt  $a$  zu halten.

§ 551. Bei der in Fig. 135 dargestellten Construction ist der Baum nicht drehbar und er trägt das Gewicht

Fig. 135.

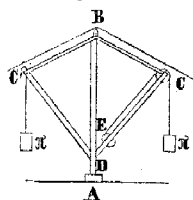


der Construction auf seinem obern Ende  $B$ . Die Stücke  $BC$  und  $BC'$  sind zwei geneigte Bänder und  $CC'$  ist ein horizontales Stück, welches den Baum mittelst eines Halsbandes umfasst. Durch die Wirkung des Gewichtes II wird in dem Bande  $BC$  eine Spannung erzeugt, die durch die Bedingung bestimmt wird, dass die verticale Composante dieser

Spannung gleich II sein muss. Das Stück  $CD$  wird in der Richtung seiner Länge durch eine Kraft zusammengedrückt, die der horizontalen Composante dieser selben Spannung gleich ist. Analoge Wirkungen hat der Punkt  $C'$  zu erleiden. Die Stücke  $CD$ ,  $C'D$  müssen dem in § 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden. Der Theil  $CE$  des Stückes  $CD$  erleidet ausser der Zusammendrückung durch die Wirkung des Gewichtes II noch einen Druck in der Richtung der Axe, welcher der Spannung des Seilzweiges  $CE$  gleich ist. Der Theil  $BD$  des Krahnbaumes widersteht wie ein Stab, der in  $D$  festgehalten und in  $B$  sollicitirt wird, die der Resultante aus den Spannungen der Bänder  $BC$ ,  $BC'$  gleich ist. Die Theile  $Da$  und  $aA$  werden hier eben so in Anspruch genommen und widerstehen auf dieselbe Weise, wie es in dem vorhergehenden Paragraphen angegeben wurde.

§ 552. Es soll endlich noch der bewegliche Krahn besprochen werden, den Fig. 136 darstellt, und bei

Fig. 136.



welchem das obere Ende des Baumes durch starke Seile gehalten wird. Die geneigten Stücke  $CD$ ,  $C'D$  sind mit dem untern Ende des Baumes in Verband und werden durch die Bänder  $BC$ ,  $BC'$ , die an dem obern Ende des Baumes befestigt sind, gehalten. Der Axendruck bei den Stücken  $CD$ ,  $C'D$  und die Spannung der Bänder  $BC$ ,  $BC'$

wird wie in den vorhergehenden Fällen bestimmt. Der Baum  $AB$  kann sich nach der einen oder andern Seite überbiegen, und er wird dazu durch die Differenz der horizontalen Composanten der Spannungen der Bänder  $BC$ ,  $BC'$  angeregt. Es muss daher stets in den Seilen, welche das obere Ende des Baumes halten, eine solche Spannung stattfinden, dass durch die horizontale Componente die in Rede stehende Differenz vernichtet wird. Ist diese Bedingung erfüllt, so muss der Baum dem in § 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden indem man für die in jenem Paragraphen mit  $Q$  bezeichnete Kraft die Summe aus der verticalen Composanten der Spannungen der beiden Bänder  $BC$ ,  $BC'$  und denen der Spannungen der Seile einsetzt.

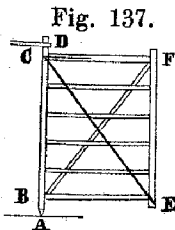
## Neuntes Kapitel.

### Widerstand der Schleusenthore.

§ 553. Bei den Schleusenthoren haben die einzelnen Theile zu gleicher Zeit die Wirkung ihres eigenen Gewichtes und den horizontalen Druck des Wassers auszuhalten. Die Untersuchung wird sich in dem Folgenden auf solche Thore beschränken, die die Form eines rechteckigen Rahmens haben, dessen verticale Seiten durch horizontale Querhölzer verbunden sind, auf welche die Bohlen genagelt sind.

### Wirkung der Schwere auf die Schleusenthore.

§ 554. In Fig. 137 ist ein Schleusenthor dargestellt, dessen Haupttheil in dem Rahmen  $BCFE$  besteht. Die Wendesäule  $BC$  steht in  $A$  auf einem Zapfen und



geht in  $D$  durch ein Halsband, welches von mehreren Eisenstangen gehalten wird, die eine solche Spannung besitzen müssen, dass die Resultante der verschiedenen Spannungen dem Gewichte des Thores gegen eine von oben nach unten gerichtete Drehung um den Punkt  $A$  das Gleichgewicht hält.

§ 555. Da die Säule  $BC$  mittelst des Halsbandes  $D$  in verticaler Stellung erhalten wird, so ruht das ganze Gewicht auf dem untern Theile dieser Säule und der Stütze  $A$ . Durch die Wirkung der Schwere sucht sich von der Säule  $BC$  der ganze übrige Theil des Thores durch eine Drehung um den Punkt  $B$  abzulösen. Diese Bewegung lässt sich durch Bänder verhindern, mittelst welcher der oberste Querriegel oder auch sämtliche Querriegel mit der Säule  $BC$  verbunden werden, wo dann die Wirkung der Schwere der Säule  $EF$  nur herabzuziehen und die Form des Rechteckes in die eines schiefwinkligen Parallelogrammes zu verändern sucht. Damit nun die Construction die nöthige Solidität besitze, muss 1) das Zimmerwerk des Thores sich nicht von der Wendesäule  $BC$  ablösen können, und 2) muss die rechtwinklige Gestalt des Rahmens unverschiebbar sein.

§ 556. Den eben aufgestellten Bedingungen geschieht Genüge, wenn der oberste Querriegel  $EF$  mit der Wendesäule  $BC$  durch ein eisernes Band verbunden wird, oder wenn man in dem Rahmen die Strebe (*bracon*)  $BF$  anbringt, wo übrigens die Querriegel als drehbar um ihre Verbandstellen angesehen werden können. Nennt man  $G$  ein Gewicht, welches, wenn es in  $F$  aufgehängt würde, in Bezug auf den Punkt  $B$  dasselbe Moment hätte, wie das Gewicht des Schleusenthores, und  $\varphi$  den Winkel  $CBF$ , so hat man  $\frac{G}{\cos \varphi}$  für den Druck, welchen die Strebe  $BF$  in der Richtung ihrer Axe erleidet, so wie  $G \tan \varphi$  für die Axenspannung in dem obersten Querriegel  $CF$  und dem Bande  $C$ .

§ 557. Denselben Bedingungen kann auch Genüge geschehen mittelst eines schräg liegenden Ankers  $CE$ , der in  $C$  an der Wendesäule befestigt wird. Die Querriegel können auch hier als frei drehbar um ihre Verbandstellen mit den Säulen angesehen werden. Die Axenspannung des Ankers drückt sich durch  $\frac{G}{\cos \varphi}$  aus, wenn man  $\varphi$  die Winkel  $CEF$  nennt.

§ 558. Will man weder eine Strebe (*bracon*) noch einen Anker anwenden, so muss wenigstens einer unter

den Querriegeln (z. B. der oberste  $CF$ ) mit der Wendesäule so verbunden werden, dass eine Drehung um die Verbandstelle nicht stattfinden kann. Diese Bedingung genügt, um dem Rahmen die rechteckige Form zu erhalten. Der Querriegel, dessen Verband auf eine solche Weise ausgeführt ist, trägt, wenn alle übrigen Querriegel frei drehbar bleiben, das ganze Gewicht des Schleusenthores mit Ausnahme der Wendesäule, und er widersteht wie ein mit dem einen Ende horizontal eingemauerter Stab, über dessen Länge die Belastung gleichförmig vertheilt ist.

Die Festigkeit des Ganzen gewinnt, wenn man mit der Wendesäule auf die oben angegebene Weise nicht nur den obersten Querriegel  $CF$ , sondern auch den untersten  $BE$ , oder selbst alle übrigen Querriegel verbindet. Das Gewicht des Thores vertheilt sich sodann auf die verschiedenen, so verbundenen Querriegel.

§ 559. Eine noch grössere Festigkeit wird erhalten, wenn man die Querriegel nicht nur mit der Wendesäule  $BC$ , sondern auch mit der Anschlagsäule  $EF$  so verbindet, dass ihre Richtung in der Verbandstelle sich nicht ändern kann.

§ 560. Aus dem Vorhergehenden erhellet, dass die Querriegel sich in drei verschiedenen Gleichgewichtszuständen befinden können.

1. Sind die Querriegel, so mit den beiden Säulen verbunden, dass sie sich frei um ihre Verbandstellen drehen können, so widerstehen sie auf dieselbe Weise, wie ein Stab, der mit seinen Enden frei auf Stützen liegt. Demnach muss man nach § 90 schliessen, dass die grösste Zusammendrückung oder Ausdehnung der Fasern, welche in einem beliebigen Punkte in Folge der Biegung in der Verticalebene eintritt, gleich

$$v' \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{2\epsilon} (a^2 - x^2)$$

ist, wenn  $p$  das von der Einheit der Länge getragene Gewicht,  $a$  die halbe Länge des Querriegels,  $x$  die Entfernung des betrachteten Punktes von der Mitte des Querriegels,  $\epsilon$  das Widerstandsmoment gegen eine Biegung in der Verticalebene und  $v'$  die Entfernung der

äussersten Fasern, welche zusammengedrückt oder ausgedehnt werden, von der durch den Querschnitt gehenden Gleichgewichtssaxe bezeichnet.

§ 561. 2. Sind die Querriegel nur mit der Wendesäule so verbunden, dass sie sich nicht um die Verbandstelle drehen können, so widerstehen sie auf dieselbe Weise, wie ein Stab, dessen eines Ende eingemauert ist. Demnach ergibt sich aus § 89 für die grösste Zusammendrückung der Fasern

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\};$$

wo  $a$  die Länge der Querriegel und  $x$  die Entfernung des betrachteten Punktes von dem festgehaltenen Ende bezeichnet.

§ 562. 3. Sind die Querriegel mit beiden Säulen so verbunden, dass ihre Richtungen in den Verbandstellen sich nicht ändern können, so widerstehen sie auf dieselbe Weise, wie ein Stab, dessen eines Ende eingemauert ist, und für dessen anderes Ende die Bedingung besteht, dass hier die Tangente an die Curve, welche die Axe des Stabes während der Biegung bildet, horizontal bleiben soll. Der Gleichgewichtszustand eines solchen Stabes lässt sich, wenn man die Belastung als gleichförmig über seine Länge vertheilt ansieht, auf die folgende Weise näher bestimmen.

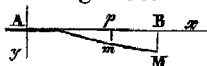
Man nenne

- $p$  das constante Gewicht, welches von jeder Längeneinheit des Stabes  $AM$  (Fig. 138) getragen wird;
- $x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap$ ,
- $pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve,
- welche die Axe des Stabes bildet;

$a, f$  die Abscisse  $AB$  und die Ordinate  $MB$  des Endpunktes  $M$  der Curve;

$\varepsilon$  behalte die in § 80 angegebene Bedeutung.

Fig. 138.



Die Gleichgewichtsgleichung des Stabes  $AM$  ist alsdann

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + A,$$

wo  $A$  eine Constante bezeichnet. Es folgt hieraus

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\} + Ax;$$

und bestimmt man die Constante  $A$  so, dass in dem Punkte  $M$   $\frac{dy}{dx} = 0$  wird, wenn man  $x = a$  setzt, woraus  $A = -\frac{pa^2}{6}$  folgt, so hat man

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2 x}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\},$$

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{6} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\},$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{24}.$$

Die Durchbiegung des Endpunktes  $M$  ist nur ein Drittheil so gross, als sie sein würde, wenn dieser Punkt ganz frei wäre, wie dies in § 89 angenommen wurde. Die grösste Zusammendrückung der Fasern ist

$$\nu' \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\nu' \cdot p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2}{3} - ax + \frac{x^2}{2} \right\},$$

wo  $a$  die Länge des Querholzes und  $x$  die Entfernung des betrachteten Punktes von dem festgehaltenen Ende ist.

### Untersuchung des Falles, in welchem die Schlensenthore zum Theil von einer Rolle getragen werden.

§ 563. Befindet sich unter der Säule  $EF$  (Fig. 137) oder in der Nähe derselben eine Rolle, durch welche das Thor mit getragen wird, so hat der Rahmen  $BCEF$  keine Neigung, sich zu verschieben. Man kann dann die Strebe  $BF$ , so wie den Anker  $CE$  weglassen und die Construction wird doch noch eine genügende Solidität besitzen, wenn nur die Querriegel mit den beiden Säulen durch Bänder verbunden werden.

§ 564. Wird die Anschlagsäule  $EF$  auf solche Weise unterstützt, so widerstehen die Querriegel den Gewichten, welche sie zu tragen haben, im Allgemeinen auf eine andere Weise, als in § 560 u. folgd. angegeben wurde.

1. Sind die Querriegel mit den beiden Säulen so verbunden, dass sie sich frei um ihre Verbandstellen

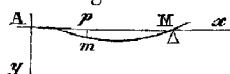
drehen können, so lässt sich das in § 560 Gesagte anwenden.

§ 565. 2. Sind die Querriegel nur mit der Wendesäule so verbunden, dass sie sich nicht um ihre Verbandstellen drehen können, so widerstehen sie, wie ein Stab, der mit dem einen Ende horizontal eingemauert ist und mit dem andern Ende auf einer Stütze ruht. Der Gleichgewichtszustand eines solchen Stabes lässt sich auf die folgende Weise näher bestimmen.

Man nenne

$p$  das constante Gewicht, mit dem jede Einheit der Länge des Stabes  $AM$  (Fig. 139) belastet ist;

Fig. 139.



$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve, welche die Axe des Stabes bildet;

$a$  die Länge  $AM$ ;

$\Pi$  den Druck, welchen der Stab auf die an dem Ende  $M$  befindliche Stütze ausübt;

$\varepsilon$  behalte die in § 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung ist dann

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi (a - x),$$

woraus

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\} - \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}.$$

Bestimmt man das Gewicht  $\Pi$  aus der Bedingung, dass  $y=0$  werden soll, wenn man  $x=a$  setzt, so hat man

$$\Pi = \frac{3}{8} pa \text{ und}$$

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{16} - \frac{5ax^3}{48} + \frac{x^4}{24} \right\}.$$

Die grösste Zusammendrückung der Fasern ist

$$\varepsilon' \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varepsilon' \cdot p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2}{8} - \frac{5ax}{8} + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

§ 566. 3. Sind die Querriegel mit beiden Säulen so verbunden, dass sie sich nicht um die Verbandstellen drehen können, so widerstehen sie, wie ein Stab, dessen



beide Enden eingemauert sind. Unter Beibehaltung der in dem vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Benennungen hat man für die Gleichgewichtsgleichung

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi (a - x) + A,$$

wo  $A$  eine Constante bezeichnet. Man erhält hieraus

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dy}{dx} &= p \left\{ \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} + Ax, \\ \epsilon y &= p \left\{ \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\} - \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + A \frac{x^2}{2}; \end{aligned}$$

und bestimmt man die Constanten  $\Pi$  und  $A$  so, dass man  $\frac{dy}{dx} = 0$  und  $y = 0$  für den Endpunkt, wo  $x = a$  ist, erhält, so hat man  $\Pi = \frac{pa}{2}$ ,  $A = \frac{pa^2}{12}$ , und

$$\epsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{x^4}{24} \right\}.$$

Setzt man  $x = \frac{a}{2}$ , so erhält man  $\frac{p}{\epsilon} \frac{a^4}{384}$  für die Ordinate des Mittelpunktes oder den Pfeil der Curve. Vergleicht man dieses Resultat mit dem des § 90, so sieht man, dass diese Durchbiegung nur  $\frac{1}{8}$  so gross ist, als sie sein würde, wenn beide Enden frei auf Stützen lägen. Vergleicht man das Resultat aber mit dem des § 373, so findet man, dass hier die Durchbiegung halb so gross ist, als sie sein würde, wenn das Gewicht  $pa$  in der Mitte des Stabes aufgehängt wäre, anstatt gleichförmig über die Länge desselben vertheilt zu sein.

Die grösste Zusammendrückung der Fasern ist

$$\nu' \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\nu' \cdot p}{\epsilon} \left\{ \frac{a^2}{12} - \frac{ax}{2} + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

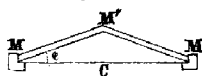
### Wirkung des Wasserdruckes auf die Schleusenthore.

§ 567. Ist das Thor geschlossen und so dem Wasserdrucke ausgesetzt, so sind die beiden Säulen  $AD$ ,  $EF$  (Fig. 137) in ihrer ganzen Höhe gestützt, und der Druck des Wassers kann daher nur auf die Querriegel so wirken, dass eine Biegung derselben eintritt. Bei der Berechnung des Wasserdruckes muss man einen Unterschied machen zwischen den einfachen Thoren und den Stemmthoren (wo zwei Flügel unter einem Winkel zu-

sammenstossen). Bei den ersteren lässt sich die Wirkung des Wasserdruckes auf die einzelnen Querriegel mit der eines Gewichtes vergleichen, welches gleichförmig über die Länge eines horizontalen Stabes vertheilt ist, der mit seinen Enden auf Stützen ruhet. Bei den letzteren entsteht in der Richtung der Länge der Querriegel ein Druck, der mit in Betracht gezogen werden muss.

§ 568. Man nehme jetzt an, dass jeder Querriegel erstens den Druck aufnehme, den das Wasser auf den Raum ausübt, der von den beiden Linien begrenzt wird, die sich in dem halben Abstände der beiden nächsten Querriegel befinden; so wie zweitens den von den beiden Thorflügeln auf einander gegenseitig ausgeübten Druck, der sich in Folge dieses Wasserdruckes ergibt. Nennt man  $p_1$  den Druck, welcher in Folge des Wasserdruckes auf jede Einheit der Länge eines beliebigen Querriegels stattfindet,  $2a$  diese Länge  $MM'$  (Fig. 140) und  $\varphi$  den Winkel  $CMM'$ , so hat man  $p_1 2a$  für den Druck normal auf  $MM'$ , und  $p_1 a$  für die Componenten, denen an den Enden  $M$  und  $M'$  das Gleichgewicht gehalten werden muss. Der Druck, den zwei Querriegel  $MM'$  in  $M'$  gegen ein-

Fig. 140.

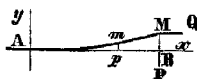


ander ausüben, ist also eine parallel zu  $CM$  gerichtete Kraft, deren auf  $MM'$  normal stehende Componente gleich  $p_1 a$  ist. Dieser Druck ist also  $\frac{p_1 a}{\sin \varphi}$  und seine

Componente in der Richtung  $MM'$  ist  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$ . Man muss daher den Riegel  $MM'$  wie einen Stab ansehen, der mit den Enden auf Stützen ruhet und mit einem über seine Länge gleichförmig vertheilten Gewichte belastet ist, während er zugleich einen Druck  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$  in der Richtung seiner Axe erleidet.

§ 569. Jede Hälfte eines solchen Stabes widersteht also wie ein Stab  $AM$  (Fig. 141), der in  $A$  horizontal eingemauert und mit einem gleichförmig über seine Länge vertheilten Gewichte belastet ist, während er zugleich in  $M$  von einer von unten nach oben wirkenden Verticalkraft  $P$  und einer Horizontalkraft  $Q$  sollicitirt wird.

Fig. 141.



Man nenne

- $x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap$ ,  
 $pm$  eines beliebigen Punktes der Curve  $AM$ ;  
 $a$  die Entfernung  $AB$ ;  
 $f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes  $M$ ;  
 $p_1$  das Gewicht, welches von der Einheit der Länge  
 des Stabes getragen wird;  
 $\varepsilon$  behalte die in § 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung ist dann

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p_1 \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a-x) + Q(f-y),$$

oder, wenn man beachtet, dass in dem vorliegenden Falle  $P=p_1 a$  ist,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p_1}{2\varepsilon} (a^2 - x^2) + \frac{Q}{\varepsilon} (f-y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f-y = A \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} (x+B) - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} - \frac{p_1}{2Q} (a^2 - x^2),$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt  $A$  muss  $x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=0$  sein, und für den Punkt  $B, x=a, y=f$ ; daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$f = A \sin B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} - \frac{p_1 a^2}{2Q},$$

$$0 = A \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cos B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

$$0 = A \sin(a+B) \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2};$$

woraus folgt

$$\cos B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 0, \quad \sin B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 1, \quad A = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2 \cos a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}},$$

$$f = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - 1 \right\} - \frac{p_1 a^2}{2Q};$$

und für die Gleichung der Curve,

$$y = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos \alpha \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - \frac{p_1 x^2}{2Q},$$

worin man für  $Q$  seinen Werth  $\frac{p_1 a}{\varepsilon \tan \varphi}$  setzen muss.

§ 570. Mit Hülfe der in § 387 gegebenen Regeln lassen sich die Dimensionen des Querschnittes so bestimmen, dass der Stab der in Rede stehenden Wirkung widerstehen kann. Der Werth von  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  wird ein Maximum in dem Punkte  $A$  und ist hier

$$\frac{\tan \varphi}{a} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\frac{p_1 a}{\varepsilon \tan \varphi}}} - 1 \right\}.$$

Soll daher der grösste Druck, den die Fasern für jede Einheit der Querschnittsfläche erleiden, die Grenze  $R'$  nicht übersteigen, so hat man, unter Beibehaltung der in dem citirten Paragraphen angegebenen Benennungen, die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{p_1 a}{E \omega \cdot \tan \varphi} + \frac{v' \cdot \tan \varphi}{2a} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\frac{p_1 a}{\varepsilon \tan \varphi}}} - 1 \right\}.$$

### Gleichzeitige Wirkung der Schwere und des Wasserdruckes auf die Schleusenthore.

§ 571. Durch das Gewicht der Construction wird bei den Querriegeln eine Biegung in der verticalen, und durch den Druck des Wassers eine Biegung in der horizontalen Ebene bewirkt. Da diese beiden Biegungen sehr klein sind, so kann man die Verlängerungen und Verkürzungen, welche als die gemeinschaftliche Folge derselben eintreten, als die Summe derjenigen Veränderungen ansehen, welche jede Biegung für sich bewirken würde. Die Längenveränderungen, welche wegen der verticalen Biegung eintreten, finden sich in § 560 u. folgd. angegeben. Um also den Totalwerth der Zusammendrückung zu erfahren, welche die Fasern wegen der beiden Biegungen erleiden, muss man einen der für  $v' \frac{d^2 y}{dx^2}$

in jenem Paragraphen gegebenen Werthe zu dem Werthe hinzufügen, welcher für dieselbe Grösse sich aus der Gleichung in § 569 ergibt. Die Werthe, welche man für die Summe erhält, werden je nach den einzelnen Punkten der Länge verschieden sein, und der grösste derselben darf den Bruch  $\frac{R'}{E}$  nicht übertreffen, wenn der Druck auf jede Flächeneinheit der Fasern die Grenze  $R'$  nicht übersteigen soll.

§ 572. In dem Falle z. B., welcher in den §§ 560 und 564 untersucht wurde, in welchem die Querhölzer am meisten in Anspruch genommen werden, findet die grösste Längenänderung der Fasern, sowohl in der verticalen, als in der horizontalen Richtung, in der Mitte der Länge der Querriegel statt. Setzt man einen rechteckulären Querschnitt voraus und nennt  $b$  die Breite und  $c$  die Höhe desselben, so hat man als Gleichung, von welcher die Dimensionen des Querschnittes abhängen

$$\frac{R'}{E} = \frac{3pa^2}{Ebc^3} + \frac{p_1a}{Ebc \cdot \tan \varphi} + \frac{btan \varphi}{2a} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{12p_1a}{Eb^3c \cdot \tan \varphi}}} - 1 \right\}.$$

§ 573. Nennt man  $l$  die Entfernung  $CM$  (Fig. 140), so hat man  $a = \frac{l}{2\cos \varphi}$  und aus der vorhergehenden Gleichung wird

$$\frac{R'}{E} = \frac{3pl^2}{4Ebc^2 \cdot \cos^2 \varphi} + \frac{p_1l}{2Ebc \cdot \sin \varphi} + \frac{b \sin \varphi}{l} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{l}{2\cos \varphi} \sqrt{\frac{6p_1l}{Eb^3c \sin \varphi}}} - 1 \right\}.$$

### Gekrümmte Schleusenthore.

§ 574. Zuweilen giebt man den Thoren, welche den Druck des Wassers aufnehmen sollen, eine Krümmung in der horizontalen Richtung. Diese Krümmung ist schwach genug, um Alles, was in § 554 u. folgd. über den Widerstand gegen die verticale Wirkung der Schwere gesagt wurde, auch bei einer solchen Anordnung der Thore anwenden zu können.

Fig. 142.



§ 575. Was den Druck des Wassers auf die gekrümmten Querriegel anlangt, so wollen wir annehmen, dass die Form  $MEM'$  (Fig. 142) dieser Stücke ein Kreisbogen sei.

Man nenne

$p_1$  den Normaldruck des Wassers auf eine Einheit der Länge eines Querriegels;

$l$  die Entfernung  $CM$ ;

$a$  die Hälfte  $MD$  der Sehne  $MM'$ ;

$d$  den Pfeil  $DE$  der Curve;

$r$  den Halbmesser des Bogens  $MEM'$ ;

$\varphi$  den Winkel  $CMM'$ .

Man hat dann nach § 306 für den Druck in der Richtung der Curve, welcher sich wegen des Wasserdruckes ergibt,  $p_1 r$  oder

$$p_1 \frac{a^2 + d^2}{2d}.$$

Sieht man die Curve als einen Bogen an, der sich mit den beiden Enden  $M, M'$  gegen feste Punkte stützt, und beachtet, dass der Winkel, den die Curve in diesen Punkten mit  $MM'$  bildet,  $\frac{2ad}{a^2 + d^2}$  als Sinus, und  $\frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2}$  als Cosinus hat, so sieht man, dass der Druck der Curve gegen diese festen Punkte die Kräfte

$$p_1 \frac{a^2 - d^2}{2d} \text{ und } p_1 a$$

resp. als die beiden Composanten hat, welche parallel und normal zu  $MM'$  gerichtet sind.

Andererseits findet nach § 568, ungeachtet der Krümmung der Querriegel, in  $M'$  ein Druck  $\frac{p_1 a}{\sin \varphi}$  derselben gegen einander statt, wodurch ein Druck  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$  in der Richtung  $MM'$  hervorgebracht wird. Wenn daher die Relation besteht

$$\frac{p_1 a}{\tan \varphi} = p_1 \frac{a^2 - d^2}{2d},$$

woraus

$$d = a \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad r = \frac{a}{\sin \varphi}$$

folgt, so ist die Kraft, welche aus dem Wasserdrucke resultirt, gleich der Kraft, welche sich dadurch ergibt, dass die beiden Thorflügel sich gegen einander stützen, und die gekrümmten Querriegel haben keine Neigung, sich zu biegen, sondern werden nur in der Richtung

ihrer Länge zusammengedrückt. Ist die Form des Thores so bestimmt, dass dieser Bedingung Genüge geschieht, so gehört die Curve der beiden Flügel zu einem Kreisbogen, welcher durch die drei Punkte  $M, M', M$  geht, und der Druck in der Richtung der Länge der Curve ist  $\frac{p_1 a}{\sin \varphi}$ .

§ 576. Um daher die Stärke der Querriegel so abzumessen, dass sie der gleichzeitigen Wirkung der Schwere und des Wasserdruckes widerstehen können, muss man die grösste Zusammendrückung der Fasern, welche durch die verticale Biegung verursacht wird (und die nach den § 560 u. folgd. gegebenen Formeln zu berechnen ist) zu der Grösse  $\frac{p_1 a}{E \omega \sin \varphi}$  hinzufügen und die Summe gleich  $\frac{R'}{E}$  setzen.

§ 577. In dem Falle z. B., welcher in den §§ 560 und 564 untersucht wurde, würde man anstatt der Gleichung des § 572 hier haben

$$R' = \frac{3pa^2}{bc^2} + \frac{p_1 a}{bc \sin \varphi}.$$

§ 578. Setzt man  $\frac{l}{2 \cos \varphi}$  für  $a$  an die Stelle, so wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$R' = \frac{3pl^2}{4bc^2 \cos^2 \varphi} + \frac{p_1 l}{2bc \sin \varphi \cdot \cos \varphi}.$$

Macht man von diesen Formeln Gebrauch, so wird man finden, dass bei grossen Thoren es vortheilhaft ist, gekrümmte Querriegel anzuwenden.

## Zehntes Kapitel.

### Widerstand der hölzernen und eisernen Brücken.

§ 579. Die Bahn der hölzernen Brücken wird von mehreren Rippen oder Tragwänden getragen, die entweder aus einem Systeme von horizontalen und geneigten,

geraden Stücken gebildet werden, oder aus einer Verbindung von gekrümmten Stücken bestehen, die einen Bogen bilden, dessen Convexität nach oben gekehrt. Diese Rippen unterstützen die Brückenbahn entweder von unten oder tragen sie von oben (Sprengwerke, Hängewerke). Bei der Ausführung solcher Constructionen sind besonders die drei folgenden Bedingungen zu berücksichtigen: 1) muss das Gleichgewicht ein stabiles sein; 2) müssen die einzelnen Stücke die nöthige Stärke besitzen, um sowohl das bleibende Gewicht der Construction, als die (zufälligen) Belastungen, welche ausserdem über die ganze Fläche der Brückenbahn vertheilt werden könnten, tragen zu können; 3) müssen auch die zufälligen Belastungen getragen werden können, die auf bestimmte Punkte der Bahn gebracht werden könnten.

### Von den Brücken, welche von Balken und Streben getragen werden.

§ 580. Der einfachste Fall ist der, wo die Weite zwischen den Stützpunkten wenig beträchtlich ist und man daher für jede Rippe mit einem einzigen Balken ausreicht, von dem die Bahn getragen wird. Die Stärke dieses Balkens lässt sich nach den §§ 125 und 126, 359 u. folgd. berechnen.

§ 581. Ist die Entfernung der Stützpunkte zu gross, als dass ein einfacher Balken ausreichte, so versichert man diesen durch Streben (Fig. 143). Der Verticaldruck,

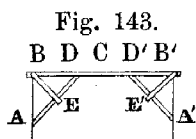


Fig. 143.

den die Streben an ihren oberen Enden erleiden, sucht diese Stücke um ihre unteren Enden zu drehen und es muss in dem Theile  $DD'$  des Balkens nothwendig eine gewisse Pressung stattfinden, wenn diese Bewegung verhindert werden soll. Man kann sich die Drehung der Streben auch durch die Wirkung einer Spannung in den Theilen  $BD, B'D'$  des Balkens verhindert denken, dann müssen aber die Enden  $B, B'$  dieses Stückes an den Brückenpfeilern befestigt sein. Da nun die Enden des Balkens meistens einfach auf den Pfeilern aufliegen, so ist es dem Gleichgewichtszustande dieser Constructionen angemessen, eine Zusammendrückung des Theiles  $DD'$  anzunehmen.



Der Verband der Streben mit dem Balken in den Punkten  $D, D'$  vermindert die Tragkraft des Letzteren, und man darf demselben in diesen Punkten keinen eben so grossen Widerstand voraussetzen, als er an allen andern Stellen leistet. Der grössern Einfachheit wegen denke man sich die Theile des Balkens in  $D$  und  $D'$  gänzlich von einander getrennt. Nimmt man nun an, dass das Eigengewicht der Construction und die Belastungen über die Strecke  $BB'$  gleichförmig vertheilt seien, so widerstehen die Theile  $BD, B'D'$  wie ein Stab, dessen Enden auf Stützen liegen. Die obern Enden  $D, D'$  der Streben tragen die Hälfte von dem Gewichte, welches zu den Strecken  $CD, CD'$  gehört. Nennt man

$p$  die Belastung des Balkens für jede Längeneinheit;

$a, a'$  die Längen  $CD, BD$ ;

$\alpha$  den Winkel  $BAD$ ,

so hat man  $p(a + \frac{1}{2}a')$  für den Verticaldruck in  $D$ ,  $\frac{p(a + \frac{1}{2}a')}{\cos \alpha}$  für die Pressung in der Richtung  $DA$  der Strebe und  $p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha$  für die Pressung in dem Theile  $DD'$ . Die Streben  $AD, A'D'$  können den Stäben gleichgestellt werden, welche in § 383 u. folgd. betrachtet wurden, und ihre Stärke lässt sich nach dem in § 402 u. folgd. Gesagten bestimmen.

§ 582. Das Stück  $DD'$  muss man als ein Prisma ansehen, das mit seinen Enden auf Stützen ruht, in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird und zugleich mit einem Gewichte  $p$  auf jeder Längeneinheit gleichförmig belastet ist. Die Hälfte  $CD$  dieses Stückes muss man daher dem Stabe  $AM$  (Fig. 141) gleichstellen, welcher horizontal festgehalten und auf die in § 569 bezeichnete Weise in Anspruch genommen wird. Die in jenem Paragraphen angenommene Analyse kann daher hier Anwendung finden, so dass, wenn man  $p$  für  $p_1$  schreibt, die Gleichung der Curve ist

$$y = \frac{px}{Q^2} \cdot \frac{1 - \cos x \sqrt{\frac{Q}{s}}}{\cos \alpha \sqrt{\frac{Q}{s}}} - \frac{px^2}{2Q},$$

wo man für  $Q$  den Werth  $p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha$  der Pressung in der Axe des Stückes zu setzen hat.

Als die Gleichung zur Bestimmung der Dimensionen dieses Stückes hat man, wie in § 570,

$$\frac{R'}{E} = \frac{p(a + \frac{1}{2}a') \operatorname{tang} \alpha}{E\omega} + \frac{v'}{(a + \frac{1}{2}a') \operatorname{tang} \alpha} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\frac{p(2a+a') \operatorname{tang} \alpha}{2\varepsilon}}} - 1 \right\}.$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck, welches  $b$  zur Breite und  $c$  zur Höhe hat, so ist  $\omega = bc$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ ,

$\varepsilon = E \frac{bc^3}{12}$ , und die vorstehende Gleichung reducirt sich auf

$$R' = \frac{p(a + \frac{1}{2}a') \operatorname{tang} \alpha}{bc} + \frac{E \cdot c}{(2a + a') \operatorname{tang} \alpha} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\frac{6p(2a+a') \operatorname{tang} \alpha}{Ebc^3}}} - 1 \right\}.$$

§ 583. Es läst sich für  $R'$  ein angenäherter, aber zu kleiner Werth finden, wenn man die Krümmung des Theiles  $DD'$  (Fig. 143) als klein genug voraussetzt, um den Pfeil dieser Krümmung in Bezug auf die Länge des Stückes vernachlässigen zu können. Die Gleichgewichtsgleichung in § 569 reducirt sich alsdann auf  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon} (a^2 - x^2)$  und der grösste Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ist  $\frac{pa^2}{2\varepsilon}$ . Die Gleichung zur Bestimmung der Dimensionen ist

$$\frac{R'}{E} = \frac{p(a + \frac{1}{2}a') \operatorname{tang} \alpha}{E\omega} + \frac{v' \cdot pa^2}{2\varepsilon};$$

und reducirt sich für den Fall eines rechteckigen Querschnittes auf

$$R' = \frac{p}{bc} \left[ (a + \frac{1}{2}a') \operatorname{tang} \alpha + \frac{3a^2}{c} \right].$$

Der Werth, welchen man aus dieser Gleichung für  $R'$  findet, wird in den gewöhnlichen Fällen der Praxis wenig von demjenigen verschieden sein, welchen die Gleichung in dem vorhergehenden Paragraphen giebt.

§ 584. Unabhängig von der über die Länge  $BB'$  (Fig. 143) gleichförmig vertheilten Belastung kann in einem bestimmten Punkte dieses Intervalles noch ein Gewicht  $II$  angebracht sein. Befände sich dieses Gewicht zwischen den Punkten  $B$  und  $D$ , so würde es auf den Theil  $BD$  eine Wirkung ausüben, die sich leicht nach den Regeln berechnen liesse, die in den vorhergehenden Kapiteln gegeben sind. Es würde ferner einen Vertical-

druck auf den Punkt  $D$  ausüben. Wäre das Gewicht  $\Pi$  z. B. in dem Punkte  $D$  selbst angebracht, so würde das obere Ende der Strebe eine Last  $\Pi + p(a + \frac{1}{2}a')$  zu tragen haben, wenn man, wie oben mit  $p$  das Gewicht bezeichnet, welches über jede Einheit der Länge in dem Intervalle  $BB'$  verbreitet ist. Die Pressung in der Axe der Strebe wäre  $\frac{\Pi + p(a + \frac{1}{2}a')}{\cos \alpha}$ , und die Pressung in der Richtung  $DD'$  wäre  $[\Pi + p(a + \frac{1}{2}a')] \tan \alpha$ . Die letzte Grösse müsste für  $Q$  in die Gleichung des § 582 gesetzt werden, welche zur Bestimmung der Stärke des Stückes  $DD'$  dient. Zu beachten ist ausserdem, dass der Punkt  $D'$  nur den Verticaldruck  $p(a + \frac{1}{2}a')$  erleidet und die Pressung in der Richtung  $DD'$  also nur  $p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha$  beträgt. Der Theil  $\Pi \tan \alpha$  der Pressung in der Richtung  $DD'$  wird also in dem Punkte  $D'$  nicht vernichtet und folglich auf das Stück  $B'D'$  übertragen: so dass dieses Stück, dessen Enden unterstützt sind, die Pressung  $\Pi \tan \alpha$  in der Axe und das Gewicht  $p$  auf jeder Längeneinheit zu tragen hat. Man hat darauf die Formeln des § 582 anzuwenden und  $Q = \Pi \tan \alpha$  zu setzen.

§ 585. Befindet sich das Gewicht  $\Pi$  in dem Intervall  $DD'$ , so vertheilt sich der daher rührende Verticaldruck auf die beiden Punkte  $D, D'$ . Ist dieses Gewicht z. B. in der Mitte  $C$  des Balkens befindlich, so erleiden die Enden jeder Strebe einen Verticaldruck  $\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2}a')$ . Die Pressung in der Axe der beiden Streben ist  $\frac{\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2}a')}{\cos \alpha}$ , und die Pressung in der Axe des Stückes  $DD'$  ist  $[\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2}a')] \tan \alpha$ . Jede Hälfte  $CD$  dieses letzteren Stückes ist also auch hier noch in demselben Gleichgewichtszustande, wie der Stab  $AM$  (Fig. 141), welcher in § 569 betrachtet wurde, und die Gleichgewichtsgleichung ist ebenfalls

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a-x) + Q(f-y),$$

wo man  $P = \frac{1}{2} \Pi + pa$ , und  $Q = [\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2}a')] \tan \alpha$  hat. Das Integral dieser Gleichung ist, wenn man  $q^2$  für  $\frac{Q}{\varepsilon}$  setzt,

$$f-y = A \sin q(x+B) + \frac{p}{Q} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{P}{Q}(a-x) - \frac{\varepsilon p}{Q^2}$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Für den Punkt  $A$  muss  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $B$  muss  $x=a$ ,  $y=f$  sein; daher hat man die drei Bedingungen

$$f = A \sin q B + \frac{pa^2}{2Q} - \frac{Pa}{Q} - \frac{ep}{Q^2},$$

$$0 = A \cos q B - \frac{pa}{Q} + \frac{P}{Q},$$

$$0 = A \sin q (a+B) - \frac{ep}{Q^2},$$

woraus folgt

$$A \sin q B = \frac{q}{Q q \cos qa} + \frac{P-pa}{Q q} \tan qa,$$

$$A \cos q B = -\frac{P-pa}{Q q},$$

$$f = \frac{pa^2}{2Q} - \frac{Pa}{Q} + \frac{p}{Q q} \left\{ \frac{1}{\cos qa} - 1 \right\} + \frac{P-pa}{Q q} \tan qa;$$

und durch Substitution in die vorhergehende Gleichung,

$$y = \frac{P-pa}{Q q} \sin qx$$

$$+ \left\{ \frac{p}{Q q \cos qa} + \frac{P-pa}{Q q} \tan qa \right\} (1 - \cos qx) - \frac{Px - p(ax - \frac{1}{2}x^2)}{Q},$$

wo man für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe zu setzen hat.

§ 586. Der Ausdruck  $\frac{d^2x}{dx^2}$  wird ein Maximum für  $x=0$ , sodass das betrachtete Stück in der Mitte zu brechen sucht; der Maximalwerth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ist

$$-\frac{p}{Q \cos a \sqrt{\frac{Q}{e}}} + \frac{P-pa}{\sqrt{Qe}} \tan a \sqrt{\frac{Q}{e}} - \frac{p}{Q}.$$

Will man daher nach dem in § 387 Gesagten die Dimensionen des Stückes so wählen, dass die grösste Pressung, welche die Fasern auf jeder Einheit der Querschnittsfläche erleiden, die Grenze  $R'$  nicht überschreitet, so setze man die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v' \cdot p}{Q} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - 1 \right\} + \frac{v' \cdot \Pi}{2\sqrt{Q\varepsilon}} \tan \alpha \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

wo für  $Q$  der Werth  $[\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2} a')]$   $\tan \alpha$  zu substituiren ist.

Ist der Querschnitt des Stückes ein Rechteck, dessen Breite  $b$ , und dessen Höhe  $c$  genannt wird, so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$R' = \frac{Q}{bc} + \frac{Epc}{2Q} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} - 1 \right\} + \frac{3\Pi}{bc^2 \sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} \tan \alpha \sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}.$$

§ 587. Man kann hier, wie in § 583, einen angenäherten Werth für  $R'$  erhalten, wenn man in der Gleichgewichtsgleichung das Glied  $Q(f-y)$  vernachlässigt. Der Maximalwerth von  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  ist alsdann  $-\frac{pa^2}{2\varepsilon} + \frac{Pa}{\varepsilon}$ , und daher

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v'(Pa - \frac{1}{2} pa^2)}{\varepsilon},$$

oder, wenn man für  $P$  und  $Q$  ihre Werthe setzt,

$$\frac{R'}{E} = \frac{[\Pi + p(2a + a')] \tan \alpha}{2E\omega} + \frac{v'(\Pi a + \frac{1}{2} pa^2)}{2\varepsilon};$$

für den Fall eines rechteckigen Querschnittes wird aus dieser Gleichung

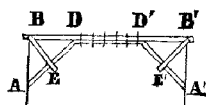
$$R' = \frac{[\Pi + p(2a + a')] \tan \alpha}{2bc} + \frac{3(\Pi + pa)a}{bc^2}.$$

§ 588. Die in Fig. 143 dargestellte Construction besitzt kein stabiles Gleichgewicht, wenn man annimmt, dass die Streben in den Verbindungsstellen um ihre Enden frei drehbar und der Balken mit den Enden  $B, B'$  frei auf Stützen liegt. Man muss daher einer Formänderung zuvorkommen und wendet zu diesem Zwecke die Zangen  $BE, B'E'$  an. Diese Zangen können auch zur Verstärkung der Streben dienen, indem sie die Biegung derselben in der Richtung der Ebene, in welcher die Tragrippe liegt, erschweren.

§ 589. Ist die Entfernung der Stützpunkte zu gross, als dass der Balken aus einem einzigen Stücke bestehen könnte, so verbindet man die Enden der Streben mit

einem Spannriegel  $DD'$  (Fig. 144). In diesem Falle wird der Spannriegel mit den benachbarten Theilen des

Fig. 144.



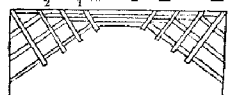
Balkens gewöhnlich so verbunden, dass beide sich gegenseitig verstärken. Denkt man sich die Theile des Balkens wieder in den Punkten  $D, D'$  ohne Verbindung mit einander, so lässt sich Alles, was in den letzten

Paragraphen gesagt wurde, auch auf diese Construction anwenden. Man beachte nur 1) dass bei der Berechnung der Verticalpressungen auf die Punkte  $D, D'$  das Gewicht des Spannriegels berücksichtigt werden muss; 2) dass der Axendruck in dem Intervalle  $DD'$  wenig auf den Balken übertragen werden kann und daher gänzlich von dem Spannriegel aufgenommen werden muss. Es folgt hieraus, dass bei der Anwendung der Gleichungen der §§ 582 und 583, 586 und 587 in dem ersten Gliede der rechten Seite für  $\omega$  nur der Inhalt der Querschnittsfläche des Spannriegels gesetzt werden darf, während man in den übrigen Gliedern das Biegemoment  $\varepsilon$ , nach Anleitung des § 508 u. folgd., unter der Voraussetzung berechnen kann, dass der Spannriegel und der Balken der Biegung gemeinschaftlich widerstehen.

§ 590. Ist die Entfernung zwischen den Stützpunkten beträchtlich, so kann man eine Construction, die der vorhergehenden analog ist, anwenden, indem man mehrere Reihen von Spannriegeln und Streben anbringt (Fig. 145). Der grössern Einfachheit wegen sehen wir die Theile

Fig. 145.

$B D_2 D_1 D C D' B'$



des Balkens und der Spannriegel immer als in den Punkten  $D, D_1, D_2$  von einander getrennt an. Ohne Schwierigkeit lassen sich dann die Verticalpressungen auf die oberen Enden der einzelnen Streben, die sich dadurch ergebenden Pressungen

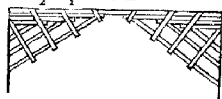
in der Axe dieser Stücke und die sich ebenfalls dadurch ergebenden Pressungen in der Axe der Spannriegel berechnen. Der Widerstand jedes einzelnen Stückes der Construction ist nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphen zu bestimmen.

Die Streben können sehr lange Hölzer oder mehrere mit den Hirnenden zusammenstossende Stücke erfordern.

In diesem Falle muss die Biegung verhindert werden nicht allein durch Zangen in der Ebene der Rippen, sondern auch durch horizontale und geneigte Stücke, durch welche die Rippen mit einander verbunden werden. Die Anwendung der Zangen wird ausserdem schon durch die fehlende Stabilität des Gleichgewichtes nothwendig.

§ 591. Wollte man annehmen, dass die Streben durch die Wirkung eines Zuges gehalten würden (siehe § 581), der an ihren oberen Enden nach den Pfeilern der Brücke hin stattfindet, so könnte man eine Verbindung von Streben und horizontalen Stücken, (welche hier Sattelhölzer genannt werden), auf die in Fig. 146 angegebene Weise anordnen. Zur Solidität des Systemes

Fig. 146.  
BD, D, DCD'



ist es nothwendig, dass sowohl diese Sattelhölzer unter sich durch eiserne Schienen verbunden, als auch ihre Enden an den Pfeilern der Brücke befestigt werden. Da eine sichere Befestigung dieser Enden an dem obern Theile eines Landpfeilers schwierig ist, so eignet sich diese Construction besonders für Brücken mit mehreren Oeffnungen, weil die zwei Hälften der beiden Rippen, welche einem Pfeiler zunächst liegen, sich gegenseitig das Gleichgewicht halten können.

§. 592. Nimmt man wieder an, dass in den Punkten  $D, D_1, D_2, \dots$  die Theile des Balkens und der Sattelhölzer ohne Zusammenhang sind, so ist wie vorhin die Pressung in der Axe der einzelnen Streben und die Spannung der Sattelhölzer leicht zu berechnen. Um die Stärke dieser letztern Stücke bestimmen zu können, muss man die Gleichgewichtsbedingungen eines Stabes kennen, der mit seinen Enden auf Stützen ruhet, mit über seine Länge vertheilten Gewichten belastet ist und einer Spannung in der Richtung seiner Länge zu widerstehen hat.

Jede Hälfte eines solchen Stabes kann dem Stabe  $AM$  (Fig. 147) gleichgestellt werden, welcher in  $A$  horizontal

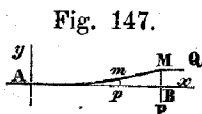


Fig. 147.

befestigt und mit über seine Länge vertheilten Gewichten belastet ist, während er in  $M$  von der Vertikalkraft  $P$ , welche von unten nach oben wirkt, und von der Horizontalkraft  $Q$ , welche eine Spannung in der Rich-

tung  $AB$  hervorbringt, in Anspruch genommen wird. Nennt man

$p$  das von jeder Einheit der Länge getragene Gewicht;  
 $x, y$  die horizontalen und verticalen Coordinaten  $Ap$ ,  
 $pm$  der Curve  $AM$ ;  
 $a$  die Entfernung  $AB$ ;  
 $f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes, während  
 $\varepsilon$  die in § 80 angegebene Bedeutung behält;  
 so ist die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a-x) - Q(f-y).$$

oder, da hier  $P=pa$  ist,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon} (a^2 - x^2) - q^2 (f-y),$$

wenn man zur Abkürzung  $q^2$  für  $\frac{Q}{\varepsilon}$  schreibt.

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f-y = Ae^{qx} + Be^{-qx} + \frac{p}{2Q} (a^2 - x^2) - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen und  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Für den Punkt  $A$  muss  $x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $B$  muss  $x=a, y=f$  sein; daher hat man die drei Bedingungen

$$f = A + B + \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0 = A - B,$$

$$0 = Ae^{qa} + Be^{-qa} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

woraus folgt

$$A = B = \frac{\varepsilon p}{Q^2(e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$f = \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\};$$

und als die Gleichung der Curve,

$$y = \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \frac{e^{qx} + e^{-qx} - 2}{e^{qa} + e^{-qa}}.$$



§ 593. Der Ausdruck  $\frac{d^2y}{dx^2}$  hat seinen grössten Werth in dem Punkte  $A$  und ist hier  $\frac{p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\}$ . Zur Bestimmung der Dimensionen des Querschnittes hat man daher, wie in § 407, die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v \cdot p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\},$$

worin für  $Q$  der Werth der Spannung in der Axe des Stückes gesetzt werden muss.

§ 594. Wollte man in der Voraussetzung, dass die Krümmung des Stückes sehr gering ausfallen werde, das Glied  $Q(f-y)$  in der Differentialgleichung vernachlässigen, so würde das Resultat mit dem in § 583 erhaltenen übereinstimmen.

§ 595. Um nun den Fall zu untersuchen, wo in der Mitte des Stückes ein Gewicht  $\Pi$  angebracht ist, lasse man der Differentialgleichung ihre allgemeine Form

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a-x) - Q(f-y),$$

das Integral ist dann

$$f-y = Ae^{q(a-x)} + Be^{-q(a-x)} - \frac{p}{Q} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + \frac{P}{Q}(a-x) - \frac{\varepsilon p}{Q^2}.$$

Aus den Bedingungen für die Endpunkte folgt

$$f = Ae^{qa} + Be^{-qa} - \frac{pa^2}{2Q} + \frac{Pa}{Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0 = Aqe^{qa} - Bqe^{-qa} - \frac{pa}{Q} + \frac{P}{Q},$$

$$0 = A + B - \frac{\varepsilon p}{Q^2};$$

woraus sich ergibt

$$A = \frac{\varepsilon p}{Q^2} \cdot \frac{e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}} - \frac{P - pa}{qQ(e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$B = \frac{\varepsilon p}{Q^2} \cdot \frac{e^{qa}}{e^{qa} + e^{-qa}} + \frac{P - pa}{qQ(e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$f = \frac{Pa}{Q} - \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\} - \frac{P - pa}{qQ} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}},$$

und durch Substitution in die vorhergehende Gleichung,

$$y = \frac{Px - p(ax - \frac{1}{2}x^2)}{Q} - \frac{ep}{Q^2} \cdot \frac{e^{qx} + e^{-qx} - 2}{e^{qa} + e^{-qa}} \\ - \frac{P - pa}{qQ} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa} - e^{q(a-x)} + e^{-q(a-x)}}{e^{qa} + e^{-qa}}.$$

§ 596. Der grösste Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  findet für  $x = 0$  statt und ist

$$\frac{p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\} + \frac{q(P - pa)}{Q} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}}.$$

Man hat also wie vorhin zur Bestimmung der Dimensionen des Querschnittes die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E_0} + \frac{v \cdot p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\} + \frac{v q (P - pa)}{Q} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}},$$

worin für  $P$  und  $Q$  ihre Werthe gesetzt werden müssen, wie dies in den §§ 584 und 585 angegeben ist.

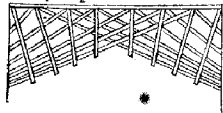
§ 597. Die Gleichung des § 587 lässt sich auf den in Rede stehenden Fall anwenden, wenn man die Krümmung des Stückes als sehr gering voraussetzt.

§ 598. Bei den letzten Constructionen, welche hier betrachtet wurden, ist das Gleichgewicht stabil, da die Sattelhölzer an unverrückbaren Punkten befestigt sind, und die Zangen, durch welche die einzelnen Streben mit einander verbunden werden, dienen daher nur dazu, die Biegung dieser Stücke zu verhüten.

§ 599. In Fig. 148 ist eine andere Anordnung der Streben dargestellt, bei welcher die Strassenbalken keinen

Fig. 148.

B D, D<sub>2</sub> D D'



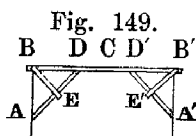
Zug in der Richtung ihrer Länge erleiden. Nimmt man wieder an, dass in den Punkten  $D, D_1, D_2, \dots$  die Theile dieser Balken ohne Verbindung mit einander seien, so widersteht jeder dieser Theile  $DD', DD_1, D_1D_2, \dots$  der Belastung, welche sich auf dem dazu gehörenden Intervalle der Brückenbahn befindet, wie ein Stab, der mit seinen Enden auf Stützen ruhet. Die Verticaldrücke auf die Punkte  $D, D_1, D_2, \dots$  zerlegen sich nach den Richtungen der beiden Streben, welche von diesen Punkten ausgehen, und erzeugen eine Pressung in der Axe dieser Stücke.

Diese letzte Construction wird zu keiner Formänderung angeregt, wie auch die Belastung vertheilt sein mag, und sie ist daher durch sich selbst in einem stabilen Gleichgewichte. In der Regel wird aber die Anwendung der in der Figur angedeuteten Zangen nothwendig sein, um die Biegung der Streben zu verhüten und das Gewicht dieser Stücke so zu tragen, als wäre es in den Punkten  $D, D_1, D_2 \dots$  aufgehängt.

### Wirkung der von Balken und Streben getragenen Brücken auf die Pfeiler oder Widerlager.

§ 600. Wird die Bahn einer Brücke nur von einfachen Balken getragen, wie dies in § 580 angenommen wurde, so üben die Enden dieser Stücke nur einen Verticaldruck auf ihre Stützpunkte aus, der sich nach den Gesetzen über das Gleichgewicht beim Hebel leicht berechnen lässt.

§ 601. In dem Falle, welcher in § 581 untersucht wurde, erleiden die Stützpunkte  $A$  und  $A'$  (Fig. 149) jeder einen Verticaldruck, welcher gleich dem Drucke auf die oberen Enden  $D, D'$  der Streben, und einen Horizontal Schub, welcher gleich der Pressung in der Axe des Stückes  $DD'$  ist. Die Punkte  $B, B'$  erleiden den Verticaldruck, welcher von den über  $BD, B'D'$  vertheilten Gewichten herrührt.



Sind mehrere Streben vorhanden, so übt das untere Ende jeder Strebe stets eine ähnliche Vertical- und Horizontalpressung gegen die Widerlager aus. Die Summe der Horizontalschübe gegen jedes Widerlager ist gleich der Summe der Pressungen in der Axe der Stücke, welche in dem Intervalle  $DD'$  liegen (Fig. 150).

Die Horizontalschübe suchen die Landpfeiler fortzudrängen; die Verticaldrücke suchen sie auf ihrem Fundamente festzuhalten. Das Kraftmoment, von welchem die Pfeiler umgekantet werden könnten, wird daher durch die Differenz der Mo-



mente des Verticaldruckes und des Horizontalschubes gemessen, wo beide Momente auf die Axe bezogen werden müssen, um welche eine Drehung der Pfeiler erfolgen könnte.

§ 602. Bei der Construction (Fig. 151), welche in § 591 untersucht wurde, üben die untern Enden der

Fig. 151.

$D_2 D_1 D BC D'$



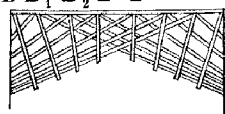
Streben dieselben oben besprochenen Vertical- und Horizontalpressungen auf die Pfeiler aus. Die oberen Theile dieser Pfeiler, an denen die Sattelhölzer befestigt werden müssen, werden aber auch noch

durch den Zug, welcher in der Axe dieser Stücke stattfindet, in Anspruch genommen. Die Summe der Spannungen in der Axe der Zugbänder ist gleich der Summe der Horizontalpressungen, welche die unteren Enden der Streben ausüben, und da die ersteren Kräfte zum Umwerfen der Pfeilermasse an einem längeren Hebelarm wirken, als die letzteren, so werden die Pfeiler zu einem Umkanten nach innen angeregt.

§ 603. Bei der in § 599 betrachteten Construction (Fig. 152) drückt das untere Ende jeder Strebe gegen

Fig. 152.

$B D_1 D_2 D D'$



die Widerlager mit einer Vertical- und einer Horizontalkraft, die resp. gleich der verticalen und der horizontalen Composante der Pressung in der Axe der Strebe ist. Die Summe der Verticalpressungen durch die Streben  $DA, DA'$ , die von

demselben Punkte  $A$  ausgehen, ist gleich dem in  $D$  stattfindenden Verticaldrucke, und die Horizontalpressungen, welche diese beiden Streben ausüben, sind unter sich gleich.

§ 604. Bei einer solchen Construction, wie in § 590 betrachtet wurde, lässt sich jeder Horizontalschub gegen die Stützpunkte dadurch verhindern, dass man einen Durchzug anbringt, dessen Spannung dem Schube der Streben widerstehen können muss (Fig. 153). In diesem

Fig. 153.

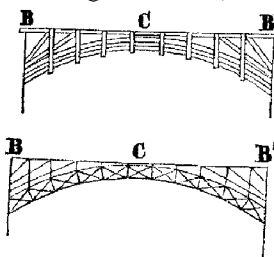


Falle trägt der Durchzug gewöhnlich die Brückenbahn, während er selbst an den Spannriegeln und den Streben aufgehängt ist <sup>1)</sup>.

### Von den Brücken, welche von Bögen getragen werden.

§ 605. Wir betrachten die Bögen, welche den Haupttheil der Rippen bei den Brücken dieser Art (Fig. 154 u. 155) abgeben, zunächst als homogene Körper, auf welche sich die in dem sechsten Kapitel gefundenen Resultate anwenden lassen.

Fig. 154. 155.



Wäre das Gewicht der Construction und die Belastung der Brückenbahn gleichförmig über den Raum  $BB'$  vertheilt, so würde man nach § 442 dem krummen Theile der Rippen die Form eines Parabelbogens geben müssen, wenn derselbe

keine Neigung zu einer Biegung besitzen sollte. In der Wirklichkeit ist aber die Belastung an den Enden etwas grösser, als in der Mitte, und man giebt dem in Rede stehenden Stücke gewöhnlich die Form eines Kreisbogens. Wegen der Dicke dieses Stückes und der geringen Weite seiner Krümmung kann man es aber doch ansehen, als würde es, ohne durch das Gewicht der Construction und die Belastung der Brückenbahn zu einer Biegung angeregt zu werden, nur in der Richtung seiner Axe mit einer Kraft zusammengedrückt, deren Werth nach den §§ 440 und 441 zu berechnen ist. Der Werth für  $Q$  in den Formeln dieser Paragraphen giebt den Horizontalschub des Bogens gegen die Stützpunkte.

§ 606. Wäre, unabhängig von der über das Intervall  $BB'$  gleichförmig vertheilten Belastung, ein Gewicht

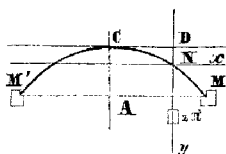
<sup>1)</sup> Nach diesem Principe waren die Brücken zu Schaffhausen (über den Rhein) und Weitingen (über die Limmat) ausgeführt. (Die erstere Brücke hatte zwei Oeffnungen von  $165\frac{2}{3}$  und  $187\frac{1}{4}$  rhein. Fuss. Die letztere hatte eine Oeffnung von 379 rhein. Fuss, die grösste, welche es bis jetzt bei hölzernen Brücken gegeben hat. Beide Brücken wurden 1799 von den Franzosen verbrannt).

in dem Scheitel der Curve angebracht, so würde der Bogen nicht mehr im Gleichgewichte sein. Nach den §§ 466 und 467 berechnet man die Vermehrung des Horizontalschubes gegen die Stützpunkte und der Pressung in der Richtung der Länge bei den verschiedenen Theilen des Bogens, welche durch dieses Gewicht bewirkt wird. Nach § 480 kann dann die Wirkung dieses Gewichtes, insofern es den Bogen zu biegen sucht, und der grösste Druck, den die Theile des Bogens zu erleiden haben, gefunden werden.

§ 607. Die Mitte  $C$  des Intervalles  $BB'$  ist nicht derjenige Ort, in welchem ein Gewicht die grösste Wirkung in einer Biegung des Bogens hervorbringt. Es müssen daher die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall gesucht werden, dass das Gewicht als in einem beliebigen Punkte dieses Intervalles befindlich gedacht wird.

Betrachten wir den Bogen  $MCM'$  (Fig. 156), welcher aus zwei symmetrischen Theilen besteht, die durch die

Fig. 156.



Verticalaxe  $AC$  geschieden sind, und dessen Enden  $M, M'$ , die sich auf derselben Horizontalen befinden, von Stützen getragen werden, die ihnen nicht erlauben, sich von einander zu entfernen. Wird nun in einem beliebigen Punkte das Gewicht  $2\Pi$  aufgehängt, so wird

dieses Gewicht den Bogen verbiegen, den Punkt  $N$  aus seiner Stelle drängen und gegen die Stützpunkte gewisse Vertical- und Horizontalpressungen ausüben. Jeder der Theile  $NM, NM'$  des Bogens befindet sich in demselben Gleichgewichtszustande, als ob der Bogen in  $N$  von einem festen Punkte gestützt und in den Endpunkten von den Pressungen sollicitirt würde, welche die Stützpunkte ausüben. Die Verschiebungen der Endpunkte, welche in diesem letzteren Falle eintreten würden, entsprechen den Verschiebungen des Punktes  $N$ , welche in dem ersteren Falle stattfinden. Durch Anwendung der Formeln des § 448 lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen für jeden der beiden Theile des Bogens finden; man beachte nur, dass hier der Bogen in dem Punkte  $N$  nur als gestützt angesehen werden darf,

wesshalb die Richtung der Tangente der Curve für diesen Punkt nicht zum Voraus bestimmt ist, wie dies bei einem Bogen stattfindet, dessen oberes Ende eingemauert ist. Man nenne

$a, b$  die Entfernungen  $AM, AC$ ;

$\alpha$  die horizontale Entfernung des Punktes  $N$  von dem Scheitel der Curve;

$x, y$  die horizontalen und verticalen Coordinaten der Punkte der Curve, wenn  $N$  als Ursprung des Coordinatensystemes angesehen wird.

Sieht man die Curve als einen Parabelbogen an, so hat man für ihre Gleichung, wenn der Ursprung des Coordinatensystemes in  $C$  ist,  $y = \frac{bx^2}{a^2}$ . Da hier der Ursprung in  $N$  liegen soll, so hat man für den Theil  $NM$  die Gleichung  $y = \frac{b}{a^2} (2\alpha x + x^2)$ , woraus  $\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{a^2} (\alpha + x)$ . Substituirt man diese Werthe in die Formeln des § 448, wo  $\frac{b}{a^2} (a^2 - \alpha^2)$  für  $b$  an die Stelle gesetzt werden muss, und vernachlässigt die höhern Potenzen von  $\frac{dy}{dx}$ , so erhält man für den Theil  $NM$  der Curve

$$\begin{aligned} dx' - dx &= -\frac{1}{\varepsilon} dx \frac{2b}{a^2} \left\{ P \left[ (a - \alpha) \alpha x + \left[ a - \frac{3}{2} \alpha \right] x^2 - \frac{x^3}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Qb}{a^2} \left[ (a^2 - \alpha^2) \alpha x - \alpha^2 x^2 + [a^2 - \alpha^2] x^2 - \frac{4\alpha x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right] \right\}, \\ dy' - dy &= \frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ P \left[ (a - \alpha) x - \frac{x^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Qb}{a^2} \left[ (a^2 - \alpha^2) x - \alpha x^2 - \frac{x^3}{3} \right] + m \right\}, \end{aligned}$$

wo  $m$  eine durch die Integration hinzugekommene Constante ist, deren Werth von der Neigung abhängt, welche die Curve an der Stütze  $N$  besitzt. Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} x' - x &= -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2} \left\{ P \left[ (a - \alpha) \frac{\alpha x^2}{2} + \left[ a - \frac{3}{2} \alpha \right] \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Qb}{a^2} \left[ (a^2 - \alpha^2) \frac{\alpha x^2}{2} + [a^2 - 2\alpha^2] \frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^4}{3} - \frac{x^5}{15} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$y' - y = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P \left\{ [a - \alpha] \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + \frac{Qb}{a^2} \left\{ [a^2 - \alpha^2] \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right\} + mx \right\};$$

und, wenn man  $x = a - \alpha$  setzt, um die Verschiebungen  $h$  und  $f$  des Punktes  $M$  zu erfahren,

$$-h = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2} \left\{ P \left[ \frac{5a^4}{24} - \frac{a^3\alpha}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{4} + \frac{a\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^4}{8} \right] + \frac{Qb}{a^2} \left[ \frac{4a^5}{15} - \frac{a^4\alpha}{2} + \frac{a^3\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^5}{10} \right] \right\},$$

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P \left[ \frac{a^3}{3} - a^2\alpha + a\alpha^2 - \frac{\alpha^3}{3} \right] + \frac{Qb}{a^2} \left[ \frac{5a^4}{12} - a^3\alpha + \frac{a^2\alpha^2}{2} + \frac{a\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} \right] - m \left[ a - \alpha \right] \right\}.$$

Diese selben Formeln werden für den Theil  $NM'$  der Curve gelten, wenn man die Zeichen von  $\alpha$  und  $m$  in die entgegengesetzten verwandelt. Bezeichnet man daher mit  $P_1$ ,  $Q_1$  die Kräfte, welche in dem Punkte  $M'$  thätig sind, und mit  $h_1$ ,  $f_1$  die Verschiebungen dieses Punktes, so hat man

$$-h_1 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2} \left\{ P_1 \left[ \frac{5a^4}{24} + \frac{a^3\alpha}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{4} - \frac{a\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^4}{8} \right] + \frac{Q_1 b}{a^2} \left[ \frac{4a^5}{15} + \frac{a^4\alpha}{2} - \frac{a^3\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^5}{10} \right] \right\},$$

$$f_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P_1 \left[ \frac{a^3}{3} + a^2\alpha + a\alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \right] + \frac{Q_1 b}{a^2} \left[ \frac{5a^4}{12} + a^3\alpha + \frac{a^2\alpha^2}{2} - \frac{a\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} \right] - m \left[ a + \alpha \right] \right\}.$$

§ 608. In dem vorliegenden Falle hat man  $P = -\Pi \frac{a + \alpha}{a}$ ;  $P_1 = -\Pi \frac{a - \alpha}{a}$ ;  $Q = Q_1$ ; und es muss  $h = -h_1$ ,  $f = f_1$  sein. Aus den Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken, ergeben sich die folgenden

$$m = -\frac{\Pi}{a} \left\{ \frac{2a^2\alpha}{3} - \frac{2\alpha^3}{3} \right\} + \frac{Qb}{a^2} \left\{ a^2\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right\},$$

$$Q = \frac{5\Pi}{32} \cdot \frac{5a^4 - 6a^2\alpha^2 + \alpha^4}{a^3b},$$

$$h = -h_1 = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(19a^8 - 60a^6\alpha^2 + 66a^4\alpha^4 - 28a^2\alpha^6 + 3\alpha^8)b\alpha}{96a^7},$$

$$-f = -f_1 = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{3a^8 + 104a^6\alpha^2 - 102a^4\alpha^4 - 5\alpha^8}{384a^5},$$



welche Formeln den Horizontalschub gegen die Stützen und die Verschiebung des Punktes  $N$ , in welchem das Gewicht  $2\Pi$  aufgehängt ist, angeben.

§ 609. Was die Wirkung dieses Gewichtes, insofern es den Bogen zusammendrückt und dadurch verbiegt, anlangt, so beachte man zunächst, wie in § 475, dass der Werth des Druckes  $T$ , wenn der Bogen, während er in  $N$  mit dem Gewichte  $2\Pi$  belastet ist, zugleich das Gewicht  $p$  auf der Längeneinheit des Intervalles  $MM'$  trägt, durch die Verbindung der in § 441 und in § 449 gegebenen Ausdrücke gefunden wird, indem man für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe setzt. Man hat demnach für den Theil  $NM$  des Bogens, bei steter Vernachlässigung des Quadrates von  $\frac{b}{a}$ ,

$$T = \frac{pa^2}{2b} + \Pi \frac{2b(a+x)(a+x)}{a^3} + \frac{5\Pi}{32} \cdot \frac{5a^4 - 6a^2x^2 + x^4}{a^3b}.$$

Man beachte sodann, dass

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'}{\varepsilon} \left\{ P[a - \alpha - x] + \frac{Qb}{a^2} [a^2 - \alpha^2 - 2\alpha x - x^2] \right\},$$

wo für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe zu setzen sind. Mit Hülfe der beiden vorstehenden Ausdrücke lassen sich, in Uebereinstimmung mit § 475, die Dimensionen des Bogens bestimmen. Diese Gleichungen werden für den Theil  $NM'$  des Bogens gelten, wenn man das Zeichen von  $\alpha$  in das entgegengesetzte verwandelt.

§ 610. Setzt man in dem vorhergehenden Ausdrucke  $x=0$ , so erfährt man das Resultat der Biegung in dem Aufhängepunkte des Gewichtes  $2\Pi$ ; man erhält alsdann

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'}{\varepsilon} \left\{ P[a - \alpha] + \frac{Qb}{a^2} [a^2 - \alpha^2] \right\},$$

oder, wenn man für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe substituirt,

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = - \frac{v'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(a^2 - \alpha^2)(7a^4 + 30a^2\alpha^2 - 5\alpha^4)}{32a^5}.$$

Nimmt man  $\alpha=0$ , oder das Gewicht  $2\Pi$  als im Scheitel  $C$  des Bogens aufgehängt an, so stimmt diese Formel mit der in § 476 gegebenen überein. Der

Punkt  $C$  ist aber nicht der Ort, in welchem das Gewicht 2II aufgehängt sein müsste, um die grösste mögliche Biegung zu veranlassen; denn das Maximum des vorstehenden Ausdruckes entspricht dem Werthe

$\alpha = a \sqrt{\frac{7}{3} - \sqrt{\frac{176}{45}}}$ , oder  $\alpha = 0,3556a$ . Demnach bringt das Gewicht 2II die grösste mögliche Biegung in seinem Aufhängepunkte  $N$  hervor, wenn die Entfernung  $CD$  etwas grösser ist, als ein Drittheil der Entfernung  $AM$ . Der dieser Biegung entsprechende Werth der grössten Zusammendrückung oder Ausdehnung der Fasern in dem Aufhängepunkte  $N$  ist sehr nahe

$$\frac{v'}{\varepsilon} \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = -\frac{v'\Pi}{\varepsilon} \cdot 0,382a.$$

§ 611. Man beachte, dass der Ausdruck für  $v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  in § 609 ein positives Maximum hat für  $x = -\alpha - \frac{Pa^2}{2Qb}$ . Substituirt man diesen Werth von  $x$  in den in Rede stehenden Ausdruck, so erhält man

$$\frac{v'}{\varepsilon} \cdot \frac{(Pa + 2Qb)^2}{4Qb}$$

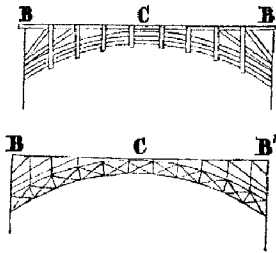
als den Maximalwerth. Setzt man hierin für  $P$  und  $Q$  ihre in § 608 gegebenen Werthe, so kommt

$$\frac{v'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(9a^4 - 16a^3\alpha - 30a^2\alpha^2 + 5a^4)^2}{160a^3(5a^4 - 6a^2\alpha^2 + \alpha^4)}.$$

Diese Formel reducirt sich auf  $\frac{v'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{81a}{800}$ , wenn  $\alpha = 0$ , d. h. wenn das Gewicht 2II im Scheitel des Bogens befindlich ist. Der Werth des Ausdruckes nimmt zu, wenn man für  $\alpha$ , von Null ausgehend, wachsende negative Werthe annimmt, und der Maximalwerth findet für einen Punkt statt, dessen Entfernung vom Scheitel etwas weniger als  $\frac{2}{5}$  des Intervalles  $AM'$  beträgt, und ist hier sehr nahe  $\frac{v'\Pi}{\varepsilon} \cdot 0,177a$ . Da dieser Werth geringer ist, als der in dem vorhergehenden Paragraphen gefundene, so schliesst man daraus, dass das in  $N$  aufgehängte Gewicht die Krümmung des Bogens in seinem Aufhängepunkte mehr vermindert, als es sie in dem Theile  $CM'$  vergrössert. Man darf jedoch nicht

vergessen, dass, um die Anstrengung der Fasern beurtheilen zu können, neben dem Einflusse der Biegung des Bogens auch der Einfluss des Druckes  $T$  in der Längsaxe desselben berücksichtigt werden muss.

Fig. 157. 158.

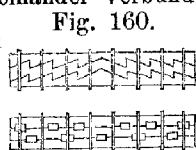


§ 612. Bei den meisten hölzernen (Fig. 157) oder eisernen (Fig. 158) Bogenbrücken bringt man noch Streben an, die mit dem Bogen zusammen das Gewicht derjenigen Theile der Brückenbahn tragen, die in der Nähe der Pfeiler liegen. Diese Streben können entweder parallel zum Bogen oder nach einem Punkte gerichtet sein, welcher unmittelbar über den

Anfängen des Bogens liegt. Sie würden von geringem Nutzen sein, wenn die Construction nur eine gleichförmig über den Raum zwischen den beiden Stützen vertheilte Belastung zu tragen hätte. Da aber die Lasten, welche eine Brücke zu tragen hat, successive sich an den verschiedenen Stellen dieses Raumes befinden, so ist die Anwendung der Streben vortheilhaft, insofern dadurch die Wirkung der Last auf den Bogen in demjenigen Falle vermindert wird, in welchem sie den Bogen mit der grössten Kraft zu biegen sucht. Man vergesse nicht, dass die Verticaldrücke auf die oberen Enden der Streben, wie in § 381 gezeigt ist, Pressungen in der Richtung der Strassenbalken hervorbringen, denen diese widerstehen müssen. <sup>1)</sup>

1) Bei mehreren hölzernen oder eisernen Bogenbrücken sind Hängebänder (Zangen, moises pendantes) oder sonstige Stücke, mittelst welcher das Gewicht der Brückenbahn von den Bogen getragen wird, normal zu diesem gerichtet. Alsdann entstehen an den oberen Enden dieser Stücke horizontale Pressungen oder Spannungen in der Richtung der Strassenbalken, und an den Punkten, in welchen die Hängebänder den Bogen fassen, entstehen Horizontalpressungen, die den ersteren gleich und nach der Mitte des Bogens gerichtet sind. Der Bogen wird also nicht nur durch den Verticaldruck des Gewichtes der Construction, sondern auch durch die Horizontalpressungen sollicitirt, welche bei verticalen Tragbändern nicht existiren. Man kann auch beachten, dass, wenn die Stücke, mittelst welcher das Gewicht der Brückenbahn vom Bogen getragen wird, normal zu diesem gerichtet sind, dieses Gewicht nicht gleichförmig auf dem Raume zwischen den Widerlagern vertheilt ist. Die Belastung ist in der Mitte des Bogens grösser, und in der Nähe der Widerlager geringer, wodurch von Seiten des Bogens ein grösserer Widerstand nöthig gemacht wird.

§ 613. Bestehen die Bogen aus mehreren Lagen von gekrümmten Hölzern, so kann man die Pressung in der Axe des Bogens als über alle diese Stücke gleichförmig vertheilt ansehen. Das Biegemoment  $\epsilon$  muss nach Angabe des § 508 und der folgd. berechnet werden, mit Rücksicht darauf, dass jede Lage der gekrümmten Hölzer gewöhnlich in der Richtung ihrer Länge in mehrere Stücke zerfällt. Berühren sich diese Hölzerlagen und werden sie, bei verwechselten Stößen durch herumgelegte eiserne Bänder zusammengehalten, so ist das Biegemoment wenigstens gleich der um ein Moment verringerten Summe der Biegemomente der einzelnen Lagen. Sind diese Lagen nicht einfach auf einander gelegt, sondern durch eine Verzahnung oder durch Keile (Dübel) mit einander verbunden (wie es in Fig. 160 dargestellt ist)



und sind die Stöße, wie es eben gesagt wurde, verwechselt, so wird an den schwächsten Stellen das Biegemoment wenig von dem eines aus einem Stücke bestehenden Körpers abweichen, der zur Höhe die Summe der Höhen der sämtlichen Lagen mit Ausnahme einer hat.

§ 614. Bei den eisernen Brücken besteht die Bogenconstruction gewöhnlich aus zwei Lagen von krummen Stücken, die durch normale Querstücke und durch Kreuze mit einander verbunden sind. Die Theile jeder Lage, die mit den Enden zusammenstossen, müssen durch fest angetriebene Bänder aus Schmiedeeisen, die der Spannung einen gleichen Widerstand leisten, wie diese Theile, mit einander verbunden werden. Ein solcher Bogen kann als ein Körper angesehen werden, der aus einem einzigen Stücke besteht, und dessen Biegemoment  $\epsilon$  nach Anleitung des § 511 gefunden wird. Der Druck in der Richtung der Länge muss als auf die beiden Lagen der krummen Stücke gleichförmig vertheilt angesehen werden.

### Sicherung der Rippen vor dem Ausweichen.

§ 615. Die Constructionen, welche in dem Vorhergehenden betrachtet wurden, befinden sich, mit Ausnahme des im § 585 angegebenen Falles, im stabilen Gleichgewichte, insofern die Formveränderungen in Frage

kommen, die in der Verticalebene der Rippen eintreten könnten. Die Stabilität fehlt aber hinsichtlich der Verschiebungen, welche die Theile einer Rippe nach der einen oder andern Seite dieser Ebene erleiden könnten. Die einzige Ausnahme bildet hier der Fall, wo die Brückenbahn von Balken getragen wird, die, in gerader Linie von einem Pfeiler zum andern gehend, an diesen befestigt sind und aus Stücken bestehen, deren Hirnenden mit einander verbunden sind.

Da diese letztere Einrichtung fast niemals vorkommt, so ist es unumgänglich nothwendig, dass die geeigneten Vorsichtsmassregeln genommen werden, um die Rippen in ihren respectiven Ebenen zu erhalten. Es lässt sich dies durch zwischen zwei Rippen anzubringende horizontale Querbalken erreichen, deren Enden mit den Rippen so verbunden werden müssen, dass der Winkel, welchen sie mit der Ebene derselben bilden, sich nicht ändern kann. Bei einer solchen Anordnung kann eine Rippe nur dann durch eine Drehung um ihre Stützen umkanten, wenn alle übrigen Rippen dieselbe Bewegung machen, und wenn die sämtlichen Querbalken an beiden Enden abgebrochen werden <sup>1)</sup>.

§ 616. Auf eine noch grössere Sicherheit gewährende Weise lassen sich die Rippen dadurch halten, dass man ausser den Querbalken noch Stücke in der Diagonale ihrer Zwischenräume (also Kreuzverstreben) anwendet. Solche Stücke, welche Kreuzbänder (Windstreben, *contre-vents*) genannt werden, kann man zwischen den Rippen anbringen in den geneigten Ebenen, in denen sich die Streben befinden, in der Brückenbahn und in den verticalen oder normalen Ebenen, welche die Hängebänder (Zangen) enthalten. Wegen dieser Kreuzbänder können die Rippen nicht umkanten, wenn nicht ein Theil dieser Stücke gedehnt und der andere verkürzt wird. Ihre Enden müssen mit den Stücken, welche die Rippen bilden, durch fest angetriebene eiserne Bänder verbunden werden. Bei Anwendung solcher Kreuzbänder ist es zur Stabilität des Gleichgewichts nicht mehr nöthig, dass die Quer-

1) Eine solche Anordnung passt besonders für eiserne Brücken. Das Beispiel der Austerlitzbrücke in Paris, deren Bogen 32 Meter Oeffnung haben, beweiset, dass die Kreuzbänder nicht unentbehrlich sind. Bei dem grossen gusseisernen Bogen von 72 Meter Oeffnung der Sunderlandbrücke waren ursprünglich keine Kreuzbänder angebracht; später, nach der Vollendung der Construction, hat man einige diagonal liegende Bänder hinzugefügt.

balken mit den Stücken der Rippen so verbunden werden, dass sich der Winkel an der Verbindungsstelle nicht ändern kann; doch müssen noch immer die Enden der Querbalken an den Stücken der Rippen befestigt werden.

§ 617. Die hauptsächlichsten Ursachen des Umkantens der Rippen einer Brücke sind der Druck des Windes und die Stösse, welche beim Passiren von Fuhrwerken erfolgen können. Sie lassen sich nicht genau genug abschätzen, um die Anordnung der Stücke, welche das Umkanten verhindern sollen, von einer Berechnung abhängig machen zu können.

---

### Elftes Kapitel.

#### Widerstand der Lehrgerüste, welche zur Construction der Gewölbe dienen.

§ 618. Die Anordnung der Lehrgerüste oder Lehrbogen verlangt, dass man die Pressungen kenne, die sie während der Ausführung des Gewölbes zu tragen haben.

Man unterscheidet zwei Hauptarten von Lehrbogen: 1) solche, deren Stützpunkte über den Raum zwischen den Widerlagern vertheilt sind; 2) solche, die gesprengte Lehrbogen genannt werden, und deren Stützpunkte sich sämmtlich am Fusse der Widerlager, unterhalb der Anfänge des Gewölbes befinden.

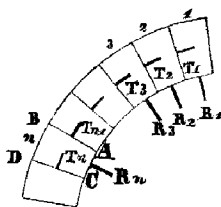
#### Druck der Gewölbsteine auf die Lehrgerüste.

§ 619. Bei der Construction eines Gewölbes wird jede Schicht oder Lage der Gewölbsteine auf ein Horizontalstück, das sogenannte Schalholz, gelegt, welches auf dem Umfange des Lehrgerüstes ruht. Diese Schalhölzer üben auf das Zimmerwerk des Lehrbogens

gewisse Pressungen in der Richtung der Fugen des Gewölbes aus, deren Werth aufgefunden werden muss.

Man betrachte den in Fig. 157 dargestellten Gewölbtheil, welcher auf einem Lehrbogen ruhet. Jeder Gewölbstein, wie  $ABDC$  erleidet von dem unmittelbar darauf liegenden Gewölbsteine einen Druck, dessen Richtung zu der Fuge  $AB$  normal ist. Da ferner dieser letztere Gewölbstein auf  $AB$  hinabzugleiten sucht und hieran nur zum Theil durch den Widerstand des Lehrbogens, zum Theil aber durch die Wirkung der Reibung und der Cohäsion, welche in der Fuge  $AB$  stattfindet, verhindert wird, so folgt daraus, dass der Gewölbstein  $ABDC$  auch noch in der Richtung  $BA$  von einer Kraft in Anspruch genommen wird, die diesem Widerstande an Grösse gleich ist. Endlich wird dieser selbe Gewölbstein in verticaler Richtung durch sein eigenes Gewicht sollicitirt. Man kann ihn daher als einen Körper betrachten, der gegen die geneigte Ebene  $CD$  gestützt, von den drei eben angegebenen Kräften sollicitirt und durch den Widerstand des Lehrbogens, welchen man sich parallel zur Fuge  $CD$  zu denken hat, zurückgehalten wird. Nach diesen Vorbetrachtungen nenne man

Fig. 157.



$G_1, G_2, G_3 \dots G_n$  respective das Gewicht für eine Einheit in der Länge des Gewölbes vom 1<sup>ten</sup>, 2<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup> ...  $n^{\text{ten}}$  Gewölbstein, diese vom höchsten Gewölbesteine aus gezählt;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$  die Winkel, welche die unteren Fugen dieser selben Gewölbesteine mit einer Verticallinie bilden;

$z_1, z_2, z_3 \dots z_n$  die Länge der untern Fugen;

$T_1, T_2, T_3 \dots T_n$  die Normaldrücke, welche in diesen Fugen stattfinden;

$R_1, R_2, R_3 \dots R_n$  die Drücke, welche auf das Lehrgerüst parallel zur untern Fuge jedes Gewölbesteines wirken;

$f$  und  $\gamma$  behalten die in § 290 angegebenen Bedeutungen;

Beachtet man erstens, dass die zu  $AB$  normal gerichtete Kraft  $T_{n-1}$  sich normal und parallel

zu  $CD$  in die beiden Kräfte  $T_{n-1} \cdot \cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})$  und  $-T_{n-1} \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})$  zerlegt; zweitens, dass der Widerstand der Reibung und der Cohäsion in der Fuge  $AB$  gleich  $fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}$  ist und dass diese Kraft, welche in der Richtung  $BA$  wirkt, sich normal und parallel zu  $CD$  in die beiden Kräfte  $(fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}) \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})$  und

$$(fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}) \cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

zerlegt; drittens, dass das Gewicht  $G_n$  des Gewölbsteines  $ABDC$  sich normal und parallel zu  $CD$  in die beiden Kräfte  $G_n \sin \alpha_n$  und  $G_n \cos \alpha_n$  zerlegt: so sieht man zunächst, dass der Normaldruck, den der Gewölbstein  $ABDC$  auf die untere Fuge  $CD$  ausübt, gleich

$$T_n = T_{n-1} [\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + \gamma z_{n-1} \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n \sin \alpha_n$$

ist, und ferner, dass das Gleichgewicht dieses Gewölbsteines durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$R_n = -T_{n-1} (1 + f^2) \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \gamma z_{n-1} [\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + G_n (\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n) - \gamma z_n$$

§ 620. Mittels der vorstehenden Gleichungen lassen sich die mit  $R$  bezeichneten Pressungen leicht berechnen, indem man bei dem höchsten Gewölbstein anfängt und beachtet, dass  $T_0 = 0$  und  $\gamma z_0 = 0$  ist, so dass man für diesen Gewölbstein hat

$$T_1 = G_1 \sin \alpha_1, \\ R_1 = G_1 (\cos \alpha_1 - f \sin \alpha_1) - \gamma z_1.$$

§ 621. Sieht man die Cohäsion als gleich Null an, was in der Praxis meist geschehen muss, so wird aus den Gleichungen des § 619

$$T_n = T_{n-1} [\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + G_n \sin \alpha_n, \\ R_n = -T_{n-1} (1 + f^2) \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n (\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n);$$

und für den höchsten Gewölbstein hat man

$$T_1 = G_1 \sin \alpha_1, \\ R_1 = G_1 (\cos \alpha_1 - f \sin \alpha_1).$$

§ 622. Aus den vorstehenden Formeln sieht man, dass der Normaldruck, welchen dieselbe Schicht der Gewölbsteine auf den Lehrbogen ausübt, sich fortwährend



in dem Maasse ändert, in welchem das Legen der Steine fortschreitet. Mit der Schicht, für welche zum ersten Male  $\tan \alpha < \frac{1}{f}$  ist, beginnt die Belastung des Lehrbogens. (Man sehe die in § 280 u. folgd. und in § 315 angegebenen Werthe von  $f$ ). Der Druck, welchen diese Schicht auf den Lehrbogen ausübt, vermindert sich, wenn man mit dem Legen der Steine fortfährt, und er kann selbst zu Null oder negativ werden. Eben so verhält es sich mit den folgenden Schichten, und aus diesem Grunde sieht man zuweilen, wenn der Lehrbogen eines Gewölbes vor dem Schlusse desselben gesenkt wird, dass sich eine gewisse Zahl von Gewölbsteinen in der Luft hält, die auf den Lehrbogen drückten, als sie gelegt wurden <sup>1)</sup>).

Der Druck, welchen jede Schicht der Gewölbsteine auf den Lehrbogen ausüben kann, ist dann am grössten, wenn sie noch nicht von der folgenden Schicht bedeckt ist. Mit dem Legen dieser Schicht wird der in Rede stehende Druck geringer; er wird von Neuem geringer mit dem Legen der darauf folgenden Schicht, und so fort.

§ 623. Will man sich eine vollkommene Kenntniss verschaffen von den Kräften, welche auf ein Lehrgerüst wirken, und den verschiedenen Gleichgewichtszuständen, in denen sich diese Construction während des Legens der Gewölbsteine befinden wird, so muss man also nach den Formeln der §§ 619 oder 621 die verschiedenen Werthe berechnen, welche der Normaldruck, den jede Schicht der Gewölbsteine auf das Lehrgerüst ausübt, in dem Maasse annimmt, in welchem das Legen der Steine fortschreitet. Will man sich aber darauf beschränken, für jeden Punkt der Curve des Lehrgerüsts eine Grenze zu kennen, welche der in diesem Punkte stattfindende Normaldruck nicht überschreiten kann, so genügt es den Druck, welchen jede Schicht der Gewölbsteine auf den Lehrbogen ausübt, unter der Voraussetzung zu berechnen, dass diese Schicht die zuletzt gelegte sei, d. h. man hat die Formel anzuwenden

$$R_n = G_n (\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n) - \gamma z_n;$$

oder, bei Vernachlässigung der Cohäsion, die Formel

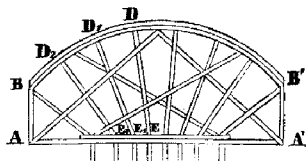
$$R_n = G_n (\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n).$$

<sup>1)</sup> Man sehe oben § 312 u. folgd., so wie die in den Noten citirten Werke.

### Anordnung der Lehrgerüste.

§ 624. Die Aufgabe, welche man sich bei der Construction eines Gewölbes zu stellen hat, ist die, eine solche Anordnung zu treffen, dass jeder auf das Lehrgerüst gebrachte Gewölbstein seine Lage nicht vor dem Schlusse des Gewölbes ändern kann, und dass nach der Ausrüstung die sämtlichen Gewölbsteine sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Während des Ausrüstens und nach demselben kann das Gewölbe ohne Nachtheil ein geringes Setzen erleiden, welches durch die Elasticität der Gewölbsteine und die Zusammendrückung des Mörtels oder der Keile, die sich in den Fugen befinden, hervorgebracht wird. Aber die Verschiebung der Gewölbsteine, welche eintritt, bevor das Gewölbe geschlossen ist, muss nothwendig Schaden bringen. Die Lehrgerüste müssen demnach so angeordnet werden, dass während des Legens der Gewölbsteine das System kein Bestreben haben kann,

Fig. 158.



seine Form zu ändern, und dass die Stücke nicht zu einer Drehung um ihre Verbindungsstellen angeregt werden.

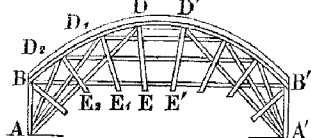
§ 625. In Fig. 158 ist ein Lehrgerüst dargestellt, dessen Stützpunkte zwischen den Widerlagern liegen. Die Pressungen, welche die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  durch die Gewölbsteine in der Richtung der Normale der Curve erleiden, werden durch die Streben  $DE, D_1E_1, D_2E_2, \dots$ , welche in den Richtungen dieser Pressungen liegen, auf die Stützpunkte übertragen. Man kann die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  ohne merklichen Fehler wie Prismen betrachten, die mit über ihre Länge vertheilten Gewichten belastet sind und mit ihren Enden horizontal auf Stützen ruhen. Nach dem Obigen wird es leicht sein, die Belastung eines jeden dieser Stücke, so wie die sich dadurch ergebenden Pressungen in den Richtungen der Streben  $DE, D_1E_1, \dots$  zu berechnen.

§ 626. Dieses System wird während der Dauer der Ausführung des Gewölbes stets im Gleichgewicht sein und kein Bestreben haben, seine Form zu ändern.

Sind die Punkte  $B, B'$  fest und die drei Stücke, welche in den Punkten  $D, D_1, D_2 \dots$  zusammentreffen, hier an einander befestigt, so ist das Gleichgewicht stabil, und dies selbst dann noch, wenn man sich alle Stücke als um ihre Verbindungsstellen drehbar denkt. Doch wird es von Nutzen sein, einige Kreuzbänder anzubringen, wie dies in der Figur angedeutet ist, da diese Stücke zur Versicherung der Streben dienen und eine Biegung derselben in der Ebene der Rippen zu verhindern suchen<sup>1)</sup>.

§ 627. Müssen die Stützpunkte am Fusse der Widerlager genommen werden, so kann man die Anordnung eines Lehrgerüsts auf die in Fig. 159 dargestellte Weise

Fig. 159.



treffen. Die Pressungen, welche die Gewölbesteine in den Richtungen der Normale der Curve ausüben, werden durch die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  nach den Punkten  $D, D_1, D_2, \dots$  geleitet, in denen diese Stücke mit einander verbunden sind. Der auf den Punkt  $D$  stattfindende Normaldruck zerlegt sich nach den Richtungen der Strebe  $DA$  und des horizontalen Spannriegels  $DD'$ . Der sich dadurch ergebende Druck in der Richtung der Strebe wird durch den Widerstand des Stützpunktes  $A$  vernichtet, und der Druck in der Richtung des Spannriegels wird durch einen entgegengesetzten Druck vernichtet, welcher von der Pressung auf den Punkt  $D'$  herrührt. Eine ähnliche Zerlegung findet in den Punkten  $D_1, D_2, \dots$  statt. Die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  befinden sich in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie bei dem in § 625 betrachteten Systeme, und es wird leicht sein, die Pressungen in der Axe der Streben und der Spannriegel zu berechnen.

§ 628. Dieses System wird während der ganzen Dauer der Ausführung des Gewölbes im Gleichgewicht sein und kein Bestreben haben, seine Form zu ändern, wofern nur das Legen der Gewölbesteine von beiden Seiten zu gleicher Zeit geschieht. Unter Zulassung der in § 626 gemachten Annahmen ist das Gleichgewicht

<sup>1)</sup> Den Entwurf eines nach diesem Principe angeordneten Lehrgerüsts findet man in den Reports von Smeaton, Bd. III, pag. 349.

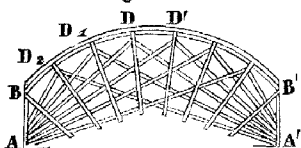
stabil. Die Stücke  $DE, D_1E_1, D_2E_2, \dots$ , welche in der Figur angedeutet sind, dienen nur dazu, die Spannriegel und Streben zu versichern und das Gewicht derselben auf die Punkte  $D, D_1, D_2, \dots$  zu übertragen.

§ 629. Die Anordnung eines gesprengten Lehrbogens kann noch auf die in Fig. 160 angegebene Weise stattfinden. In diesem Falle

wird der auf den Punkt  $D$  ausgeübte Normaldruck mittelst der Streben  $DA, DA'$  unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen; dasselbe geschieht hinsichtlich der Punkte  $D_1, D_2, \dots$ . Die Streben erleiden nur einen leicht zu berechnenden Druck in der Richtung ihrer Axe.

§ 630. Bei diesem letzten Systeme ist das Gleichgewicht selbst dann noch stabil und keine Neigung zu einer Formänderung vorhanden, wenn auf der einen Seite mehr Gewölbsteine gelegt worden sind, als auf der andern. Die Stücke  $DE, D_1E_1$  haben denselben Zweck wie bei der vorhergehenden Construction <sup>1)</sup>.

§ 631. Auf die Lehrgerüste lassen sich die Bemerkungen anwenden, die in § 615 u. folgd. bei den hölzernen Brücken über die Nothwendigkeit, die Rippen unter sich zu verbinden, gemacht wurden.



1) Das Princip, welches dieser Anordnung zum Grunde liegt, kam zum ersten Male bei der Westminster-Brücke (gebaut von King 1740) zur Anwendung. Dies geschah ferner bei der Black-Friars-Brücke (gebaut von Myln 1769), deren mittlerer Bogen eine Oeffnung von 100 engl. Fuss hat. Man sehe das Werk von Robison: A system of mechanical philosophy Bd. I, pag. 687. Auf dieselbe Weise wurden von Rennie die Lehrgerüste für die Bogen der Waterloo-Brücke, die eine Oeffnung von 120 engl. Fuss haben, ausgeführt. Man sehe den 3. Theil der Voyages dans la Grande-Bretagne von Ch. Dupin, oder Tredgold's Principles of carpentry. Die Gewölbbo gen dieser Brücken, und besonders bei der letzten, welche aus Granit construirt ist, sind von bedeutendem Gewichte, da die Gewölbsteine mehr als 6 Fuss Höhe haben.

## Zwölftes Kapitel.

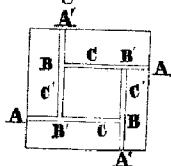
### Widerstand der Fussböden.

§ 632. Wir unterscheiden hier besonders 1) die gewöhnlichen Fussböden mit parallelen Trägern oder Lagerhölzern, welche auf den Mauern oder auf Balken liegen, welche von Mauer zu Mauer gehen; 2) die Fussböden aus Stücken, die nicht von Mauer zu Mauer gehen, aber mit einander verbunden sind; 3) die Fussböden aus mehreren Schichten von durch Nuth und Feder mit einander verbundenen Dielen (Bohlen), die kreuzweise aufeinander genagelt sind.

Die Fussböden der ersten Art verlangen keine besondere Untersuchung. Man wird stets nach den Resultaten, welche in § 88 u. folgd., sowie in § 123 u. folgd. gefunden sind, den Widerstand der Stücke mit den Lasten, welche von ihnen getragen werden müssen, vergleichen können.

§ 633. Die Fussböden der zweiten Art, welche man gewöhnlich Parkettirungen nennt, können auf eine unendlich verschiedene Weise angeordnet sein. Der Zweck, den man bei ihnen im Auge hat, ist der, die Construction mit Stücken auszuführen, deren Länge geringer als der Abstand der Mauer ist. Wir wollen

Fig. 161.

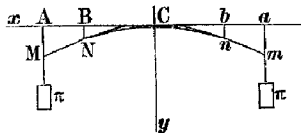


hier nur eine der einfachsten Anordnungen untersuchen, welche in Fig. 161 dargestellt ist. Dieses System, welches aus vier Stücken besteht, die symmetrisch zu einem quadratischen Rahmen zusammengefügt sind, kann man sich belastet denken mit Gewichten, die über die ganze Ausdehnung des Rahmens gleichförmig vertheilt sind, oder mit einem einzigen Gewichte im Mittelpunkte, dessen Wirkung auf die Punkte  $C, C', C'', C'''$  übertragen wird, u. s. w. In allen Fällen, wo die Belastung gleichförmig vertheilt ist, wird sich das System unter der Last so biegen, dass die vier Punkte  $B, B', B'', B'''$  sich um gleiche Längen senken und in derselben Horizontalebene bleiben. Betrachtet man daher die beiden Stücke  $AB, AB'$  mit ihren Belastungen für sich, so kann man sie als ein System ansehen, in welchem diese Stücke so mit einander

verbunden sind, dass während der Biegung die Punkte  $B$  und  $B'$  nothwendig in derselben Horizontalebene bleiben müssen. Dasselbe gilt von den Stücken  $A'B', A'B'$ .

Man nehme an, dass ein Gewicht  $4H$  im Mittelpunkt des Rahmens angebracht sei, und dass sich dadurch ein Verticaldruck  $\Pi$  in jedem der Punkte  $C, C, C, C'$  ergebe. Die Enden  $A, A, A, A'$  der Stücke werden alle auf die Punkte des Rahmens, von denen sie resp. gestützt werden, einen Druck  $\Pi$  ausüben. Man kann daher die Gleichgewichtsbedingungen der in Rede stehenden Construction auf die Weise suchen, dass man das System der beiden Stücke  $AB, AB$  als in den Punkten  $C, C$ , von einer festen Axe gestützt und in den Enden  $A, A$  mit zwei Gewichten  $\Pi$  belastet ansieht.

Fig. 162.



§ 634. Man betrachte jetzt zwei gleiche Stücke  $Mn, mN$  (Fig. 162), die an den Enden  $M, m$  mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet sind. Diese Stücke liegen in dem Intervalle  $Nn$  über einander. Das Ende des ersten Stückes ist mit

dem zweiten in  $n$ , und das Ende des zweiten ist mit dem ersten in  $N$  verbunden. Beide Stücke ruhen in  $C$  auf einer festen Horizontalaxe. Das Gewicht  $\Pi$ , welches in  $M$  aufgehängt ist, sucht das Stück  $Mn$  um die Axe  $C$  zu drehen, aber diese Bewegung wird verhindert durch einen gewissen von oben nach unten gerichteten Druck, der in  $N$  stattfindet, und durch einen eben so grossen von unten nach oben gerichteten Druck, der in  $n$  stattfindet, welche beiden Drücke eine Folge der Wirkung des in  $m$  aufgehängten Gewichtes  $\Pi$  und der Verbindung der beiden Stücke sind. Man kann also den Theil  $CM$  des ersten Stückes ansehen, als wäre derselbe in  $C$  in einer noch aufzusuchenden Richtung eingemauert, während er in  $M$  von dem Gewichte  $\Pi$  und in  $N$  von dem oben erwähnten Drucke in Anspruch genommen wird. Den Theil  $CN$  des zweiten Stückes kann man ansehen, als wäre derselbe in  $C$  eingemauert, und würde in  $N$  von dem nämlichen Drucke in Anspruch genommen.

Man nenne

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate eines beliebigen Punktes der Curve, welche die Stücke bilden, wobei  $C$  als der Ursprung des Coordinatensystemes angesehen wird;

$a$  die Entfernung  $AC$ ;

$a'$  die Entfernung  $BC$ ;

$f$  die Senkung  $AM$  des Punktes  $M$ ;

$f'$  die Senkung  $BN$  des Punktes  $N$ ;

$\omega$  den Winkel, welchen die Tangente des Punktes  $C$  der Curve  $CM$  mit der Abscissenaxe  $Cx$  bildet;

$\Pi$  den Druck, welchen das Ende des einen Stückes auf das andere in den Punkten  $N, n$  ausübt;

$\varepsilon$  und  $\rho$  behalten die in § 80 und § 113 angegebenen Bedeutungen.

Für den Theil  $CN$  des ersten Stückes  $Mn$  hat man zunächst

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi (a - x) - \Pi' (a - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\} + \varepsilon \tan \omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + x \varepsilon \tan \omega.$$

Sodann hat man für den Theil  $MN$  desselben Stückes, wenn die Constanten so bestimmt werden, dass man für  $x = a$  dieselben Werthe für  $y$  und  $\frac{dy}{dx}$  aus beiden Gleichungssystemen erhält,

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi (a - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi' \frac{a'^2}{2} + \varepsilon \tan \omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'^2 x}{2} - \frac{a'^2}{6} \right\} + x \varepsilon \tan \omega.$$

Endlich hat man für den Theil  $CN$  des zweiten Stückes

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi' (a' - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\} - \varepsilon \tan \omega.$$

$$\varepsilon y = \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - x \operatorname{tang} \omega.$$

Aus der ersten und der letzten der drei Gleichungen für  $y$  muss  $y=f'$  folgen, wenn man  $x=a'$  setzt. Daher

$$\varepsilon f' = \Pi' \left\{ \frac{aa'^2}{2} - \frac{a'^3}{6} \right\} - \Pi' \frac{a'^3}{3} + a' \operatorname{tang} \omega,$$

$$\varepsilon f' = \Pi' \frac{a'^3}{3} - a' \operatorname{tang} \omega.$$

Das Gleichgewicht jedes der beiden Stücke verlangt ausserdem die Relation

$$\Pi a = 2 \Pi' a'.$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man

$$\Pi' = \Pi \frac{a}{2a'},$$

$$\operatorname{tang} \omega = - \Pi \frac{(a-a')a'}{12},$$

$$f' = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(3a-a')a'^2}{12};$$

und substituirt man diese Werthe für  $\Pi'$  und  $\operatorname{tang} \omega$  in die Gleichung für den Theil  $MN$  des ersten Stückes und setzt darauf  $x=a$ , so erhält man für die Senkung  $AM$  des Endpunktes  $M$

$$f = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a(2a^2 - 2aa' + a'^2)}{6}.$$

Hätte man statt der beiden Stücke  $Mn, Nm$ , welche in der Länge  $Nn$  über einander liegen, nur einen einzelnen Stab, der in  $C$  gestützt und an den Enden  $M, m$  mit dem Gewichte  $\Pi$  belastet wäre, so würde die Durchbiegung, nach § 87, gleich  $\frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3}$  sein. Es wird also dadurch, dass die Stücke über einander liegen, die Durchbiegung vermindert, und zwar um so mehr, je grösser das Intervall  $Nn$  ist. Liegen die beiden Stücke in ihrer ganzen Länge über einander, oder ist  $a'=a$ , so folgt aus der vorstehenden Formel, wie es sein muss,

$$f = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{6}.$$



Für die Theile *CN* und *MN* des ersten Stückes und den Theil *BC* des zweiten Stückes hat man respective

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi \left\{ \frac{a}{2} - x + \frac{ax}{2a'} \right\},$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi (a - x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi \left\{ \frac{a}{2} - \frac{ax}{2a'} \right\}.$$

Ist  $a' = \frac{1}{2}a$ , so ist der Werth von  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  constant für alle Punkte des Theiles *CN* des Stückes *Mn*, so dass dieser Theil die Form eines Kreisbogens annimmt, dessen Halbmesser  $\frac{2}{\Pi} \frac{a}{a'}$  ist, und in allen Punkten eine gleich grosse Neigung zum Bruche besitzt. Ist  $a' < \frac{1}{2}a$ , so ist für das Stück *Mn* die Neigung zum Bruche in *N*, und ist  $a' > \frac{1}{2}a$ , so ist die Neigung zum Bruche in *C* am grössten. Die Bedingungen für den Bruch erhält man, wenn man, in Uebereinstimmung mit § 358, im ersten Falle die Gleichung

$$\rho = \Pi (a - a')$$

und im zweiten die Gleichung

$$\rho = \Pi \frac{a}{2}$$

setzt.

Hätte man statt der beiden über einander liegenden Stücke nur einen einzelnen Stab *Mm*, der in *C* unterstützt und an den Enden mit dem Gewichte  $\Pi$  belastet wäre, so würde, nach § 122,  $\rho = \Pi a$  sein. Nach den obigen Gleichungen lässt sich beurtheilen, in welchem Verhältnisse die Tragkraft des Systemes dadurch vermehrt wird, dass die beiden Stücke über einander liegen.

§ 635. Die vorstehenden Resultate lassen sich unmittelbar auf das in Fig. 161 dargestellte System, dessen Belastung in § 633 angegeben ist, anwenden, und man wird aus ihnen die Grösse der Durchbiegung, die durch die vier Gewichte  $\Pi$  bewirkt wird, oder den Werth, den man diesen Gewichten beilegen muss, wenn der Bruch eintreten soll, herleiten können.

Befinden sich die Stützpunkte  $A, A'$  in einem Viertel der Seiten des Rahmens so hat man  $a' = \frac{a}{2}$  und  $\rho = 2\Pi \frac{a}{2}$ . Dann leistet also das System einen doppelt so grossen Widerstand als zwei Stücke leisten würden, deren Länge dem Abstände zwischen den Seiten des Rahmens gleich wäre, obgleich das Volumen des Holzes nur um die Hälfte grösser ist. In der Wirklichkeit wird der Widerstand des in Rede stehenden Systemes nicht ganz das Doppelte von dem der beiden Stücke sein, da die Hölzer an den Verbindungsstellen, wo eben gerade die Neigung zum Bruche vorhanden ist, geschwächt werden.

§ 636. Setzt man einen rechteckigen Querschnitt der Stücke voraus, so ist  $\rho$  der Breite  $b$  des Rechteckes proportional. Ist andererseits die Höhe (oder Dicke) der Stücke so bestimmt worden, dass die Relation, welche nach den oben entwickelten Formeln zwischen  $\rho$ ,  $a$  und  $a'$  bestehen muss, stattfindet, so wird dies noch der Fall sein, wenn man die Grössen  $a$ ,  $a'$  und  $b$  in demselben Verhältnisse zunehmen lässt. Wenn man demnach alle Horizontaldimensionen der Fig. 161 in demselben Verhältnisse variiren lässt, ohne an der Höhe der Stücke etwas zu ändern, so bleibt der Werth des Gewichtes  $4\Pi$ , welches den Bruch bewirken könnte, beständig derselbe.

§ 637. Wäre die Belastung des in Fig. 161 dargestellten Systemes gleichförmig über die ganze Ausdehnung des Rahmens verbreitet, so würden sich die Gleichgewichtsbedingungen durch ähnliche Rechnungen, wie in dem vorigen Falle, finden lassen. Wir wollen uns bei diesen Untersuchungen nicht länger aufhalten, da sie keine Schwierigkeiten darbieten und es genügt, die Grundsätze angegeben zu haben, von denen ausgegangen werden muss.

### Biegung und Bruch elastischer Ebenen.

§ 638. Bei der Construction der dritten Art, welche im Anfange dieses Kapitels angegeben wurde, beabsichtigt man, eine volle, von zwei Parallelebenen begrenzte Masse zu bilden, deren Theile so fest wie möglich mit einander verbunden sein sollen. Die Gleichgewichtsgesetze eines

solchen Körpers, der in allen seinen Theilen homogen vorausgesetzt wird, sind bekannt <sup>1)</sup>, da aber die Darlegung der betreffenden Untersuchungen zu viel Raum wegnehmen und die Bekanntschaft mit analytischen Methoden voraussetzen würde, die noch nicht in die für Techniker bestimmten Lehrbücher und Vorträge aufgenommen sind, so sollen hier nur die einfachsten und den meisten Nutzen versprechenden Resultate aufgeführt werden.

§ 639. Man betrachte eine Ebene, welche in horizontaler Lage von einem rectangulären festen Rahmen unterstützt und in der Mitte dieses Rahmens mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet ist.

Man nenne

$a, b$  die beiden Seiten des Rahmens;

$h$  die Dicke der Ebene;

$f$  die Senkung des Punktes der Ebene, in welchem sich das Gewicht  $\Pi$  befindet;

$E$  behalte die in § 77 angegebene Bedeutung.

Man hat dann

$$f = \frac{45 \Pi a^2 b^2}{\pi^4 E h^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{(a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{1}{(a^2 + 5^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ \frac{1}{(3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{(3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ \frac{1}{(5^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{(5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$

wo  $\pi$  das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Die Senkung  $f$  ist der dritten Potenz der Dicke der Ebene umgekehrt proportional, und für Ebenen von ähnlicher Gestalt ist sie der zweiten Potenz einer Seite proportional.

§ 640. Ist die Ebene auf dieselbe Weise belastet und  $a$  die kleinste unter den beiden Seiten  $a$  und  $b$ , und sollen die Fasern in Folge der Wirkung der Kraft  $\Pi$  von keiner grössern Kraft als  $R$  für jede Flächeneinheit des Querschnittes in Anspruch genommen werden, so hat man die Gleichung zu setzen

<sup>1)</sup> Diese Gesetze sind zuerst vom Verfasser in einem der Akademie der Wissenschaften im Jahre 1820 eingereichten Memoire entwickelt. Man sehe das Bulletin des Sciences par la société Philomatique, année 1823, pag. 62.

$$K = \frac{45 \Pi a b^3}{2 \pi^2 h^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{3^2}{(a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{5^2}{(a^2 + 5^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ \frac{1^2}{(3^2 b^2 + b^2)^2} + \frac{3^2}{(3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ \frac{1^2}{(5^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{3^2}{(5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$

und den Werth von  $\Pi$ , welcher sich aus dieser Gleichung ergibt, als die Grenze der zulässigen Belastungen anzusehen. Dieser Werth ist dem Quadrate der Dicke der Ebene proportional; er ändert sich nicht, wenn man die Seiten  $a$  und  $b$  sich in demselben Verhältnisse ändern lässt, sodass er nicht von der absoluten Grösse der Seiten abhängt <sup>1)</sup>.

§ 641. Man nehme jetzt an, dass dieselbe rechteckige Ebene mit Gewichten belastet sei, die gleichförmig über ihre ganze Ausdehnung vertheilt sind, und bezeichne mit  $p$  das von der Einheit der Oberfläche getragene Gewicht. Man hat alsdann

$$f = \frac{180 p a^2 b^4}{\pi^2 E h^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1.1(a^2 + b^2)^2} - \frac{1}{1.3(a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{1}{1.5(a^2 + 5^2 b^2)^2} - \text{etc.} \\ - \frac{1}{3.1(3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{3.3(3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{5.1(5^2 a^2 + b^2)^2} - \frac{1}{5.3(5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \text{etc.} \\ - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Die Senkung  $f$  ist wieder der dritten Potenz der Dicke der Ebene umgekehrt proportional. Bei Ebenen von ähnlicher Gestalt ist die Senkung der vierten Potenz einer Seite proportional, wenn das von der Einheit der Oberfläche getragene Gewicht  $p$  constant ist; sie ist aber der zweiten Potenz einer Seite proportional, wenn die Totalbelastung  $pab$  constant ist.

§ 642. Ist die Ebene auf die angegebene Weise belastet und  $a$  die kleinste der beiden Seiten  $a$  und  $b$ , und sollen die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes mit keiner grössern Kraft als  $K$  in Anspruch genommen werden, so hat man die Gleichung zu setzen

<sup>1)</sup> Dieser Satz, der dem in § 636 aufgeführten analog ist, war von Mariotte auf eine ganz andere Weise bewiesen worden. Man sehe die Oeuvres de Mariotte, Bd. II. pag. 168.

$$R' = \frac{90 p a^2 b^4}{\pi^4 h^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1(a^2 + b^2)^2} - \frac{1}{3(3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{5(5^2 a^2 + b^2)^2} - \text{etc.} \\ - \frac{1(a^2 + 3^2 b^2)^2}{5} + \frac{3(3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2}{5} - \frac{5(5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2}{5} - \text{etc.} \\ + \frac{1(a^2 + 5^2 b^2)^2}{3} - \frac{3(3^2 a^2 + 5^2 b^2)^2}{5} + \frac{5(5^2 a^2 + 5^2 b^2)^2}{5} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

und den Werth von  $p$ , welcher dieser Gleichung Genüge leistet, als das grösste Gewicht anzusehen, mit welchem die Einheit der Oberfläche der elastischen Ebene belastet werden kann. Dieser Werth ist dem Quadrate der Dicke der Ebene proportional. Das Totalgewicht  $pab$ , mit welchem die Ebene belastet werden kann, ändert sich nicht, wenn man die Seiten  $a$  und  $b$  sich in demselben Verhältnisse ändern lässt, und hängt also nicht von der absoluten Grösse dieser Seiten ab.

§ 643. Diese Resultate lassen sich auf die Fussböden der in Rede stehenden Art anwenden, da aber diese Letzteren nicht die innige Verbindung der Theile und die Homogenität eines stetigen Körpers besitzen, so darf man ihnen in der Praxis keinen so grossen Widerstand voraussetzen, als aus den vorstehenden Formeln folgen würde.

### Praktische Regeln für die Anordnung der Fussböden.

§ 644. Nach Rondelet<sup>1)</sup> soll die Höhe der Lagerhölzer oder Träger gleich  $\frac{1}{4}$  der Balkenlänge sein, wenn die Weite zwischen den Hölzern gleich der Breite derselben ist. Diese Regel kommt mit den Angaben anderer Baumeister nahezu überein.

Die Balken, auf denen die Träger liegen, sind gewöhnlich in Abständen von 12 zu 12 Fuss angebracht. Die Stärke dieser Stücke muss  $\frac{1}{8}$  ihrer Länge sein.

§ 645. Tredgold<sup>2)</sup> unterscheidet zwei Arten von Fussböden, 1) die gewöhnlichen (*single joisted floors*), welche aus einer Reihe von Lagerhölzern oder Trägern bestehen, und 2) die zusammengesetzten Fussböden (*framed floors*), welche aus Balken bestehen, mit denen

1) Art de bâtir, tome IV., pag. 153.

2) Elementary principles of carpentry, pag. 61 u. folgd.

kleinere Querbalken, auf welchen die Träger ruhen, verbunden sind. Die Querbalken nehmen ausserdem von unten noch kleinere Träger, auf welche die Decklatten genagelt werden, auf.

Die Träger sind in der Regel einen engl. Fuss, von Mitte zu Mitte gerechnet, von einander entfernt. Bei den gewöhnlichen Fussböden lassen sich die Dimensionen der Träger, wenn man

$a$ ,  $b$  die in Zollen ausgedrückte Breite und Höhe der Stücke,

$c$  die in Fussen ausgedrückte Tragweite nennt, nach den folgenden Formeln bestimmen

$$b = 2, 2 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 2, 3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Eichenholz.}$$

Bei den zusammengesetzten Fussböden, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Balken in Abständen von 10 Fuss liegen, welche Entfernung nie überschritten werden sollte, nehme man für diese Stücke

$$b = 4, 2 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 74 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 4, 34 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 82 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Eichenholz.}$$

2) Für die kleineren Querbalken, die mit den Hauptbalken in Abständen von 4 bis 6 Fuss verbunden werden, nehme man

$$b = 3, 42 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 40 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Tannenholz.}$$

$$b = 3, 53 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 44 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Eichenholz.}$$

3) Die Dimensionen der oberen Träger werden nach der eben gegebenen Anleitung bestimmt. Die Breite der unteren Träger, welche nur zum Befestigen der Latten dienen, braucht nicht über 2 Zoll zu sein. Die Höhe dieser Stücke erhält man nach den Formeln

$$b = 0,64 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 0,67 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Eichenholz.}$$

### Dreizehntes Kapitel.

#### Widerstand der Wände eines Gefässes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit.

§ 646. Der Druck, den die Wände eines Gefässes durch die darin enthaltene Flüssigkeit erleiden, erfolgt normal auf die innere Oberfläche dieser Wände. Bei den elastischen (luftförmigen) Flüssigkeiten kann man die Grösse dieses Druckes als constant ansehen für die ganze Ausdehnung der Wand. Bei den (tropfbaren) Flüssigkeiten, welche der Wirkung der Schwere unterliegen, ist der Druck auf die unteren Theile der Wand grösser, als auf die anderen, und es ist oft nothwendig auf diesen Unterschied Rücksicht zu nehmen.

§ 647. In der Regel sind die Wände der Gefässe aus einem festen (starren) Materiale gebildet. Es sind alsdann Körper, die den Formänderungen, wozu sie durch den Druck der Flüssigkeiten angeregt werden könnten, widerstehen, jedoch diesem Drucke etwas nachgeben, wegen der Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit ihrer Theile. Zuweilen besteht zwischen der Form der Wand und der Grösse des Normaldruckes, den die Theile derselben erleiden, eine solche Beziehung, dass die Wand eigentlich nicht zu einer Formänderung, sondern nur zu einer Ausdehnung oder Zusammendrückung in der Richtung ihrer Fläche angeregt wird. Es soll dieser Fall dadurch bezeichnet werden, dass man sagt, die Wand sei nach der Gleichgewichtsfläche geformt. In diesem Falle kann die Wand aus einem vollkommen biegsamen Materiale bestehen, wie z. B. einem Faden-

gewebe, dessen Theile der Ausdehnung oder Zusammen-  
drückung, aber nicht der Biegung zu widerstehen ver-  
mögen. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn alle Theile  
der Fläche ausgedehnt werden, und das Einzige, was  
von Wichtigkeit ist zu kennen, ist die Grösse der  
Spannung, welche diese Theile erleiden.

Die Untersuchung der Erscheinungen, welche sich  
bei einer Wand zeigen, die von einer Flüssigkeit gedrückt  
wird, kann hier nicht auf eine vollständige und allgemeine  
Weise geführt werden, aber es sollen Gesetze entwickelt  
werden, mit denen man für die meisten Anwendungen  
ausreichen wird. Es werden nach einander eine Linie  
und eine Fläche betrachtet, die von Kräften in Anspruch  
genommen werden, deren Richtungen normal auf dieser  
Linie oder auf dieser Fläche stehen.

### Gleichgewicht einer Linie, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Linie stehen.

§ 648. Die Gleichgewichtsbedingungen eines als  
vollkommen biegsam angesehenen Fadens, an dessen  
sämtlichen Punkten Normalkräfte angreifen, könnten  
aus dem in § 306 und § 328 Gesagten abgeleitet werden.  
Sie lassen sich auch direct auf die folgende Weise finden.

Fig. 163.

Man betrachte zunächst die ebene  
Curve  $MM'$  (Fig. 163), mit welcher  
die Richtungen der Normalkräfte, von  
denen die Curve sollicitirt wird, in  
derselben Ebene liegen. Diese Curve  
kann man sich als ein Polygon von  
unendlich vielen Seiten und die Kräfte  
an den Eckpunkten desselben angreifend  
denken. Man nenne nun

- $ds$  die Länge des Bogenelementes  $mn$  der Curve,  
oder die Länge einer Seite des Polygons;
- $\rho$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  der  
Curve;
- $F$  den Werth der in  $m$  angreifenden Normalkraft  
für eine Einheit der Bogenlänge der Curve;
- $T$  die Kraft, mit welcher die Seite  $mn$  des Polygones  
gespannt wird.



Damit das Polygon im Gleichgewicht sein kann, muss die Kraft, welche an jedem Eckpunkte des Polygons angreift, durch die Spannungen der Elemente  $mn$ ,  $mn'$  vernichtet werden. Die in  $m$  angreifende Kraft ist  $Fds$  und ihre Richtung halbirt den Winkel  $nmn'$ . Es muss daher 1) die Spannung der Seite  $mn'$  gleich der Spannung  $T$  der Seite  $mn$  sein, und 2) muss sich verhalten  $T$  zu  $Fds$ , wie der Sinus des Winkels  $Fmn$  oder  $Fmn'$ , der von einem rechten Winkel unendlich wenig verschieden ist, zu dem Sinus des unendlich kleinen Winkels zwischen  $mn$  und  $mn'$ , dessen Werth gleich  $\frac{ds}{\rho}$  ist. Hieraus folgt 1) dass der Werth der Spannung  $T$  für alle Seiten des Polygons constant ist, oder dass der Faden in allen seinen Theilen gleich stark gespannt ist; 2) dass für jeden Punkt der Curve die Relation bestehen muss

$$\frac{Fds}{T} = \frac{ds}{\rho} \quad \text{oder} \quad F = \frac{T}{\rho}.$$

Der Normaldruck ist in jedem Punkte der Curve gleich der Spannung dividirt durch den Krümmungshalbmesser. Bildet der Faden keine geschlossene Curve, so müssen die letzten Elemente  $MN$ ,  $M'N'$  in der Richtung ihrer Länge mit einer Kraft angezogen werden, die gleich der Spannung  $T$  ist.

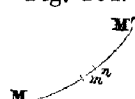
§ 649. Man betrachte jetzt eine Curve von doppelter Krümmung, auf welche ebenfalls Normalkräfte wirken. Man kann eine solche Curve ansehen als ein Polygon mit unendlich kleinen Seiten, von denen je drei auf einander folgende nicht in einer Ebene liegen. Die an den Eckpunkten angreifenden Kräfte müssen in der Richtung der Krümmungshalbmesser wirken. Alles in dem vorhergehenden Paragraphen Gesagte gilt auch für dieses System: wenn der Faden im Gleichgewicht sein soll, so muss derselbe in allen seinen Theilen gleich stark angespannt sein, und dies findet statt, wenn die in jedem Punkte angreifende Normalkraft gleich der Spannung dividirt durch den Krümmungshalbmesser ist <sup>1)</sup>.

1) Die Existenz des Gleichgewichtes in einem Faden, der eine doppelt gekrümmte Curve bildet, lässt sich sehr leicht auffassen, wenn man sich erinnert, dass nach einem von Lanceret (Mémoires présentés à la première classe de l'Institut, tome I, pag. 420) bewiesenen Lehrsatzes sich durch jede

§ 650. Wirken die Normalkräfte auf eine krumme Ruthe aus festem Materiale, die der Wirkung dieser Kräfte nur vermöge der Elasticität durch eine sehr kleine Formänderung nachgiebt, so ist zum Gleichgewichte des Systemes nicht mehr nothwendig, dass die oben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden. Die Spannung in der Richtung der Länge der Curve braucht alsdann nicht mehr constant zu sein.

Hinsichtlich der Bestimmung der Spannung, welche in der Richtung der Länge in einem beliebigen Punkte stattfindet, beachte man, dass im Allgemeinen eine Ruthe, auf welche Normalkräfte wirken, nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn diese Kräfte sich gegenseitig vernichten, oder wenn die Ruthe von festen Punkten gehalten wird, und zwar von zwei Punkten, wenn sie von einfacher, und von drei Punkten, wenn sie von doppelter Krümmung ist. Die Pressungen, welche die festen Stützpunkte erleiden, hat man aus der Bedingung zu bestimmen, dass sie mit den Normalkräften, welche in allen Punkten der Ruthe wirken, zusammen ein System bilden müssen, welches sich auf zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte zurückführen lässt. Die Spannung der einzelnen Theile der Ruthe wird gemeinschaftlich erzeugt von den in allen Punkten angreifenden Normalkräften und den besondern Kräften, welche in einzelnen Punkten angreifen müssen, um das Gleichgewicht herzustellen.

Will man demnach bei der krummen Ruthe  $MM'$  (Fig. 164), welche auf die oben angegebene Weise sollicitirt wird, und eine nicht geschlossene Curve bildet, die Spannung kennen, welche das Element  $mn$  in der Richtung seiner Länge erleidet, so wird man beachten, dass diese Spannung dadurch erzeugt wird, dass die Kräfte, welche auf die Theile  $mM, mM'$



beliebige Curve eine solche abwickelbare Fläche legen lässt, dass in der Abwicklung derselben jene Curve als eine gerade Linie erscheint. Diese Fläche, welche den Namen rectificirende Fläche (surface rectifiante) führt, entsteht durch die Durchschnitte der auf einander folgenden Ebenen, welche die Curve berühren und auf ihrem Krümmungshalbmesser normal stehen. Es folgt hieraus, dass es stets eine zu den Krümmungshalbmessern der gegebenen Curve normale Fläche giebt, auf welcher diese Curve eine Linie des kürzesten Abstandes ist. Der Faden kann daher angesehen werden als über die Oberfläche eines festen Körpers gespannt, auf welchem er im Gleichgewicht bleiben und in jedem Punkte einen Normaldruck ausüben wird.

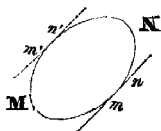
der Curve wirken, mittelst der Verbindung, welche das Element  $mn$  zwischen diesen beiden Theilen herstellt, sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Zerlegt man daher parallel zur Tangente der Curve für den Punkt  $m$  die sämtlichen Kräfte, welche auf den Theil  $mM$ , oder auch die sämtlichen Kräfte, welche auf den Theil  $mM'$  wirken, so wird die Summe der so erhaltenen Componenten die gesuchte Spannung sein.

§ 651. Man betrachte jetzt eine geschlossene, ebene Curve  $MN$  (Fig 165), welche von Normalkräften

Fig. 165. sollicitirt wird, deren Richtungen in der Ebene der Curve liegen, und nehme an, dass die Spannung gesucht werde, welche das Element  $mn$  erleidet.

Zerlegt man die sämtlichen Kräfte, von denen die Curve sollicitirt wird, parallel (und normal) zur Richtung der Tangente im Punkte  $m$ , so wird man beachten, dass die Punkte  $m'$ ,  $m$ , in denen die Tangente dieselbe Richtung hat, die Curve in zwei Theile zerfallen, in deren jedem die Normalkräfte Componenten nach entgegengesetzten Richtungen geben. Nimmt man die Resultante aus den Componenten, welche parallel zu  $mn$  sich respective durch die in  $mMn'$  und  $mNn'$  wirkenden Kräfte ergeben, so wird man zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte erhalten. Die Vernichtung dieser Kräfte bewirkt die Spannung der beiden Elemente  $mn$ ,  $m'n'$ : man wird also diese beiden Spannungen finden, wenn man die eine der beiden eben erwähnten Resultanten nach den Richtungen  $mn$  und  $m'n'$  zerlegt.

§ 652. Die Ruthe  $MN$  bilde jetzt eine Curve von doppelter Krümmung und man zerlege wieder die sämtlichen Kräfte, von denen die Curve sollicitirt wird, parallel (und normal) zu der Tangente durch den Punkt  $m$ . Denkt man sich jetzt die in Rede stehende Curve von einem Cylinder eingehüllt, dessen Seiten dieser Tangente parallel sind, so wird es einen Punkt  $m'$  geben, wo die berührende Ebene des Cylinders parallel ist der berührenden Ebene des Punktes  $m$  der Curve. Die beiden Punkte  $m$ ,  $m'$  werden wie vorhin die Curve in zwei Theile zerfallen, in deren jedem die Normalkräfte Componenten nach entgegengesetzten Richtungen

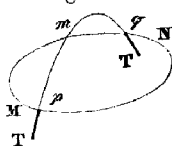


geben. Nimmt man die Resultante aus den Componenten, welche respective jeder der beiden Theile der Curve liefert, so wird man zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte erhalten, deren gegenseitige Vernichtung die Spannung der Elemente  $mn$ ,  $m'n'$  erzeugt. Zerlegt man daher die eine dieser beiden Kräfte in zwei andere ihr parallele, deren Richtungen in den berührenden Ebenen der Punkte  $m$ ,  $m'$  liegen, so wird die Componente, welche sich mit der Richtung in der berührenden Ebene des Punktes  $m$  ergibt, die Spannung sein, welche das Element  $mn$  erleidet.

### Gleichgewicht einer Fläche, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Fläche stehen.

§ 653. Die Gleichgewichtsbedingungen einer vollkommen biegsamen Fläche, welche von Normalkräften sollicitirt wird, können durch die folgenden Betrachtungen festgestellt werden.

Die Linie  $MN$  (Fig. 166) bilde die Begrenzung einer Fläche, und man betrachte den



Körper, welcher von dieser Fläche bedeckt wird und den wir hier als fest voraussetzen wollen. Die Linie kann man durch die zwei beliebig gewählten Punkte  $M$  und  $N$  in zwei Abschnitte  $MpN$ ,  $MqN$  theilen und

jeden dieser Abschnitte wieder in eine gleiche Anzahl sehr kleiner und unter sich gleicher Theile. Man kann ferner von dem Punkte  $M$  nach dem Punkte  $N$  und von jedem der Theilpunkte  $p$  des ersten Abschnittes nach dem entsprechenden Theilpunkte  $q$  des zweiten Abschnittes Fäden ausspannen, die sich auf den Körper nach der Linie des kürzesten Abstandes  $pmq$  legen werden, welche sich auf seiner Oberfläche zwischen den Punkten  $p$  und  $q$  beschreiben lässt.

Denkt man sich die Fäden so dicht neben einander gezogen, dass je zwei benachbarte einander immer unendlich nahe sind, so wird das Ganze eine Fläche bilden. Lässt man nun an den beiden Enden jedes Fadens  $pmq$  in der Richtung der letzten Elemente desselben zwei gleiche Kräfte  $T$  angreifen, so wird der

Faden vermöge seiner Spannung auf den Körper, welchen er umfasst, einen Normaldruck ausüben, dessen Werth für einen beliebigen Punkt  $m$  gleich  $\frac{T}{\rho}$  ist, wenn  $\rho$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  der von dem Faden beschriebenen Curve bezeichnet. Denkt man sich den festen Körper weggenommen und in allen Punkten  $m$  Normalkräfte angreifend, deren Werth gleich  $\frac{T}{\rho}$  ist, so wird das Gleichgewicht nach wie vor bestehen. Es ist hierbei nicht nöthig, dass  $T$  bei allen Fäden denselben Werth habe, wenn nur die Spannung in allen Theilen jedes einzelnen Fadens dieselbe ist.

Giebt man jetzt den Punkten  $M, N$  eine andere Lage auf der Begrenzungslinie der Fläche, so wird man auf dieselbe Weise ein zweites System von Linien des kürzesten Abstandes bilden und neue Fäden ausspannen können, welche die ersten kreuzen werden. Wird einer dieser neuen Fäden, der durch den Punkt  $m$  geht, mit der Kraft  $T'$  gespannt, so wird dieselbe in  $m$  einen Normaldruck  $\frac{T'}{\rho'}$  erzeugen, wo  $\rho'$  der Krümmungshalbmesser der Curve des neuen Fadens für den Punkt  $m$  ist, und dieser Druck wird den durch den ersten Faden hervorgebrachten vergrößern. Denkt man sich daher jetzt den Körper weg, so wird das Gleichgewicht un geändert bleiben, wenn man in  $m$  eine Normalkraft gleich  $\frac{T}{\rho} + \frac{T'}{\rho'}$  angreifen lässt.

Es ist klar, dass man auf diese Weise fortfahren und über den Körper unendlich viele Fäden spannen kann, die zu verschiedenen Systemen von Linien des kürzesten Abstandes gehören. Die einzigste Gleichgewichtsbedingung ist die, dass die Spannung jedes Fadens in allen seinen Punkten dieselbe sein muss. Bezeichnet man mit  $T, T', T'', \text{etc.}$  beziehungsweise die Spannungen der sich in irgend einem Punkte  $m$  kreuzenden Fäden und mit  $\rho, \rho', \rho'', \text{etc.}$  die zu diesem Punkte gehörenden Krümmungshalbmesser der Curven, welche die Fäden bilden, so wird der Normaldruck in  $m$  gleich  $\frac{T}{\rho} + \frac{T'}{\rho'} + \frac{T''}{\rho''} \text{etc.}$  sein. Es ist übrigens einleuchtend, dass in jedem Punkte  $p$  der Begrenzungslinie

der Fläche in den Richtungen der verschiedenen Fäden, welche von diesem Punkte ausgehen, eben so viele, den Spannungen dieser Fäden gleiche Kräfte angebracht werden müssen. Die Richtungen dieser Kräfte liegen sämmtlich in der Tangentialebene, welche die Fläche in dem Punkte  $p$  berührt.

Wenn die zu untersuchende Fläche nicht von einer Linie begrenzt wird, sondern eine geschlossene Hülle bildet, so wird man das Vorhergehende auf sie anwenden können, wenn man in Erwägung zieht, dass Gleichgewicht in den Fäden bestehen muss, die sich über diese Fläche so ausspannen lassen, dass ein oder mehrere Systeme von Linien des kürzesten Abstandes entstehen. Jeder Faden wird eine geschlossene Curve bilden und in allen seinen Theilen gleich stark gespannt sein; der durch ihn ausgeübte Normaldruck wird gleich seiner Spannung sein, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der von dem Faden gebildeten Curve. Der Normaldruck, welchen der Körper in einem beliebigen Punkte erleidet, wird gleich der Summe der Normaldrücke sein, die aus den Spannungen der verschiedenen, sich in diesem Punkte kreuzenden Fäden resultiren.

§ 654. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass eine biegsame Fläche, auf welche Normalkräfte wirken, im Gleichgewichte ist, wenn sich dieselbe mittelst eines oder mehrerer Systeme von Linien des kürzesten Abstandes in unendlich schmale und als Fäden anzusehende Streifen oder Bänder zerlegen lässt, welche unter sich im Gleichgewichte sind, vermöge einer richtigen Vertheilung der Normalkräfte, welche an jedem Punkte im Innern der Fläche und der Tangentialkräfte, welche an jedem Punkte der Begrenzungslinie wirken. Bei jeder vollkommen biegsamen Fläche giebt es unendlich viele Systeme von Normal- und Tangentialkräften, die mittelst dieser Fläche im Gleichgewicht sein können.

§ 655. Wir wollen jetzt eine vollkommen biegsame Fläche betrachten, welche durch eine feste Linie begrenzt und gehalten, und von Normalkräften so in Anspruch genommen wird, dass sie kein Bestreben hat, ihre Gestalt zu ändern. Es handelt sich um die Gleichgewichtsbedingungen, die Spannung, welche die Fläche

in einem beliebigen Punkte und in einer beliebigen Richtung erleidet, und die Tangentialkräfte, welche in jedem Punkte der festen Begrenzungslinie wirken. Diese Frage lässt sich im Allgemeinen nicht auflösen, wenn die Elemente der Fläche als unausdehnbar angesehen werden, da das Gleichgewicht auf unendlich viele verschiedene Arten bestehen kann. Sieht man aber die Elemente der Fläche als ausdehnbar an, so ist die Aufgabe eine bestimmte.

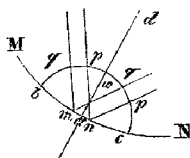
**Gleichgewicht einer Fläche, die von Normalkräften sollicitirt und nach allen Richtungen gleichmässig gespannt wird.**

§ 656. Es werde eine vollkommen biegsame und elastische Fläche von Normalkräften sollicitirt und es möge angenommen werden, dass zwischen diesen Kräften und den in der Richtung der Fläche wirkenden Spannungen Gleichgewicht bestehe. Zieht man auf dieser Fläche eine Linie des kürzesten Abstandes und betrachtet den Theil der Fläche, der durch ein sich längs dieser Linie hinziehendes Band von constanter und sehr geringer Breite gebildet wird, so wird dieses Band in der Richtung seiner Länge mit einer gewissen Kraft gespannt sein, und man sagt, dass die Fläche nach allen Richtungen gleichmässig gespannt sei, wenn 1) die Spannung des Bandes in allen Punkten seiner Länge constant ist, und 2) die Grösse dieser Spannung dieselbe ist, welche Richtung auch die Linie des kürzesten Abstandes, längs welcher das Band gedacht wird, haben möge.

Nennt man  $\lambda$  die als unendlich klein angenommene Breite des Bandes und  $\Theta$  den Werth seiner Längenspannung, welcher ebenfalls unendlich klein sein wird, so drückt das Verhältniss  $\frac{\Theta}{\lambda} = T$  die auf die Längeneinheit bezogene Spannung der Theile der Fläche aus. Die endliche Grösse  $T$  ist also das Maass der Kraft, mit welcher die Fläche gespannt ist.

§ 657. Es sei  $MN$  (Fig. 167) ein Theil der Begrenzungslinie einer nach allen Richtungen gleichmässig gespannten Fläche. Soll diese Fläche im

Fig. 167.

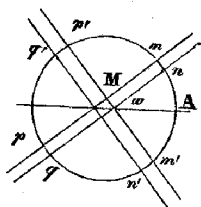


Gleichgewicht sein, so müssen an allen Punkten der Begrenzungslinie Kräfte angreifen, welche in der Richtung der die Fläche berührenden Ebene wirken. Die Linie  $MN$  lässt sich als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Theilen  $bc$ , deren Länge gleich  $\lambda$  ist, ansehen und die Kräfte, welche über das Intervall  $bc$  vertheilt sind, kann man sich in der Mitte  $a$  dieses Intervalles angreifend denken. Man kann ferner die Fläche ansehen, als bestehe sie aus unendlich vielen Fäden oder unendlich schmalen Bändern, die in der Richtung der Radien eines von dem Punkte  $a$  aus mit dem Halbmesser  $\frac{1}{2}\lambda$  beschriebenen Halbkreises liegen, und den Spannungen dieser Bänder werden die in dem Punkte  $a$  angreifenden Tangentialkräfte das Gleichgewicht halten müssen. Es seien jetzt  $muq\phi$  zwei der in Rede stehenden Bänder, welche mit der Normale  $ad$  denselben Winkel  $\omega$  bilden. Die Breite dieser Bänder wird gleich  $\frac{\lambda}{2} d\omega$ , ihre Spannung gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega$  und die Resultante aus den Spannungen der beiden Bänder gleich  $T\lambda d\omega \cdot \cos\omega$  sein. Die Summe aller auf diese Weise gefundenen Resultanten oder das Integral  $T\lambda \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \cdot \cos\omega$ , dessen Werth gleich  $T\lambda$  ist, wird die Tangentialkraft sein, welche im Punkte  $a$  angreifen muss. Demnach erheischt das Gleichgewicht einer nach allen Richtungen gleichmässig mit der Kraft  $T$  gespannten Fläche, dass in allen Punkten der Begrenzungslinie dieser Fläche unter sich gleiche Kräfte angreifen, deren Werth für eine Längeneinheit gleich  $T$  ist, und deren Richtungen die Fläche tangiren und normal auf der Begrenzungslinie stehen.

§ 658. Ist die Form einer vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Fläche gegeben, so giebt es stets ein System von normal auf allen innern Punkten angreifenden Kräften, wodurch die Fläche im Gleichgewichte erhalten und gleichmässig nach allen Richtungen gespannt werden kann. Es sei  $M$  (Fig. 168) ein Punkt einer



Fig. 168.



solchen Fläche und man denke sich um diesen als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben mit dem unendlich kleinen Halbmesser  $\frac{\lambda}{2}$ . Betrachten wir jetzt eines von den unendlich schmalen Bändern  $mnpq$ , die sich in den Richtungen der sich in dem Punkte  $M$  kreuzenden Linien des kürzesten Abstandes erstrecken. Bezeichnet man mit  $r$  den Krümmungshalbmesser des durch den Punkt  $M$  und in der Richtung der Axe dieses Bandes geführten Normalschnittes der Fläche, und mit  $\omega$  den Winkel, welcher von diesem Schnitte mit dem festen Halbmesser  $AM$  gebildet wird, so ist die Breite  $mn$  oder  $pq$  des Bandes gleich  $\frac{\lambda}{2} d\omega$  und die Spannung desselben gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega$ . Sieht man daher dieses Band als einen isolirten Faden an, so wird dasselbe im Gleichgewicht sein, wenn man im Punkte  $M$  eine Normalkraft angreifen lässt, deren Werth nach den §§ 648 und 649 für die Längeneinheit gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega \cdot \frac{1}{r}$  und mithin für das Intervall  $mnpq$  gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega \cdot \frac{1}{r} \cdot \lambda$  oder  $T \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\omega$  ist. Für ein zweites Band  $m'n'p'q'$ , welches sich mit dem ersten rechtwinklig kreuzt, erhält man ebenso, wenn  $r'$  den Krümmungshalbmesser des in der Richtung dieses neuen Bandes geführten Normalschnittes bezeichnet,  $T \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{r'} \cdot d\omega$  als den Werth der Normalkraft, welche in  $M$  angreifend das zweite Band im Gleichgewicht halten würde. Nimmt man die Summe der Werthe, welche der Ausdruck  $T \cdot \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) d\omega$  annimmt, wenn  $\omega$  von 0 bis zum vierten Theil des Kreisumfanges wächst, so erhält man die Summe der Normalkräfte, welche, im Innern des um  $M$  als Mittelpunkt beschriebenen Kreises angreifend, den Spannungen aller Bänder, die sich in diesem Punkte kreuzen, das Gleichgewicht halten. Nun ist bekanntlich der Werth der Grösse  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$  von dem

Winkel  $\omega$  unabhängig und gleich  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ , wenn man mit  $\rho$  und  $\rho'$  die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers der Fläche für den Punkt  $M$  bezeichnet <sup>1)</sup>.

Das gesuchte Integral ist also  $T \cdot \frac{\pi \lambda^2}{2 \cdot 2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)$ , und, da der Inhalt des von dem Punkte  $M$  aus mit dem Halbmesser  $\frac{\lambda}{2}$  beschriebenen Kreises gleich  $\frac{\pi \lambda^2}{4}$  ist, so hat man den Ausdruck

$$T \left\{ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right\}$$

als den auf die Flächeneinheit bezogenen Werth der Normalkraft, welche in dem Punkte  $M$  angreifen muss, wenn die Fläche gleichmässig nach allen Richtungen mit der Kraft  $T$  gespannt werden soll <sup>2)</sup>.

§ 659. Sind die beiden Krümmungshalbmesser  $\rho$  und  $\rho'$  einander an Grösse gleich und von demselben Vorzeichen, welche Eigenschaft der Kugel zukommt, so ist die in Rede stehende Kraft gleich  $\frac{2T}{\rho}$ . Man sieht hieraus, dass derselbe Normaldruck, welcher in der Richtung der kreisförmigen Elemente einer Cylinderfläche eine Spannung  $T$  hervorbringen würde, bei einer Kugel- fläche von gleichem Durchmesser nur eine Spannung  $\frac{1}{2}T$  nach allen Richtungen zu erzeugen vermag.

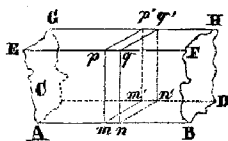
### Anwendungen auf Gefässe von verschiedener Gestalt.

§ 660. Es mögen zuerst Gefässe mit ebenen Wänden, die von einer darin enthaltenen Flüssigkeit einen von innen nach aussen gerichteten Druck auszuhalten haben, betrachtet werden. Die Wände solcher Gefässe werden im Allgemeinen in der Richtung ihrer Ebene ausgedehnt, während sie zugleich einem Normaldrucke Widerstand leisten müssen. Der einfachste, sich hier darbietende Fall ist der, wo das Gefäss aus einer geraden Röhre besteht, deren Wände mit der Axe der Röhre parallel laufen, wie z. B. bei  $AH$  (Fig. 169), welche eine an

1) Navier, Integralrechnung § 569.

2) Man wird leicht einsehen, dass man zu demselben Resultate gelangen muss, wenn man irgend eine andere Figur betrachtet, deren Mittelpunkt  $M$  ist.

Fig. 169.

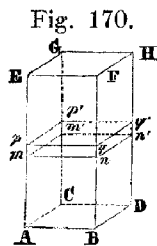


beiden Enden offene Röhre mit rechteckigem Querschnitt darstellen soll. Die Wände werden in diesem Falle nur in der Richtung ihrer Breite, nicht aber in der Richtung ihrer Länge ausgedehnt. Betrachtet man jetzt einen Theil  $m'q'$ , dieser Röhre, so kann man die Stücke  $mnn'm'$  und  $pqq'p'$  der untern und obern Wand ansehen, als würden sie, vermöge der entgegengesetzten Drücke auf die Theile  $mnp$  und  $m'n'p'q'$  der Seitenwände, mit einer Kraft ausgedehnt, die gleich dem halben Drucke auf einen dieser Theile ist; und deren Richtung parallel zu den Seiten  $mn'$ ,  $pp'$  ist. Auf dieselbe Weise wird jedes der Stücke  $m'q'$ ,  $m'q'$  von einer zu  $mp$ ,  $m'p'$  parallel gerichteten Kraft ausgedehnt werden, die dem halben Drucke gleich ist, welche auf dem Raume  $mn'$  oder  $pq'$  stattfindet. Jedes der Wandstücke, um die es sich hier handelt, kann also wie ein Stab betrachtet werden, der in der Richtung seiner Länge ausgedehnt wird, und auf den über diese Länge gleichförmig vertheilte Normalkräfte wirken, während er selbst an beiden Enden unterstützt ist. Man kann hier mithin die Analyse des § 592 anwenden und die Stärke der Wand aus der Gleichung des § 593 bestimmen, wobei  $a$  die Hälfte der Länge  $mp$ ,  $Q$  die Hälfte des auf  $mn'$  oder  $pq'$  ausgeübten Normaldruckes, und  $p$  den Werth des Normaldruckes auf eine in der Richtung  $mp$  gemessene Einheit des Längenmaasses bezeichnet.

§ 661. Ist die Röhre an beiden Enden oder nur an einem Ende geschlossen, so gilt das Vorhergehende, streng genommen, für diesen Fall nicht. Verfährt man indessen auf die oben angegebene Weise, so wird man einen Grenzwert finden, bei dessen Anwendung man sicher sein kann, dass jede Wand eine mehr als ausreichende Stärke erhalten wird. Betrachten wir z. B. ein vertical stehendes, oben offenes Gefäss, welches mit einer schweren (d. h. nicht luftförmigen) Flüssigkeit gefüllt ist und dessen Boden von einer festen Horizontalebene getragen wird. Hätte das Gefäss keinen Boden, so liesse sich auf jedes horizontale Element  $m'q'$  das in dem vorhergehenden Paragraphen Gesagte anwenden, wobei nur zu beachten wäre, dass der Druck der Flüssig-

keit mit der Tiefe zunimmt, und mithin die Elemente der Wände um so grössern Kräften zu widerstehen haben, je tiefer sie unter dem Niveau der Flüssigkeit liegen.

§ 662. Ist ein Gefäss gänzlich geschlossen, so werden auch die Wände nach mehreren Richtungen hin ausgedehnt. Wenn z. B. das parallelepipedische Gefäss  $AH$  (Fig 170) an beiden Enden geschlossen ist und eine



von innen nach aussen drückende Flüssigkeit enthält, so wird jede Wand wie  $AF$  offenbar in der Richtung der Kanten  $AB$  und  $AE$  ausgedehnt. Diese Wand kann daher als zu einem jeden der beiden parallelepipedischen Röhren, deren Axe respective parallel zu  $AB$  und  $AF$  ist, gehörend angesehen werden. Wendet man das in § 660 Gesagte nach einander auf diese beiden Röhren, die man sich an beiden Enden offen zu denken hat, an, so wird man Resultate erhalten, die nothwendiger Weise eine mehr als genügende Dicke für die verschiedenen Wände geben werden, und zwar wird der Ueberschuss an Stärke, den die Wände auf diese Weise erhalten, um so grösser sein, je kürzer die Röhren im Vergleich mit den Dimensionen ihres Querschnittes ausfallen.

Die Untersuchung des Gleichgewichtes, welches in Fällen dieser Art wirklich stattfindet, erfordert eine besondere Analyse, die hier nicht gegeben werden kann.

§ 663. Sind die Wände eines Gefässes nicht eben, sondern cylindrisch, so lässt sich ihre Stärke mit Hülfe der Resultate bestimmen, welche im sechsten Kapitel über den Widerstand der Stäbe mit bogenförmiger Axe gefunden sind.

§ 664. Um jetzt zu den Gefässen mit gebogenen Wänden überzugehen, betrachte man zuerst eine gerade und an beiden Enden offene Röhre, und zwar unter der Voraussetzung, dass der Druck, den die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit ausübt, für alle Punkte desselben Querschnitts constant sei, oder wenigstens ohne merkbare Fehler als constant angenommen werden könne, wie dies bei engen Röhren der Fall ist, welche zum Fortleiten von Gasen oder Wasser dienen. In der Wand einer solchen Röhre findet keine Spannung in der

Richtung ihrer Länge, sondern nur in der Richtung der Querschnitte statt. Ein von zwei aufeinander folgenden Querschnitten begrenztes Element der Röhre kann man als einen Faden oder ein Band betrachten, das von Normalkräften, deren Richtungen in seiner Ebene liegen, in Anspruch genommen wird.

Diese Kräfte sind in allen Punkten dieselben, der Faden kann daher nicht anders im Gleichgewichte sein, als wenn der Krümmungshalbmesser desselben einen constanten Werth hat. Demnach wird die Wand nur dann kein Bestreben haben, ihre Form zu ändern, wenn der Querschnitt der Röhre kreisförmig ist.

Bezeichnet man, unter Voraussetzung eines kreisförmigen Querschnittes, mit  $p$  den Werth des von der Flüssigkeit auf die Einheit der Wandfläche ausgeübten Normaldruckes, so wird, wenn man ein Stück der Röhre betrachtet, dessen Länge in der Richtung der Axe gleich der Längeneinheit ist, dies  $p$  den Normaldruck auf einen Theil dieses Stückes angeben, dessen Länge in der Richtung des Umfanges ebenfalls gleich der Längeneinheit ist. Nennt man daher  $r$  den Halbmesser der Röhre, so hat man, nach § 648,  $pr$  für die Spannung, welche in der Richtung des Umfanges stattfinden wird. Man kann demnach sagen, dass die Wand der Röhre in der Richtung der Querschnitte mit einer Kraft  $pr$  ausgedehnt wird. Man sieht hieraus, dass die Spannung, welche aus demselben innern Normaldruck resultirt, in gleichem Verhältnisse mit dem Halbmesser der Röhre zunimmt.

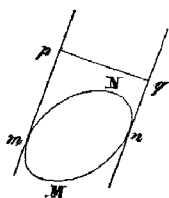
Bezeichnet man mit  $h$  die Dicke der Wand, welche als constant und bedeutend kleiner als der Halbmesser  $r$  vorausgesetzt wird, und mit  $K$  die grösste Spannung, welche die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes erleiden sollen, so kann man die Wanddicke aus der Gleichung bestimmen:

$$K' h = pr.$$

§ 665. Ist der Querschnitt der Röhre nicht kreisförmig, so hat die Wand ein Bestreben, ihre Form zu ändern, und ändert sie wirklich, wenn die Röhre von einem biegsamen Gewebe gebildet wird. Besteht die Wand aus einer festen Masse, so ändert sie ihre Form nicht ganz, aber diese wird, vermöge der Elasticität

des Materials, in etwas modificirt. Die Wand wird alsdann auf zwei Arten in Anspruch genommen: 1) durch die Wirkung der Formänderung, wodurch die Fasern ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, je nachdem sie an der convexen oder an der concaven Seite liegen, und 2) durch die Wirkung der Spannung, die in der Richtung der Querschnitte eintritt, für verschiedene Punkte eines Querschnittes verschiedene Werthe hat, und die Fasern in der ganzen Dicke der Wand auszudehnen sucht. Was die Wirkung der Formänderung anlangt, so ist sie in den meisten Fällen der Praxis von geringem Betracht; mittelst der im sechsten Kapitel entwickelten Principien wird man sie immer auffinden können. Was die Wirkung der durch den Druck der Flüssigkeit verursachten Spannung, die gewöhnlich weit mehr zu berücksichtigen ist, betrifft, so sei  $MN$  (Fig. 171) ein

Fig. 171.



Querschnitt der Röhre, wo sich dann die in dem beliebigen Punkte  $m$  desselben stattfindende Spannung auf folgende Weise bestimmen lässt. Man ziehe die Tangente  $mp$  und eine zweite, der ersten parallele Tangente  $nq$ . Beachtet man sodann, in Uebereinstimmung mit § 651, dass die Composanten, welche sich parallel den Linien  $mp$ ,  $nq$  aus den Normaldrücken auf die Curventheile  $mMn$  oder  $mNn$  ergeben, gleich dem Drucke auf die Linie  $pq$ , welche zu  $mp$ ,  $nq$  normal ist, sein muss, so wird man die in  $m$  stattfindende Spannung erhalten, wenn man die Hälfte von dem Drucke nimmt, welchen die Flüssigkeit auf eine Wand  $pq$  ausüben würde. Die Spannung in den verschiedenen Theilen der Wand der Röhre ist demnach dem Abstände der beiden Tangenten  $mq$ ,  $nq$  proportional.

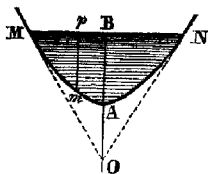
§ 666. Ist die gerade Röhre, um die es sich hier handelt, an einem Ende geschlossen, so würde der Widerstand des Bodens der Formänderung und der Vergrößerung der Querschnitte entgegen treten, und die Wand wird minder stark in Anspruch genommen, besonders in der Nähe des geschlossenen Endes. Noch mehr wird dies bei einer an beiden Enden geschlossenen Röhre der Fall sein. Alsdann erleidet aber die Wand, vermöge

des Druckes auf die beiden Bodenflächen der Röhre, auch eine Spannung in der Richtung der Seiten der cylindrischen Mantelfläche, während sie zu gleicher Zeit die Spannung in der Richtung der Querschnitte zu ertragen hat. Ist der Querschnitt der Röhre kreisförmig, so hat man, unter Beibehaltung der Bezeichnungen des § 664,  $p \cdot r^2\pi$  für den Druck auf die beiden Bodenflächen, und folglich  $\frac{p \cdot r^2\pi}{2r\pi}$  oder  $\frac{pr}{2}$  für die Spannung der Wand in der Richtung der Seiten des Cylinders.

Bei einem überall gleichen Drucke der Flüssigkeit ist also die Spannung in der Richtung der Seiten halb so gross, als die Spannung in der Richtung der Querschnitte. Ist der Querschnitt der Röhre nicht kreisförmig, so ist die Spannung in der Richtung der Seiten dennoch geringer, als die Spannung in der Richtung der Querschnitte.

§ 667. Es sei *MAN* (Fig. 172) der Querschnitt

Fig. 172.



eines cylindrischen Gefässes von unbestimmter Länge und *MN* sei das Niveau einer darin enthaltenen, schweren (nicht luftförmigen) Flüssigkeit. Der Normaldruck auf einen beliebigen Punkt *m* des Querschnittes wird hier dem Abstände *mp* proportional sein. Besteht daher die Wand aus einem biegsamen Gewebe, so ist

nach § 648 die Gleichgewichtsbedingung, dass der Krümmungshalbmesser für den Punkt *m* dem Drucke *mp* umgekehrt proportional sei, und hierdurch ist die Natur der Curve festgelegt. Durch eine Vergleichung mit dem in den §§ 77 und 86 Gesagten wird man finden, dass die Gestalt der Curve dieselbe ist, wie die, welche eine elastische Feder mit homogenem Materiale und gleichförmiger Breite und Dicke annehmen würde, wenn ihre natürliche Gestalt gerade wäre und sie vermittelst einer in *M* und *N* befestigten Schnur gebogen würde. Die Spannung ist in allen Punkten dieser Curve gleich gross, und man wird den Werth dieser Spannung erhalten, wenn man sich das Gewicht der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit in *O* angreifend denkt und dann nach den Richtungen der

beiden Tangenten  $MO$ ,  $NO$ , welche die Endpunkte der Curve berühren, zerlegt.

Es ist klar, dass nur dann Gleichgewicht vorhanden sein kann, wenn die Punkte  $M$ ,  $N$  fest sind, oder in diesen Punkten die Curve von zwei Kräften gezogen wird, deren Grösse gleich der Spannung der Curve ist, und deren Richtungen die Verlängerungen der beiden genannten Tangenten sind.

§ 668. Besitzt die horizontale, cylindrische Röhre keinen Querschnitt, welcher dem Gleichgewichte entspricht, so wird die Wand, wenn diese aus einer festen Masse besteht, durch den Druck der Flüssigkeit eine geringe Biegung erleiden. Die Biegung dieser Wand, so wie die Spannung in der Richtung der Querschnitte hängen zu gleicher Zeit von der Form des Querschnittes und von der Weise ab, auf welche die Röhre unterstützt wird; in allen Fällen wird man die im sechsten Kapitel entwickelten Principien anwenden können.

§ 669. Ist eine gleiche cylindrische Röhre an beiden Enden geschlossen, so werden die Theile, welche diesen Enden nahe liegen, weniger in Anspruch genommen. Die Wand wird ausserdem in der Richtung parallel zur Axe ausgedehnt. Der Werth dieser letztern Spannung muss offenbar gleich dem Drucke auf jede der beiden Bodenflächen der Röhre sein; es lässt sich aber die Vertheilung dieser Spannung auf die verschiedenen Seiten der Cylinderflächen nicht mit Genauigkeit bestimmen, wenn man nicht die gebogene Wand und die beiden Boden als einen einzigen, elastischen Körper ansehen und die Gleichgewichtsbedingungen desselben vollständig aufsuchen will.

§ 670. Befindet sich eine Flüssigkeit in einem gänzlich geschlossenen Gefässe und ist der Druck derselben auf alle Theile der Wand gleich gross, so kann die Wand, wenn diese biegsam ist, nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sie die Form einer Kugelfläche hat. Nennt man in diesem Falle in Uebereinstimmung mit den §§ 648 und 649,  $p$  den innern Druck auf eine Einheit des Flächenmaasses und  $r$  den Halbmesser der Kugel, so wird diese nach allen Richtungen gleichmässig mit der Kraft  $\frac{1}{2}pr$  ausgedehnt, so dass wenn  $h$  die



Dicke der Wand ist, diese genügend sein wird, wenn die Gleichung besteht

$$R' h = \frac{1}{2} p r.$$

Eben so würde es sein, wenn die Wand aus einer festen Masse bestände, und von Natur die sphärische Gestalt hätte. Da der Druck der Flüssigkeit diese Gestalt nicht zu ändern sucht, so kann die Wand nur dadurch nachgeben, dass sie sich ausdehnt, und sie muss nach allen Richtungen gleichmässig gespannt sein.

§ 671. Ist die Wand des Gefässes nicht sphärisch, so muss dieselbe nothwendiger Weise aus einem festen Materiale gebildet sein. Der Druck der Flüssigkeit sucht ihre Form zu ändern, während sie zugleich eine Spannung bewirkt. Die Aufsuchung des Gleichgewichtszustandes einer solchen Wand ist im Allgemeinen sehr verwickelt und stützt sich auf Principien, welche hier nicht entwickelt werden können. Ohne sich mit dieser Untersuchung zu befassen, wird man in der Praxis die Dicke der Wand auf eine Weise bestimmen können, welche die Sicherheit gewährt, dass die Wand dem Drucke der Flüssigkeit genügenden Widerstand leisten wird. Man denke sich hierzu, in Uebereinstimmung mit dem oben in § 653 u. folg. entwickelten Principien, auf der Oberfläche des Gefässes in einer beliebigen Richtung eine Linie des kürzesten Abstandes gezogen und betrachte ein unendlich schmales Band von gleichförmiger Breite längs dieser Linie. Sieht man dieses Band als eine elastische Ruthe an, welche in jedem Punkte von Normalkräften in Anspruch genommen wird, deren Werth von dem Drucke der Flüssigkeit abhängt, so lässt sich der Biegungszustand und die Spannung dieses Bandes nach den im sechsten Kapitel entwickelten Principien ermitteln, und darnach die Stärke desselben bestimmen. Nun ist aber klar, dass wenn ein beliebiges Band, welches von dem übrigen Theile der Wand getrennt ist, den nöthigen Widerstand leisten wird, dies mit der ganzen Wand, als der Vereinigung aller einzelnen Bänder, um so mehr der Fall sein muss, da der gegenseitige Zusammenhang der Bänder nur den Widerstand vermehren kann.

§ 672. Ist z. B. die Gestalt des Gefässes eine Umdrehungsfläche, auf welcher die Meridiane Linien des kürzesten Abstandes sind, so kann man einen dieser Meridiane oder das unendlich schmale Band, dessen Axe es bilden würde, betrachten, und die Dicke der Wand so bestimmen, dass dieses Band, wenn es isolirt wäre, dem Drucke der Flüssigkeit würde widerstehen können. Die Wand wird dadurch eine mehr als hinreichende Stärke erhalten. Wäre die Umdrehungsfläche eine Kugel- fläche so würde die so bestimmte Wanddicke genau das Doppelte derjenigen betragen, die wirklich nöthig wäre, wie sich dies aus § 648 und § 659 ergibt.

**Versuche über den Widerstand der Wände eines Gefässes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit.**

§ 673. Bei einem von Mariotte <sup>1)</sup> angestellten Versuche ertrug ein Cylinder aus Weissblech den Druck einer Wassersäule von 90 Fuss Höhe, ohne zu zerbrechen. Dieser Cylinder hatte einen Fuss im Durchmesser; seine Länge ist nicht angegeben, scheint aber 1 bis 2 Fuss gewesen zu sein. An beiden Enden war der Cylinder durch zwei Kupferplatten, die mit dem Weissblech ver- löthet waren, verschlossen. Nach einiger Zeit trat der Bruch an einer solchen Löthstelle unter dem Drucke einer 100 Fuss hohen Wassersäule ein. Die Dicke des Weissblechs ist nicht angegeben; der Experimentator stellt aber den Widerstand dieses Materials in seinem Versuche zusammen mit dem Widerstand eines 3 Zoll breiten Bandes von Weissblech, welches eine Spannung von 120 Pfd. getragen hat.

§ 674. Bei einem andern Versuche desselben Experimentators <sup>2)</sup> ertrug ein bleiernes Gefäss in Form eines Tönnchens von 18 Zoll Länge, 1 Fuss Spundtiefe, 8 Zoll Bodentiefe und  $2\frac{1}{2}$  Linien Wanddicke, dessen Boden aus zwei Platten von demselben Materiale be- standen, den Druck einer 100 Fuss hohen Wassersäule, ohne zu zerbrechen. Die Platten bogen sich um  $1\frac{1}{2}$  Zoll durch. Nachdem das Blei in der halben Höhe des

1) Traité du mouvement des eaux, Oeuvres de Mariotte, tome II. pag. 471.

2) Ebendasselbst.

Tönnchens in einer Strecke von 6 Zoll Länge und 4 Zoll breit gefeilt und dadurch die Wanddicke in der Mitte der Feilstelle auf etwas weniger als eine Linie reducirt worden war, gab das Blei an dieser Stelle nach und es entstand ein Riss.

§ 675. Bei zwei Versuchen von Jardine in Edinburg<sup>1)</sup> ertrug eine Bleiröhre von  $1\frac{1}{2}$  engl. Zoll Durchmesser und  $\frac{1}{5}$  Zoll Wanddicke den Druck einer 1000 Fuss hohen Wassersäule, ohne dass eine merkliche Beschädigung eintrat. Der Bruch erfolgte unter dem Drucke einer Wassersäule von 1200 Fuss Höhe. Eine ähnliche Röhre von derselben Wanddicke und 2 Zoll Durchmesser ertrug, ohne eine merkliche Beschädigung zu erhalten, den Druck einer 800 Fuss hohen Wassersäule, und der Bruch erfolgte, als die Höhe der Wassersäule 1000 Fuss betrug.

§ 676. Bei einem Versuche des Verfassers bestand ein Gefäss von fast sphärischer Gestalt aus zwei Halbkugeln von sehr gutem Schwarzblech, die durch Stifte und Löthung so mit einander verbunden waren, dass sie sich 0,01 Meter breit bedeckten. Der äussere Durchmesser des grössten Kreises, in welchem die Löthung gemacht war, hielt 0,337 Meter, und der auf diesem normal stehende Durchmesser 0,323 Meter, die Wanddicke war 0,0026 Meter. Der Bruch erfolgte unter einem Drucke von 144 Kil. auf den Quadracentimeter und zeigte sich durch einen kleinen Riss, der 0,05 Meter von der Löthstelle entfernt war.

Bei einem andern Versuche brach ein ähnliches Gefäss, dessen Durchmesser in der Richtung des grössten Kreises, in welchem die Löthung gemacht war, 0,285 Meter, und in der entgegengesetzten Richtung 0,279 Meter hielt, bei einer Wanddicke von 0,0024 Meter, unter einem Drucke von 163 Kil. auf den Quadracentimeter. Der Bruch zeigte sich gleichfalls durch einen kleinen Riss in einer Entfernung von 0,12 Meter von der Löthstelle.

§ 677. Die Resultate der Mariotte'schen Versuche lassen sich, wegen der Ungenauigkeit des ersten, und der complicirten Form des Gefässes bei dem zweiten,

1) Annales de chimie et de physique, mars 1826.

nicht dem Calcul unterwerfen. Wendet man auf die beiden Versuche von Jardine die oben in § 664 gegebene Formel an, so findet man, dass das Blei von einer Kraft von 1,37 bis 1,58 Kil. für den Quadratmillimeter zerrissen worden ist. Diese Resultate stimmen also ganz und gar mit denen der in § 70 aufgeführten directen Versuche überein. Wendet man in gleicher Weise auf die beiden Versuche des Verfassers die in § 670 angegebene Berechnung an, indem man den grössten der beiden Durchmesser beibehält, so findet man, dass das Schwarzblech von einer Kraft von 46 bis 47 Kil. für den Quadratmillimeter zerrissen worden ist. Dieses Resultat stimmt ebenfalls mit denen der in § 52 aufgeführten directen Versuche, welche mit Schwarzblech von geringer Qualität angestellt wurden, überein.

4 Zoll  
Mitte  
educirt  
n und

Edin-  
Durch-  
0 Fuss  
schädi-  
Drucke  
nliche  
messer  
halten,  
d der  
0 Fuss

rs be-  
zwei  
durch  
waren,  
ussere  
n die  
er auf  
r, die  
unter  
imeter  
Meter

liches  
össten  
Meter,  
hielt,  
einem  
Der  
a Riss  
stelle.

rsuche  
, und  
reiten,



**Ergänzungen**  
zu  
**Navier's Baumechanik**  
von  
**Georg Westphal.**

---

Erster Abschnitt.

**Die Grundbegriffe der allgemeinen Mechanik in  
besonderer Beziehung zur Festigkeitslehre.**

---

§ 1. Die Lehre vom Widerstande der Materialien stützt sich natürlich auf die Grundbegriffe und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, und das geringste Uebersehen in dieser letztern Hinsicht muss desshalb in der Festigkeitslehre zu Irrthümern führen. Wie leicht aber ein derartiges Uebersehen möglich ist, davon giebt uns ein so berühmter Mann, wie Navier selbst das schlagendste Beispiel, worauf wir auch in dem vorhergehenden Texte, wiederholt aufmerksam gemacht haben. Wir halten es daher nicht für überflüssig, hier die Begriffe der allgemeinen Mechanik, soweit dieselbe für die Festigkeitslehre nothwendig sind, klar darzulegen, und zwar um so mehr, als dieses Werk nach den Erfahrungen über den Absatz der ersten Auflage auch von vielen Praktikern benutzt worden ist, denen eine kurze Repetition dieser Sätze, erwünscht sein mag.

§ 2. Zunächst ist es nothwendig, sich über die Zusammensetzung der Körper eine bestimmte Meinung zu bilden. Zwei Ansichten stehen hier einander scharf gegenüber. Nach der Meinung der Einen bidet der Stoff der Körper eine continuirliche Masse und wenn auch Poren oder Zwischenräume vorhanden sind, so spielen dieselben doch keine andere Rolle, wie etwa die Zimmerräume zwischen dem Mauerwerk eines Hauses. Nach der Meinung der Andern dagegen bestehen die Körper aus sehr kleinen, vollständig von einander getrennten Theilen, welche Atome oder Massenpunkte genannt werden, und nur in ähnlicher Weise ein Ganzes bilden, wie die menschlichen Individuen eine Familie, eine Gemeinde, oder einen Staat bilden. Diese atomistische Zusammensetzung der Körper wird namentlich von den französischen Gelehrten allgemein angenommen, während in Deutschland mehrere unserer ausgezeichnetsten Physiker sich noch zu der ersteren Ansicht bekennen. Wird nun auch die Zusammensetzung der Körper aus einzelnen, vollständig getrennten Atomen zugegeben, so ist doch wieder eine Meinungsverschiedenheit darüber, ob diese Atome für alle Körper einander gleich sind oder nicht, ob namentlich die chemisch verschiedenen Körper, wie Stein, Holz, Eisen, auch aus Atomen verschiedener Art zusammengesetzt sind oder nicht. Die Chemiker sind meistens geneigt, die Verschiedenheit der Atome zu betonen, während die Philosophen sich für die Gleichheit der Atome aussprechen. Die chemische Verschiedenheit der Körper kann in der That auch dadurch erklärt werden, dass man unter sich gleiche Atome zunächst in regelmässigen Gruppen (oder Molecülen) vereinigt denkt, den Körper aber aus diesen Gruppen (oder Molecülen) gebildet. So bilden auch die Bürger nicht isolirt den Staat, sondern nur in ihrer Gruppierung zu Gemeinden. Die Art der Gruppierung der Atome in den Molecülen kann, wie wir sogleich sehen werden, ausserordentlich mannigfaltig sein und jedenfalls zeigen die Körper in ihrem chemischen und physikalischen Verhalten keine grössere Mannigfaltigkeit als die Art der Gruppierung, schon bei einer mässigen Anzahl von Atomen in jeder Gruppe zeigen kann. Eine Stütze erhält diese Ansicht von der Gleichheit aller Atome auch durch die

Erscheinung der chemischen Isomerie und Polymerie. Bei keiner anderen Annahme über die Zusammensetzung der Körper lassen sich wesentliche Begriffe der Mechanik (wie z. B. Masse, Schwerpunkt u. s. w.) so leicht und scharf erklären, wie bei dieser und wir wollen daher diese Hypothese von der Gleichheit der Atome als unsern Ausgangspunkt nehmen.

§ 3. Um zu erklären, wie es möglich ist, dass völlig von einander getrennte und unter sich gleiche Atome oder Massenpunkte überhaupt so weit zusammenhalten, dass dadurch ein Körper gebildet wird, nehmen wir an, dass je zwei Atome im Allgemeinen auf einander einwirken, und dass nur bei einer bestimmten, übrigens sehr kleinen Entfernung von einander diese gegenseitige Einwirkung nicht vorhanden ist. Diese letztere Entfernung nennen wir die neutrale Entfernung. Wir denken uns die Atome und ihre neutrale Entfernung von einander (Fig. 1 auf folgd. S.) so klein, dass sie sich der unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung entziehen, und die Figuren im Text müssen als viele Millionen Male grösser als die Wirklichkeit gedacht werden.

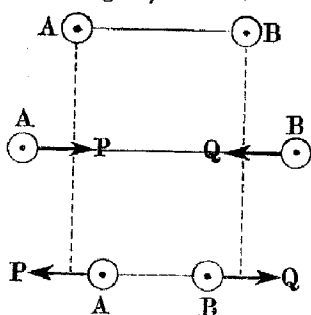
In der Figur sind die Massenpunkte durch Kreise bezeichnet, in der That scheint es am angemessensten sich die Massenpunkte als kleine Kugeln zu denken. Unter der Entfernung zwischen zwei Massenpunkten verstehen wir dann die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der bezüglichen Kugeln.

Ist nun wie in Fig. 2 auf folgd. S. die Entfernung zwischen zwei Atomen grösser als diejenige, welche wir die neutrale Entfernung nennen, so nehmen wir an, dass die beiden Atome sich gegenseitig anziehen, d. h. so gegenseitig aufeinander einwirken, dass sie sich einander nähern würden, wenn die Atome vorher in Ruhe gewesen wären und keine andere Einwirkung auf diese Atome stattfände. Ist dagegen, wie in Fig. 3 die Entfernung zwischen zwei Atomen kleiner als die neutrale Entfernung, so nehmen wir an, dass die beiden Atome sich gegenseitig abstossen, d. h. so gegenseitig auf einander einwirken, dass sie sich weiter von einander entfernen würden, wenn die Atome vorher in Ruhe gewesen wären und keine andere Einwirkung auf diese Atome stattfände. Die Atome



haben also nach dieser Hypothese das Bestreben, die neutrale Entfernung zwischen sich herzustellen, sobald dieselbe nicht vorhanden ist.

Fig. 1, 2 u. 3.



Die Anreizung  $P$ , welche in den Figuren 2 und 3 das Atom  $A$  von dem Atom  $B$  her erhält, sich entweder nach  $B$  hin oder von  $B$  weg zu begeben, nennen wir eine Kraft und sagen die Kraft  $P$  werde von dem Atom  $A$  erlitten und von dem Atom  $B$  ausgeübt. Auch nennen wir  $A$  den Angriffspunkt dieser Kraft und stellen sie in der Figur durch einen dicker gezo-

genen Linientheil mit Pfeilspitze dar, sodass der Pfeil die Richtung der Kraft anzeigt, d. h. die Richtung in welcher sich der Mittelpunkt des Atom  $A$  unter dem alleinigen Einflusse der Kraft  $P$  bewegen würde, wenn  $A$  vorher in Ruhe gewesen wäre. Wir nehmen nun an, dass eine solche Kraft  $P$  stets begleitet ist von einer zweiten Kraft  $Q$ , welche das Atom  $B$  erleidet und das Atom  $A$  ausübt, und dass die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  stets gleiche Stärke, aber entgegengesetzte Richtungen besitzen, welche durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln gehen. Als Maass der Stärke oder Intensität der Kraft  $P$  können wir vorläufig den Weg betrachten, welchen der Mittelpunkt des Atom  $A$  unter dem alleinigen Einfluss der Kraft  $P$  in einer Secunde zurück legen würde, wenn das Atom vorher in Ruhe gewesen wäre. Die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  zwischen den Atomen  $A$  und  $B$  nennen wir die Spannung zwischen denselben. In Fig. 2, wo die Atome sich anziehen, sind  $P$  und  $Q$  zwei gleich starke Zugkräfte und bilden eine Zugspannung. In Fig. 3, wo die Atome sich abstossen, sind  $P$  und  $Q$  zwei gleich starke Druckkräfte und bilden eine Druckspannung. Kraft ist also in dieser Betrachtung stets entweder Druck oder Zug, und nicht etwa nur die Fähigkeit unter Umständen einen solchen Druck oder Zug auszuüben, (wie in den

Worten: Pferdekraft, Betriebskraft, Thatkraft, Arbeitskraft u. s. w.), sondern der Druck oder Zug selbst.

Wenn nun auch die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$ , welche zu einer Spannung gehören, stets gleichzeitig vorhanden sind, so können wir doch die eine von ihnen z. B.  $P$  vor der andern betrachten, und geschieht dies, und ist  $P$  ein Druck, so nennen wir  $Q$  den Gegendruck, und ähnlich für Zugkräfte: Druck und Gegendruck sind also an Stärke gleich, ebenso Zug und Gegenzug. Unrichtig ist aber offenbar die häufig gebrauchte Redewendung: Jeder Druck ruft einen gleich grossen Gegendruck hervor, denn die Kraft  $P$  ruft nicht die Kraft  $Q$  hervor, sondern beide Kräfte  $P$  und  $Q$  entstehen gleichzeitig, sobald die beiden Atome die entsprechende Entfernung von einander besitzen. Diese Entfernung aber entsteht durch die Bewegung, welche eines der beiden Atome  $A$  und  $B$  besitzt, oder beide besitzen. Denken wir uns nun zwischen  $A$  und  $B$  die neutrale Entfernung vorhanden, dabei  $A$  in Ruhe, und  $B$  durch eine fremde Einwirkung in Bewegung versetzt nach  $A$  hin, so entsteht sehr leicht die Vorstellung, als ob der Druck  $P$ , den  $B$  gegen  $A$  ausübt, zuerst entstände und dadurch erst der Gegendruck  $Q$  des  $A$  gegen  $B$  hervorgerufen würde. Es beruht dieser Irrthum aber lediglich in einer Verwechslung der beiden Begriffe Kraft (also Druck oder Zug) und Energie oder Arbeitsfähigkeit, wofür leider auch häufig genug Arbeitskraft gesagt wird, und diese letztere ist in diesem Beispiel allerdings bei dem Atom  $B$  anfänglich allein vorhanden, was unten weiter erläutert werden soll.

Der obige Satz wird übrigens auch von allen denen zugegeben, welche einen stetigen Zusammenhang der Körpertheile annehmen. „Druck und Gegendruck (und ebenso Zug und Gegenzug) sind stets gleichzeitig vorhanden, unter sich gleich stark und entgegengesetzt gerichtet“.

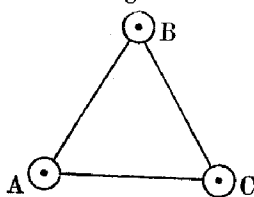
Zur Anwendung kommt der Satz z. B. bei dem Druck eines Trägers gegen seine Stütze, wo dieser nach unten gerichtete Druck begleitet ist von dem nach oben gerichteten gleich starken Drucke der Stütze gegen den Träger.

§ 4. Es ist jetzt leicht, das Verharren einer Anzahl Atome in einer Gesamtheit sich deutlich zu machen, wenn wir uns diese Gesamtheit allen fremden Einflüssen entzogen denken.

1) Zwei Atome  $A, B$  können nur in einer einzigen Lage beharren, nämlich so, dass ihre Entfernung die sogenannte neutrale Entfernung ist.

2) Drei Atome können in zwei Lagen beharren: entweder können, wie in Figur 4, die Mittelpunkte der

Fig. 4.



Atom  $B$  gegenseitig abstossen.

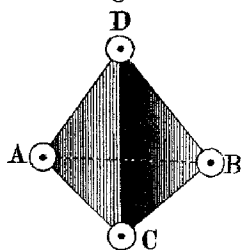
drei Atome  $A, B, C$  die Eckpunkte eines Dreiecks bilden, so dass jede Seite gleich der neutralen Entfernung ist, oder die Mittelpunkte der drei Atome können sich in gerader Linie befinden, so dass die beiden äussern Atome  $A$  und  $C$  gegenseitig anziehen, während beide sich mit dem mittleren

Fig. 5.



3) Vier Atome  $A, B, C, D$  können in den folgenden vier Fällen in ihrer Lage beharren:

Fig. 6.



1) Ohne Spannung, wenn die Mittelpunkte der Atome die Eckpunkte eines Tetraeders bilden, von welchem jede Seite gleich der neutralen Entfernung ist.

2) Wenn die Mittelpunkte in gerader Linie liegen, jedes Atom mit seinem nächsten Nachbar sich gegenseitig abstösst und mit jedem andern Atome sich gegenseitig anzieht.

Fig. 7.

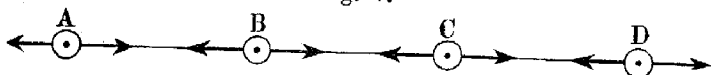
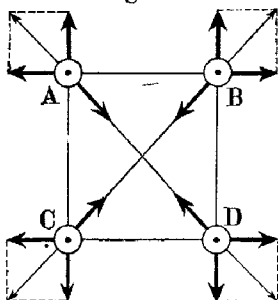


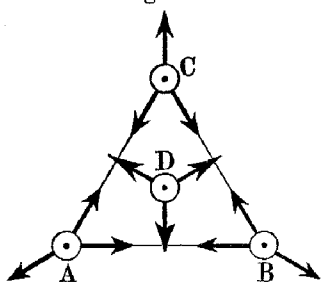
Fig. 8.



3) Wenn die Mittelpunkte die Eckpunkte eines Quadrates bilden, dessen Seite kleiner als die neutrale Entfernung ist, während die Diagonale grösser als diese Entfernung ist. Jedes Atom wird also von seinen Nachbarn in den Richtungen der Seiten abgestossen, in der Richtung einer Diagonale aber angezogen.

4) Wenn die Mittelpunkte der ersten drei Atome *A, B, C* die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden, dessen Seite grösser als die neutrale Entfernung ist, während der Mittelpunkt des vierten Atoms *D* sich im Mittelpunkt dieses Dreiecks befindet und sein Abstand von den Eckpunkten kleiner ist als die neutrale Entfernung. Das vierte Atom stösst sich also mit jedem der ersten drei Atome gegenseitig ab, während diese sich gegenseitig anziehen.

Fig. 9.



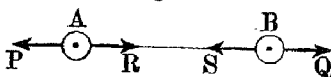
Man sieht jetzt leicht ein, wie die Anzahl der möglichen Lagen, in denen Atome verharren können, sobald sie vor fremder Einwirkung gesichert sind, mit der Zahl dieser Atome ausserordentlich rasch wachsen muss, und halten es daher für überflüssig, dies an weiteren Beispielen zu zeigen, doch mag noch hervorgehoben werden, dass

bei mehr als vier Atomen die spannungslose Lage aller Atome gegen einander unmöglich ist.

§ 5. Wir nehmen an, dass bei zwei Atomen, deren Abstand von einander grösser ist als die neutrale Entfernung, die zwischen ihnen vorhandene Zugspannung anfänglich desto mehr zunimmt, je grösser die Entfernung zwischen den Atomen wird, dass aber diese Zugspannung ein Maximum erreicht, und also bei fernerer Vergrösse-

rung der Entfernung zwischen den Atomen die Zug-  
 spannung wieder kleiner wird, und zwar nehmen wir  
 an, dass das erwähnte Maximum schon erreicht wird,  
 bevor die Entfernung der Atome von einander sinnlich  
 wahrnehmbar wird, und dass bei jeder wahrnehmbaren  
 Entfernung die Zugspannung bereits sehr klein ist.  
 Hieraus erklärt sich leicht, wie die Körper in der Rich-  
 tung ihrer Länge nur eine sehr geringe Dehnung er-  
 tragen, wenn dieselben nicht zerreißen sollen. Anderer-  
 seits nehmen wir an, dass die Druckspannung, welche  
 zwischen zwei Atomen besteht, deren Abstand von ein-  
 ander kleiner ist als die neutrale Entfernung, nicht nur  
 anfänglich, sondern immer desto grösser wird, je näher  
 die Atome zu einander geschoben werden, sodass also  
 ein Maximum für diese Druckspannung nicht besteht.  
 Die Zerstörung der Körper durch Druck können wir uns  
 daher nur durch eine gewisse Ungleichmässigkeit in der  
 Anwendung des Druckes erklären, wobei eine solche  
 Ungleichmässigkeit allerdings desto verhängnissvoller  
 für das Bestehen der Körper werden muss, je grösser  
 der Druck überhaupt ist. Gesetzt die beiden Atome  
 $A$  und  $B$  würden durch die zwei fremden gleichen und  
 sehr grossen Kräfte  $R$  und  $S$  gegen einander getrieben,

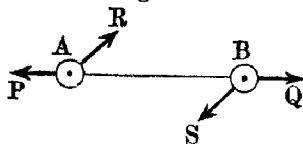
Fig. 10.



wie in Fig. 10, so würden  
 die entstehenden Span-  
 nungskräfte  $P$  und  $Q$  zwar  
 eben so gross sein können,  
 aber das Beharren in der

Lage wäre für die Atome  $A$  und  $B$  doch nur dann  
 möglich, wenn die Richtungen der Kräfte  $R$  und  $S$  auf  
 der geraden Linie durch die Mittelpunkte von  $A$  und  $B$   
 lägen, weil eben die Richtungen von  $P$  und  $Q$  sich nur  
 auf dieser Linie befinden. Wäre wie in Fig 11 bei der

Fig. 11.



einen der Richtungen von  $R$   
 und  $S$ , oder bei beiden die  
 geringste Abweichung von der  
 erwähnten geraden Linie, so  
 würden die Atome  $A, B$  desto  
 sicherer an einander vorbei-  
 getrieben, je stärker die  
 Kräfte  $R$  und  $S$  sind. So

erklärt es sich, dass unter Druck die Zerstörung eines

Körpers so leicht erfolgt, wenn durch Erschütterungen die Richtung des Druckes Veränderungen erfährt. Ferner erklärt sich hierdurch, wie bei regelmässig geschichteten, namentlich gegossenen Körpern, und vor Allem dem Gusseisen der Widerstand gegen Druck, wenn nur Erschütterungen fern gehalten werden, so auffallend gross ist ein Vergleich zum Widerstande gegen Zug. Endlich erklärt sich noch hieraus, wie die Resultate, welche von verschiedenen Experimentatoren für den Widerstand gegen Druck gefunden sind, so ausserordentlich von einander abweichen, ja sich oft schnurstracks widersprechen. Bei Angabe der Resultate neuerer Versuche werden wir hierauf zurückkommen.

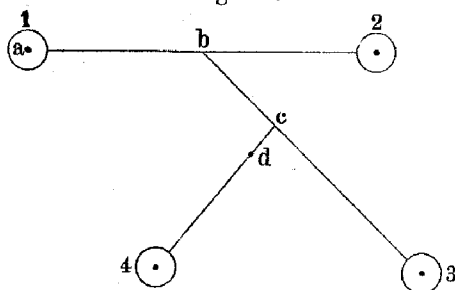
§ 6. Die Masse eines Körpers oder die Menge seines Stoffes ist die Stoffmenge der Gesamtheit der einzelnen unter sich gleichen Atome, aus welchem der Körper besteht; die Masse ist demnach bestimmt durch die Anzahl dieser Atome. Diese Zahl ist aber sehr gross, und es bedarf daher einer höheren Einheit, etwa wie 1000000000 eine Milliarde genannt wird. Als solche Einheit gilt das Kilogramm, d. h. die Stoffmenge der Gesamtheit derjenigen Atome oder Massenpunkte, welche in einem Liter oder Cubikdecimeter Platz finden, wenn dasselbe mit chemisch reinem Wasser von 4° Celsius unter dem mittleren Luftdrucke, also bei 760<sup>mm</sup> Barometerstand aufgefüllt wird. Ist die Zahl dieser Atome =  $N$ , so ist also die Masse eines Atomes =  $\frac{1}{N}$  Kilogramm. Das Kilogramm dient zunächst nur zum Messen der Massen, und nicht zum Messen der Kräfte. Um nun zu bestimmen, wie viel Kilogramm Masse ein beliebiger Körper enthält, bedienen wir uns im gewöhnlichen Leben der Waage, in der Voraussetzung, dass auf zwei gleiche Massen die Anziehungskraft der Erde gleich gross sein müsse.

§ 7. Unter dem Schwerpunkt eines Körpers verstehen wir einen geometrischen Punkt, dessen Lage gegen die einzelnen Atome durch folgende Constructionen bestimmt wird:

- 1) Als Schwerpunkt eines einzelnen, als Kugel gedachten Atoms gilt der Mittelpunkt dieser Kugel.

- 2) Als Schwerpunkt der Gesamtheit von zwei Atomen gilt die Mitte  $b$  zwischen beiden Atomen.

Fig. 12.



- 3) Als Schwerpunkt der Gesamtheit von drei Atomen gilt der Endpunkt  $c$  des ersten Drittels der Entfernung vom Schwerpunkt  $b$  der ersten zwei Kugeln nach dem Mittelpunkt der dritten Kugel.
- 4) Als Schwerpunkt der Gesamtheit von vier Atomen gilt der Endpunkt  $d$  des ersten Viertels der Entfernung vom Schwerpunkt  $c$  der ersten drei Kugeln nach dem Mittelpunkt der vierten Kugel; u. s. w.

Es ist nun leicht geometrisch zu beweisen:

- 1) Wenn nach der obigen Regel der Schwerpunkt für eine Gesamtheit von beliebig vielen Atomen bestimmt wird, so ist die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Atome zur Construction herangezogen werden, für das Endresultat gleichgültig.
- 2) Wenn die Gesamtheit aus zwei Abtheilungen besteht, so liegt der Schwerpunkt  $C$  der Gesamtheit in gerader Linie mit den Schwerpunkten  $A$  und  $B$  der beiden Abtheilungen und zwar zwischen ihnen, und in Abständen von ihnen, die sich umgekehrt verhalten, wie die Zahlen der Atome, welche sich in den Abtheilungen befinden, also auch umgekehrt wie die Massen dieser Abtheilungen.
- 3) Wenn eine Gesamtheit aus beliebig vielen Abtheilungen besteht und die Schwerpunkte aller

einzelnen Abtheilungen liegen in demselben geometrischen Punkte, oder in derselben geraden Linie, oder in derselben Ebene, so liegt auch der Schwerpunkt des Gesammt in dem nämlichen geometrischen Punkte, bezw. in derselben geraden Linie, oder in derselben Ebene.

- 4) Bezieht man die einzelnen Atome sowie den Schwerpunkt ihrer Gesamtheit auf ein beliebiges System schiefwinkliger oder rechtwinkliger Coordinaten, so ist für jede Axe einzeln die Coordinate des Schwerpunktes gleich dem arithmetischen Mittel der Coordinaten der einzelnen Atome.

- 5) Sind  $x_1, x_2$  etc. die Coordinaten der Schwerpunkte einzelner Abtheilungen, bestehend aus  $n_1, n_2$  etc. Atomen, oder mit  $m_1, m_2$  etc. Massen, und ist  $N = \sum n$  die Anzahl der Gesamtheit dieser Atome, und  $M = \sum m$  die Masse dieser Gesamtheit, so ist die Coordinate  $\xi$  des Schwerpunktes der Gesamtheit zu berechnen nach der Formel

$$\xi = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \text{etc.}}{n_1 + n_2 + \text{etc.}} = \frac{\sum n x}{N}$$

oder

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \text{etc.}}{m_1 + m_2 + \text{etc.}} = \frac{\sum m x}{M},$$

und ähnlich für die andern beiden Coordinaten

$$\eta = \frac{\sum n y}{N} = \frac{\sum m y}{M}$$

$$\xi = \frac{\sum n z}{N} = \frac{\sum m z}{M}.$$

- 6) Unter dem Schwerpunkt einer geometrischen Grösse, eines geraden oder krummen Linientheils, eines Flächentheils, oder eines Körperraumes verstehen wir den Schwerpunkt einer solchen Gesamtheit von Atomen, welche sich mit ihren Mittelpunkten über die betreffende Linien-, Flächen- oder Körper-Grösse gleichmässig vertheilt.

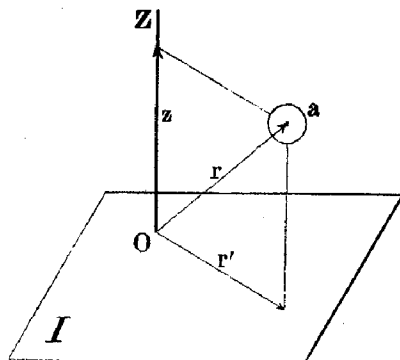
Die Sätze unter 2 und 3 gelten desshalb auch für solche Schwerpunkte geometrischer Grössen, ebenso der Satz unter 5, wenn man dabei unter  $m$  die Grösse der



einzelnen Abtheilungen, und unter  $M$  die Grösse der Gesamtheit versteht.

§ 8. Massenmomente. Das Moment eines einzelnen Atomes ist das Product aus der Masse  $m$  dieses Atomes (also  $\frac{1}{N}$  Kilogramm) und einem Linientheil oder dem Producte mehrerer Linientheile. Man unterscheidet desshalb Momente verschiedener Grade. Das Moment eines Körpers ist stets gleich der Summe der Momente seiner Atome, aber die Art der Summirung ist verschieden, und muss daher für jede Klasse von Momenten einzeln betrachtet werden. Das einfache Moment (oder lineare

Fig. 13.



Moment, Moment ersten Grades) eines Atomes  $a$  in Bezug auf einen geometrischen Punkt  $O$  (Fig. 13) ist das Product  $mr$  aus der Masse  $m = \frac{1}{N}$  Kilogramm dieses Atomes und dem Wege  $r$  von  $O$  bis  $a$ . Legt man durch den Punkt  $O$  eine beliebige Ebene  $I$ , und normal dazu

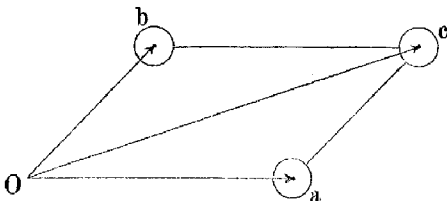
eine Axe  $Z$ , und sucht von  $r$  die Projectionen  $r'$  auf  $I$  und  $z$  auf  $Z$ , so ist  $mz$  das einfache Massenmoment von  $a$  in Bezug auf Ebene  $I$ , und  $mr'$  ist das entsprechende Moment von  $a$  in Bezug auf die Axe  $Z$ . Da nun nach dem vorhergehenden Paragraphen  $z$  als die Coordinate des Massenpunktes  $a$  angesehen werden kann, während  $\xi$  die Coordinate des Schwerpunktes eines Körpers bezeichnet und  $\xi = \frac{\sum mz}{M}$  also  $M\xi = \sum mz$  ist, so heisst dies:

Die algebraische Summe der Massenmomente der einzelnen Atome eines Körpers in Bezug auf eine beliebige feste Ebene  $I$  ist gleich dem Massenmomente, welches der ganze Körper in Bezug auf diese Ebene

haben würde, wenn seine gesammte Masse in seinem Schwerpunkte concentrirt wäre.

Auch für die Summe der Massenmomente der einzelnen Atome in Bezug auf einen Punkt, sowie in Bezug auf eine Axe gelten ähnliche Sätze, nur ist hier nicht die algebraische Summe, sondern die sogenannte geometrische Summe zu nehmen, d. h. als Summe der

Fig. 14.

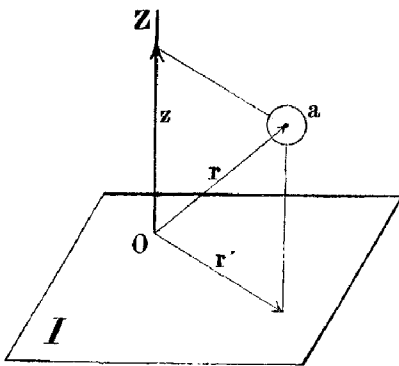


auf  $O$  bezogenen Momente der beiden Atome  $a$  und  $b$  in Fig. 14 gilt das Moment des Atomes  $c$ , wenn  $O, a, b, c$  die vier Eckpunkte

eines Parallelogrammes sind.

**Quadratische Momente.** Von den quadratischen Momenten betrachten wir zwei Arten: Die Trägheitsmomente und die Deviationsmomente. Das Trägheitsmoment eines Atomes  $a$  in Bezug auf einen Punkt  $O$  ist das Product  $mr^2$  aus der Masse  $m$  oder  $\frac{1}{N}$  Kgr. des Atoms und dem Quadrate des Weges  $r$

Fig. 15.



von  $O$  bis  $a$ . Projicirt man wieder  $r$  auf eine durch  $O$  gelegte Ebene  $I$  und eine dazu normale Axe  $Z$ , und multiplicirt mit der Masse die Quadrate dieser Projectionen  $r'$  und  $z$ , so heisst  $mr'^2$  das Trägheitsmoment von  $a$  in Bezug auf die Axe  $Z$ , und  $mz^2$  das Trägheitsmoment von

$a$  in Bezug auf die Ebene  $I$ . Das Trägheitsmoment ist stets ein positiver Werth, ohne Richtung. Das Trägheitsmoment eines Körpers ist desshalb gleich der gewöhnlichen arithmetischen Summe der Momente seiner Atome. Das einfache Massenmoment eines Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt, sowie in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Axe oder Ebene ist gleich Null, das Trägheitsmoment aber nicht. Hat nun dieses Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt den Werth  $T_0$ , und ist  $\rho$  der Weg vom beliebigen Punkte  $O$  nach diesem Schwerpunkte, so ist das Trägheitsmoment  $T$  des Körpers in Bezug auf  $O$

$$T = T_0 + M\rho^2.$$

Sind wieder  $\rho'$  und  $\zeta$  die Projectionen von  $\rho$  auf die Ebene  $I$  und die Axe  $Z$ , und bezeichnet  $T_0$  das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt entweder parallel  $I$  gelegte Ebene oder eine parallel  $Z$  gelegte Axe, so sind die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Ebene  $I$  oder die Axe  $Z$  enthalten in der Formel

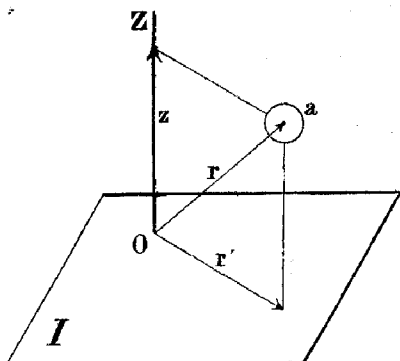
$$\begin{aligned} T &= T_0 + M\zeta^2 \\ \text{oder} \quad T &= T_0 + M\rho'^2. \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment ist also stets grösser, als man es dann erhalten würde, wenn die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkte concentrirt wäre. Zur Anwendung kommt von diesen Formeln vorzugsweise diejenige, welche sich auf zwei parallele Axen bezieht, von denen die eine durch den Schwerpunkt geht. Der Name Trägheitsmoment ist von gewissen Eigenschaften hergenommen, welche dieses Moment in Bezug auf eine Axe besitzt, wenn der Körper in eine Drehung um diese Axe versetzt werden soll, oder die Geschwindigkeit der schon vorhandenen Drehung vermehrt oder vermindert werden soll.

Das Deviationsmoment eines Atomes  $a$  bezieht sich auf die Gesammtheit einer Axe  $Z$  und einer dazu normalen Ebene  $I$  (Fig. 16 auf folgd. S.). Ist hier wieder  $O$  der Durchschnittspunkt von  $Z$  und  $I$ ,  $r$  der Weg von  $O$  nach  $a$  und sind  $z$  und  $r'$  die Projectionen von  $r$  auf  $Z$  und  $I$ , so ist, wenn  $m$  oder  $\frac{1}{N}$  Kgr. die Masse des Atoms  $a$  bezeichnet, das Product  $mzr'$  das Deviations-

Moment von  $a$  in Bezug auf die Gesamtheit der Axe  $Z$  und der Ebene  $I$ . Soll nun das Deviationsmoment eines Körpers als Summe der Momente seiner einzelnen Atome

Fig. 16.

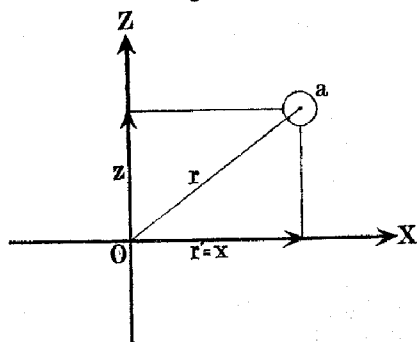


gefunden werden, so mögen zunächst die Mittelpunkte dieser Atome alle mit der Axe  $Z$  in einer gemeinschaftlich Ebene liegen und die Axe  $X$  sei die

Durchschnitts-  
linie dieser Ebene  
mit der Ebene  $I$ .  
Dann werden die  
Projectionen  $r'$   
sämmlich auf  
dieser Axe  $X$  lie-  
gen, und jedes  $r'$

ist identisch mit der Coordinate  $x$  des betreffenden Atoms. Das Deviationsmoment des einzelnen Atomes  $a$  ist dann  $mzx$  und das Deviationsmoment des ganzen

Fig. 17.



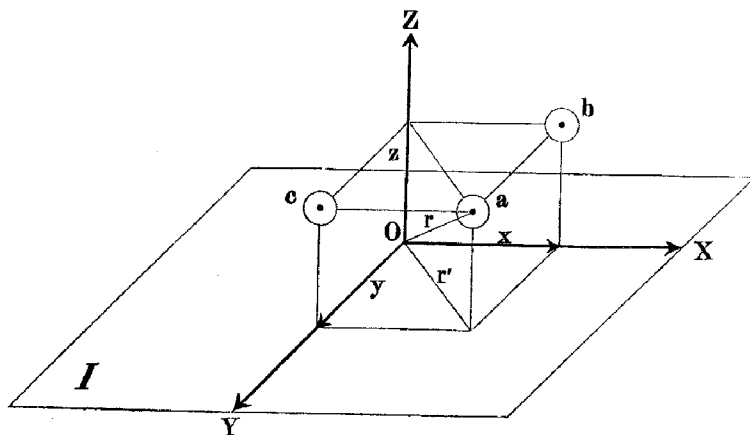
Körpers oder  $\Sigma mzx$  ist einfach die algebraische Summe der Werthe von  $mzx$ , wo  $z$  und  $x$  die Coordinaten des einzelnen Atomes und positiv oder negativ zu nehmen sind nach der gewöhn-

lichen Regel für Coordinaten in Bezug auf zwei Axen in einer Ebene. Das Deviationsmoment eines einzelnen Atoms ist also dann positiv, wenn  $x$  und  $z$  entweder beide positiv, wie im ersten Quadranten, oder beide

negativ, wie im dritten Quadranten sind. Dagegen ist das Deviationsmoment eines Atomes negativ, wenn  $x$  und  $z$  ungleiche Vorzeichen haben, also für Atome im zweiten und vierten Quadranten.

Liegen dagegen die Mittelpunkte sämtlicher Atome eines Körpers nicht mit der Axe  $Z$  in einer gemeinschaftlichen Ebene, so nehme man in der Ebene  $I$  durch den Punkt  $O$  zwei auf einander rechtwinklige Axen  $X$  und  $Y$ , welche mit der Axe  $Z$  zusammen ein dreiaxiges Coordinatensystem bilden, und  $x, y, z$  seien die drei Coordinaten eines Atomes in Bezug auf diese drei Axen, wobei die Vorzeichen nach der gewöhnlichen Weise bestimmt worden. Nun denke man sich in den Ebenen  $XZ$  und  $YZ$  zwei Atome  $b$  und  $c$  hinzu, welche als die

Fig. 18.



Projectionen eines Atomes  $a$  erscheinen, so dass  $b$  die Coordinaten  $x$  und  $z$  innerhalb der Ebene  $XZ$ , und  $c$  die Coordinaten  $y$  und  $z$  innerhalb der Ebene  $YZ$  besitzt. Das Deviationsmoment  $mzr'$  des wirklich vorhandenen Atomes gilt dann gleich der geometrischen Summe der Deviationsmomente  $mzx$  und  $mzy$  der beiden nur gedachten Hilfsatome  $b$  und  $c$ . Ist auf diese Weise das Moment jedes Atoms durch zwei Momente  $mzx$

und  $mzy$  in den Coordinatenebenen  $XZ$  und  $YZ$  ersetzt, so summirt man innerhalb jeder dieser Ebenen algebraisch, und die beiden Summen  $\Sigma mzx$  und  $\Sigma mzy$ , welche als diesen Ebenen angehörige Werthe gelten, werden wieder geometrisch summirt, d. h. durch eine Parallelogrammconstruction zusammengesetzt. Der erhaltene Endwerth ist also  $\sqrt{(\Sigma mzx)^2 + (\Sigma mzy)^2}$  und dieser Werth ist als einer Ebene angehörig zu denken, welche die Axe  $Z$  enthält, und von der Ebene  $XZ$  um einen Winkel  $\varphi$  abweicht, wofür

$$\tan \varphi = \frac{\Sigma mzy}{\Sigma mzx}$$

$$\sin \varphi = \frac{\Sigma mzy}{\sqrt{(\Sigma mzx)^2 + (\Sigma mzy)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\Sigma mzx}{\sqrt{(\Sigma mzx)^2 + (\Sigma mzy)^2}}$$

Das Deviationsmoment hat seinen Namen von der Deviation oder Abweichung, welche bei der Drehung eines Körpers um die Axe  $Z$  die Centrifugalkraft hinsichtlich der Drehaxe hervorzubringen strebt.

Die drei Deviationsmomente in Bezug auf die drei Axen  $X, Y, Z$  und die zu ihnen rechtwinkligen Ebenen  $YZ, XZ, XY$  haben also die Werthe

$$\sqrt{(\Sigma mxy)^2 + (\Sigma mxz)^2}$$

$$\sqrt{(\Sigma myz)^2 + (\Sigma myx)^2}$$

$$\sqrt{(\Sigma mzx)^2 + (\Sigma mzy)^2},$$

und es ist klar, dass eines von diesen drei Momenten nur dann = 0 werden kann, wenn von den drei Summen

$$\Sigma mxy, \Sigma myz, \Sigma mzx$$

wenigstens zwei einzeln = 0 sind. Ist aber jede einzelne von diesen drei Summen = 0, hat man also

$$\Sigma mxy = 0$$

$$\Sigma myz = 0$$

$$\Sigma mzx = 0,$$

so ist auch jedes von den drei Deviationsmomenten = 0. Nun ist es einer der wichtigsten Sätze der Mechanik, dass es für jeden willkürlich angenommenen Punkt, innerhalb oder ausserhalb der Masse eines Körpers, stets wenigstens ein System von drei auf einander rechtwinkligen Axen  $X, Y, Z$  giebt, wofür in der That

$$\sum mxy = 0$$

$$\sum myz = 0$$

$$\sum mzx = 0$$

und damit auch jedes der drei Deviationsmomente gleich Null ist. Solche drei Axen heissen die zu dem angenommenen Punkte gehörigen Hauptaxen des Körpers. Ist der gewählte Punkt der Schwerpunkt des Körpers, so werden die dazu gehörigen Hauptaxen freie Axen des Körpers genannt. Nimmt man solche freie Axen als Coordinatenaxen, so gelten gleichzeitig die sechs Gleichungen  $\sum mx = 0$ ,  $\sum my = 0$ ,  $\sum mz = 0$ ,

$$\sum mxy = 0, \sum myz = 0, \sum mzx = 0.$$

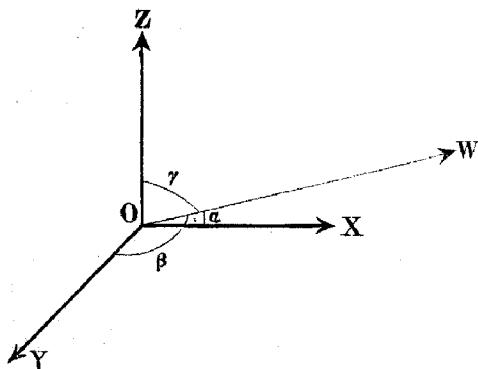
Gehen drei zu einander rechtwinklige Axen durch den Schwerpunkt ohne zugleich Hauptaxen zu sein, so gelten nur die ersten drei von diesen sechs Gleichungen; sind drei zu einander rechtwinklige Axen Hauptaxen, ohne zugleich durch den Schwerpunkt zu gehen, so gelten nur die letzten drei von den obigen sechs Gleichungen.

Sind  $A$ ,  $B$ ,  $C$  die drei Trägheitsmomente eines Körpers in Bezug auf die drei zu einem Punkte  $O$  gehörigen Hauptaxen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige durch denselben Punkt gehende Axe  $W$

$$= A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$

wenn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Richtungswinkel dieser Axe  $W$  gegen

Fig. 19.



die drei Hauptaxen sind. (Fig. 19.) Sind die drei Momente  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ungleich, und ist  $A$  das grösste,  $B$  das mittlere,  $C$  das kleinste von ihnen, so gehört zu einigen Axen  $W$  ein grösseres,

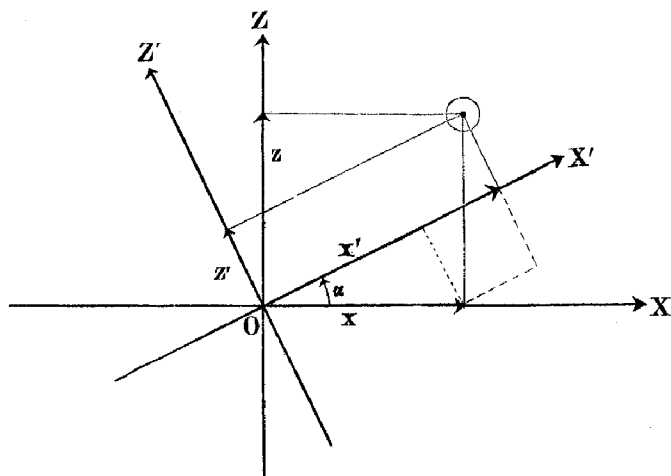
zu anderen ein kleineres Moment als  $B$ . Zu keiner Axe  $W$  gehört aber ein Moment, welches grösser als  $A$ , oder kleiner als  $C$  wäre.

Betrachten wir wieder in Fig. 20 den Fall, in welchem sämtliche Atome mit ihren Mittelpunkten in der Ebene der Axen  $X$  und  $Z$  liegen, wo also  $y$  beständig  $= 0$  ist, so sind sofort

$$\Sigma myx = 0; \Sigma myz = 0.$$

Dagegen wird  $\Sigma mxz$  nicht  $= 0$  sein, wenn die Lage der Axen  $X$  und  $Z$  beliebig, wenn auch zu einander rechtwinklig genommen wird. Es seien nun  $X'$  und  $Z'$

Fig. 20.



zwei andere zu einander rechtwinklige Axen durch denselben Punkt  $O$ , und  $x'$ ,  $z'$  seien die Koordinaten eines Atoms  $a$  in Bezug auf diese Axen, ferner sei der Winkel  $\angle X\hat{X}' = \alpha$ , dann ist

$$x' = x \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$z' = z \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$z'x' = zx (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (x^2 - z^2) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$z'x' = zx \cdot \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (x^2 - z^2) \sin 2\alpha$$

$$\Sigma mz'x' = \cos 2\alpha \cdot \Sigma mzx - \frac{1}{2} (\Sigma mx^2 - \Sigma mz^2) \sin 2\alpha$$

Ist nun  $\Sigma mzx$  nicht  $= 0$ , so lässt sich aus der vorher-



gehenden Gleichung leicht ein solcher Werth von  $\alpha$  bestimmen, dass für die neuen Axen  $\Sigma m z' x' = 0$  wird, denn aus der Bedingung:

$$\cos 2\alpha \Sigma mzx - \frac{1}{2} (\Sigma mx^2 - \Sigma mz^2) \sin 2\alpha = 0$$

folgt

$$\tan 2\alpha = \frac{2\Sigma mzx}{\Sigma mx^2 - \Sigma mz^2}$$

Da die trigonometrische Tangente alle positiven und alle negativen Werthe von Null bis Unendlich annehmen kann, so lässt sich stets der Winkel  $\alpha$ , so bestimmen, dass  $\tan 2\alpha$  den obigen Werth erhält, und es ist daher wenigstens eine Lage für das System der Axen  $X'$  und  $Z'$  so möglich, dass das Deviationsmoment  $\Sigma m z' x' = 0$  wird. Gesetzt nun das ursprüngliche System mit den Axen  $X$  und  $Z$  hätte diese besondere Lage gehabt, so dass also  $\Sigma mzx = 0$  wäre, dann hätte man

$$\Sigma m z' x' = -\frac{1}{2} (\Sigma mx^2 - \Sigma mz^2) \sin 2\alpha,$$

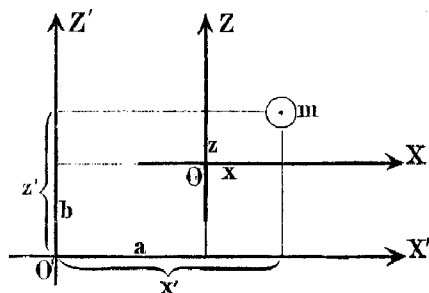
und wären nun die beiden Trägheitsmomente  $\Sigma mx^2$  und  $\Sigma mz^2$  gleich gross, so wäre für jeden Winkel  $\alpha$  auch  $\Sigma m z' x' = 0$ . Wären aber die beiden Momente  $\Sigma mx^2$  und  $\Sigma mz^2$  ungleich gross, so könnte nur dann  $\Sigma m z' x' = 0$  werden, wenn  $\sin 2\alpha = 0$ , also  $2\alpha = 0$  oder  $= 180^\circ$ , oder  $= 360^\circ$ , oder  $= 540^\circ$ , oder  $= 720^\circ$  u. s. w., wäre, woraus  $\alpha = 0$  oder  $= 90^\circ$ , oder  $= 180^\circ$ , oder  $= 270^\circ$ , oder  $360^\circ$  folgen würde, und also die beiden Systeme der Axen  $X' Z'$  und  $X, Z$  aus denselben geraden Linien bestehen würden. Sieht man desshalb alle solche Coordinatensysteme, welche auf denselben geraden Linien ruhen und sich nur durch die Richtung und die Namen der Axen unterscheiden, wie ein einziges System an, so hat man den folgenden Satz:

Für Massenpunkte innerhalb einer gemeinschaftlichen Ebene und in Bezug auf einen beliebigen Punkt  $O$  in dieser Ebene ist entweder jedes System von zwei auf einander rechtwinkligen Axen ein Paar Hauptaxen, so dass  $\Sigma mzx = 0$ , oder es giebt durch diesen Punkt  $O$  nur ein einziges System solcher Axen. Für zwei Axen  $X$  und  $Z$  ist also im Allgemeinen  $\Sigma mzx$  nicht  $= 0$ .

Es seien jetzt  $X' Z'$  zwei Axen, welche bezw. parallel mit den Axen  $X, Z$  liegen, in gemeinsamer Ebene, und  $a, b$  seien die Coordinaten von  $O$  in Bezug auf

die Axen  $X'Z'$ , dann ist für ein Atom in der gemeinsamen Ebene

Fig. 21.



$$x' = a + x; z' = b + z$$

$$z'x' = (b + z)(a + x) = ba + az + bx + zx,$$

also für mehrere Atome

$$\Sigma m z' x' = \Sigma m (ba + az + bx + zx) = ba \Sigma m + a \Sigma m z + b \Sigma m x + \Sigma m z x.$$

Wäre nun  $O$  der Schwerpunkt des betreffenden Körpers, so wäre  $\Sigma m z = 0$  und  $\Sigma m x = 0$ , und desshalb

$$\Sigma m z' x' = ba \Sigma m + \Sigma m z x.$$

Wären die Axen  $X, Z$  Hauptachsen des Schwerpunktes, so wäre  $\Sigma m z x = 0$  und daher

$$\Sigma m z' x' = ba \Sigma m,$$

oder, wenn die ganze Masse des Körpers mit  $M$  bezeichnet wird,

$$\Sigma m z' x' = Mba,$$

d. h. das Deviationsmoment eines Körpers, dessen Atome mit ihren Mittelpunkten in einer Ebene liegen, kann also in Bezug auf zwei Axen  $X'Z'$  in dieser Ebene denselben Werth haben, als ob die ganze Masse im Schwerpunkt des Körpers concentrirt wäre, im Allgemeinen findet dieser Bezug jedoch nicht statt, sondern nur für zwei solche Axen, welche mit den freien Axen des Körpers parallel liegen, oder bezw. zusammenfallen.

§ 9. Beziehungen zwischen der Masse eines Körpers und geometrischen Grössen. Dichtigkeit. Die Atome eines Körpers kann man sich mit ihren

Mittelpunkten über einen Linientheil einer Geraden, oder einen Flächentheil einer Ebene, oder einen geometrischen Körperraum gleichförmig vertheilt denken. Die Zahl der Atome, welche so zu einer Einheit der Länge oder der Fläche, oder des Raumes gehören würde, ist dann das Maass für die Dichtigkeit der Atome. Als Dichtigkeit rechnet man desshalb den Quotienten  $\rho$ , welchen man erhält, wenn man die Gesamtmasse  $M$  der Atome durch die betreffende Längen-, Flächen- oder Körperraumgrösse  $V$  dividirt. Die Vertheilung der Atome kann aber auch ungleichförmig sein, und der erwähnte Quotient  $\rho = \frac{M}{V}$  giebt dann nur die mittlere Dichtigkeit der Atome. Wäre nun die Masse stetig an einander hängend, anstatt getrennt aus Atomen zusammengesetzt zu sein, so würde der Quotient  $\frac{M}{V}$  für eine kleine Längen, Flächen- oder Körperraumgrösse in der Nähe eines bestimmten Raumpunktes  $a$  sich einer festen Grenze desto mehr nähern, je kleiner die betreffende geometrische Grösse wäre. Diese Grenze würde man dann die Dichtigkeit in dem erwähnten Punkte nennen. Weil wir aber den stetigen Zusammenhang der Materie nicht zugeben können, so ist allerdings hier eine besondere Schwierigkeit, die bei den quadratischen Momenten am meisten hervortritt.

§ 10. Momente der geometrischen Grössen. Bei den einfachen Momenten einer Körpermasse war es einerlei, ob man das betreffende Moment für jedes einzelne Atom bestimmte und diese Werthe summirte, oder ob man statt dessen die ganze Masse  $M$  des Körpers in seinem Schwerpunkte concentrirt dachte. Gesetzt nun diese Masse  $M$  sei über die Länge einer Linie, die Grösse einer Fläche oder eines Körperraumes  $V$  gleichförmig vertheilt, so nennen wir nach § 6 den Schwerpunkt des Körpers auch zugleich den Schwerpunkt der betreffenden Raumgrösse  $V$ . Ist nun  $\rho$  die Dichtigkeit des Körpers, also  $\rho = \frac{M}{V}$  und  $M = \rho V$ ; ist ferner  $r$  die Länge, mit welcher man die Masse  $M$  multipliciren muss, um das Moment in Bezug auf einen Punkt, eine Axe oder eine Ebene zu bilden, so ist also das Moment  $= Mr = \rho (Vr)$  Man erhält also das Moment des

Körpers, wenn man das Product  $Vr$  mit der Dichtigkeit  $\rho$  des Körpers multiplicirt. Dieses Product  $Vr$  nennen wir das Moment der geometrischen Linien-, Flächen- oder Körperraumgrösse, über welche wir uns die Masse des Körpers gleichförmig vertheilt denken.

Das einfache Moment eines Linientheils, Flächentheils oder Körperraumes  $V$  in Bezug auf einen Punkt  $O$  ist also das Product aus der Grösse  $V$  dieses Theiles und dem Wege  $r$  von  $O$  nach dem Schwerpunkte von  $V$ . Das Moment in Bezug auf eine Axe  $Z$  oder eine Ebene  $I$ , ist das Product  $Vr'$  oder  $Vz$  aus der Grösse  $V$  und der Projection  $r'$  oder  $z$  des Weges  $r$ .

Hieraus folgt sofort, dass jede geometrische Grösse  $V$  in beliebige Theile  $t$  zerlegt werden kann, und dass für jede der drei Klassen von einfachen Momenten das Moment der Gesamtgrösse gleich der Summe der Momente ihrer Theile ist, und hieraus folgt wieder, dass zur Berechnung der Coordinaten des Schwerpunktes einer geometrischen Grösse dieselben Formeln gelten, wie für den Schwerpunkt einer Körpermasse, d. h. bezeichnen  $t_1 t_2$  etc. die Grössen der einzelnen Theile,  $x_1 y_1 z_1$ ,  $x_2 y_2 z_2$  etc., die Coordinaten ihrer speciellen Schwerpunkte,  $\xi \eta \zeta$  aber die Coordinaten des Schwerpunktes der Gesamtgrösse, so ist

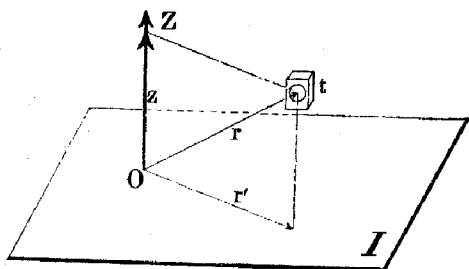
$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\sum tx}{\sum t} = \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots} \\ \eta &= \frac{\sum ty}{\sum t} = \frac{t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots} \\ \zeta &= \frac{\sum tz}{\sum t} = \frac{t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots}\end{aligned}$$

Bei den quadratischen Momenten hat das Moment einer Körpermasse nicht denselben Werth als ob die ganze Masse des Körpers in diesem Punkte concentrirt wäre. Wenn daher auch die Masse eines Körpers über eine Linie, Fläche oder ein Volumen gleichförmig vertheilt ist, so bleibt doch nothwendig, diese geometrische Grösse in solche Theile  $t$  zu theilen, dass zu jedem Theile nur ein Atom gehört.

Ist  $t$  die Grösse eines solchen Theiles,  $m$  die Masse des einzelnen dazu gehörigen Atomes  $a$ ,  $\rho$  die Dichtigkeit, so ist  $\rho = \frac{m}{t}$ , also  $m = \rho t$ . Um nun z. B. das Träg-

heitsmoment für die Masse eines Körpers in Bezug auf die Axe  $Z$  zu bestimmen, müsste  $r'$  die Projection des

Fig. 22.



Weges  $r$  von  $O$  bis zum Mittelpunkte des Atomes sein, und das Moment der Körpermasse wäre dann  $\Sigma mr'^2 = \Sigma \rho tr'^2 = \rho \Sigma tr'^2$ .

Sollte nun der Satz gelten, dass bei einer gleichförmig

vertheilten Masse das Trägheitsmoment gleich wäre dem Producte aus der Dichtigkeit der Vertheilung und dem Trägheitsmomente der Linien-, Flächen- oder Körperraumgrösse, über welche diese Masse vertheilt wäre, so müsste man  $\Sigma tr'^2$  als das Trägheitsmoment der betreffenden geometrischen Grösse ansehen. Nun ist es aber nicht wohl möglich, die Grösse  $t$  eines Theiles, zu welchem gerade ein Atom gehört, genau zu bestimmen, und man nimmt daher als Trägheitsmoment einer geometrischen Grösse den Werth, welchen  $\Sigma tr'^2$  annimmt, wenn darin  $t$  unendlich klein oder ein Differential wird. Das Trägheitsmoment einer geometrischen Grösse erscheint dann als ein Integral unendlich kleiner Summanden. Damit ist aber doch für  $t$  ein anderer Werth genommen, als für die Richtigkeit der Gleichung

$$\Sigma mr'^2 = \rho \Sigma tr'^2$$

genommen werden sollte. Bezeichnen wir nun mit  $T$  das richtige Trägheitsmoment der Masse, und mit  $\mathcal{I}$  das unter der unrichtigen Voraussetzung unendlich kleiner Theile  $t$  durch Integration bestimmte Trägheitsmoment der geometrischen Grösse, über welche die Masse mit der Dichtigkeit  $\rho$  gleichförmig vertheilt ist, so ist also die Gleichung

$$T = \rho \mathcal{I}$$

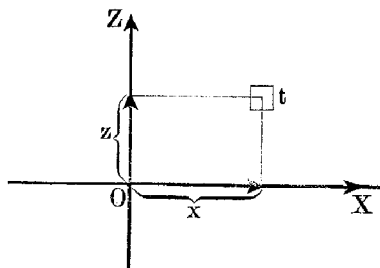
nicht genau richtig; aber  $\rho \bar{x}$  weicht doch so wenig von dem richtigen Werthe des  $T$  ab, dass  $\rho \bar{x}$  bei allen praktischen Aufgaben für  $T$  gesetzt werden kann. Nur zur Begriffserklärung der Trägheitsmomente darf nicht ohne Weiteres  $T = \rho \bar{x}$  gesetzt werden. Auf diesen Punkt hat schon Poisson aufmerksam gemacht.

Dieselben Betrachtungen gelten für die Deviationsmomente, bei denen  $\sum mzx = \sum \rho tzx = \rho \sum tzx$  und hierin  $t$  nicht unendlich klein, und deshalb  $\sum tzx$  dem Begriffe nach kein Integral unendlich kleiner Summanden ist, ohne dass jedoch dieser Unterschied beim practischen Berechnen von Einfluss wäre.

In der Festigkeitslehre kommen von den Momenten geometrischer Grössen folgende zur Anwendung:

1) Das einfache Moment  $\sum t_z$  eines Querschnittes in Bezug auf jede einzelne von zwei Coordinatenaxen  $X$  und  $Z$  innerhalb seiner Ebene. Da hier für den Schwerpunkt der Fläche die Coordinate

Fig. 23.



die Axe  $X$  den Schwerpunkt enthält  $\zeta = 0$ , und deshalb auch  $\sum t_z = 0$ .

2) Das Deviationsmoment  $\sum t_{zx}$  eines Querschnittes in Bezug

auf die Gesammtheit von zwei Coordinatenaxen  $X$  und  $Z$  innerhalb seiner Ebene. Von Wichtigkeit ist hier, dass  $\sum t_{zx} = 0$  sein kann, aber im Allgemeinen nur für ein System des Ursprungs  $O$  wirklich  $= 0$  ist.

3) Das Trägheitsmoment  $\sum t_z^2$  eines Querschnittes in Bezug auf eine Axe  $X$  innerhalb seiner Ebene.

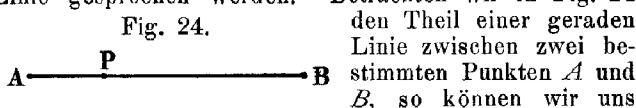
4) Das Trägheitsmoment  $\sum t_r^2$  eines Querschnittes in Bezug auf eine Axe normal zu seiner eignen Ebene; das letztere Moment wird von Poncelet das polare Trägheitsmoment genannt, wenn die Axe zugleich durch den Schwerpunkt der Fläche geht.

Da  $r^2 = z^2 + x^2$ , also  $\sum t_r^2 = \sum t(z^2 + x^2) = \sum t_z^2 + \sum t_x^2$ , so ist das polare Trägheitsmoment stets gleich der Summe

der beiden Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander normale Axen  $X$  und  $Z$ , welche in der Ebene der Figur liegen, und sich mit der polaren Axe in demselben Punkte schneiden.

§ 11. Geometrische Addition. Schon bei der Zusammensetzung der einfachen Momente der Atome in Bezug auf einen Punkt ist die sogenannte geometrische Addition mittelst der Parallelogrammconstruction erwähnt worden. Derselbe Begriff erscheint aufs Neue bei der Addition der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Kräftepaare u. s. w. Wir wollen daher diese geometrische Addition genauer betrachten und zwar auf Grund der Ausdehnungslehre von Grassmann, welcher zuerst die bezüglichen Begriffe in der nothwendigen Schärfe formulirt hat.

Das Wort gerade Linie  $\overline{AB}$ , bezeichnet die unbegrenzte gerade Linie, welche die Punkte  $A$  und  $B$  enthält. Die sämmtlichen Punkte einer solchen geraden Linie müssen dabei als gleichzeitig aufgefasst gedacht werden und es kann deshalb nicht von der Richtung, sondern nur von der Lage einer geraden Linie gesprochen werden. Betrachten wir in Fig. 24



denselben als Weg eines mobilen Punktes  $P$  denken, und je nachdem dieser Punkt  $P$  sich entweder von  $A$  nach  $B$ , oder von  $B$  nach  $A$  bewegt, bezeichnen wir den Weg entweder mit  $\overline{AB}$  oder mit  $\overline{BA}$ . Auf jeder geraden Linie giebt es also Wege von zwei verschiedenen Richtungen; die gerade Linie selbst aber hat keine Richtung. In ähnlicher Weise hat z. B. die Eisenbahn zwischen Hannover und Frankfurt a. M. weder eine Nordrichtung, noch eine Südrichtung, die auf der Bahn verkehrenden Züge dagegen fahren entweder nach Norden oder nach Süden.

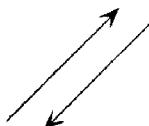
Bei jedem geradlinigen Wege  $\overline{AB}$  sind aufzufassen: Anfangspunkt  $A$ , Endpunkt  $B$ , Richtung und Länge. Die Richtung eines Weges markiren wir in der Figur durch eine Pfeilspitze. Zwei Wege auf

parallelen geraden Linien nennen wir *direct parallel*, wenn ihre Pfeilspitzen nach derselben Seite weisen, wie in Fig. 25, andernfalls aber entgegengesetzt parallel, wie in Fig. 26.

Fig. 25.



Fig. 26.

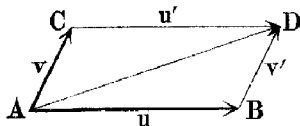


Wenn zwei Wege  $u$  und  $v$  den nämlichen Anfangspunkt haben, so sagen wir von einem dritten Wege  $w$ , derselbe sei gleich der Summe von  $u$  und  $v$ , also

$$w = u + v,$$

wenn  $w$  von dem gemeinsamen Anfangspunkt des  $u$  und  $v$  nach dem Endpunkte eines Weges  $v'$  führt, welcher mit dem Endpunkte von  $u$  beginnt und mit  $v$  *direct parallel* und gleich lang ist. So haben z. B. in Figur 27 die Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  denselben Anfangspunkt  $A$ , und der Weg  $\overline{AD}$  heisst gleich der Summe

Fig. 27.



der Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$ , wenn der Weg  $\overline{BD}$  *direct parallel* und gleich lang mit  $\overline{AC}$  ist. Wir können also schreiben  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ , aber keinesweges

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}.$$

Unter der Summe der beiden Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  verstehen wir nicht den Weg  $\overline{AD}$ , sondern die Gesamtheit der beiden Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  selbst, und die Ausdrucksweise  $\overline{AD}$  ist gleich der Summe der beiden Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$ , soll daher nur bedeuten, dass in gewissen Fällen der Weg  $\overline{AD}$  die Gesamtheit der beiden Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  ersetzen kann. Da aber in jedem Dreieck die Summe der Längen zweier Seiten grösser ist als die Länge der dritten Seite, so



ist selbstverständlich, dass zu den erwähnten Fällen die Längenberechnung nicht gehört. In ähnlicher Weise verstehen wir in der Statik unter der Summe zweier Kräfte  $P$  und  $Q$  die Gesamtheit dieser beiden Kräfte selbst, und wenn eine einzige Kraft  $R$  die Gesamtheit dieser beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  ersetzen kann, so sagen wir die Kraft  $R$  sei gleich der Summe der Kräfte  $P$  und  $Q$ , und schreiben  $R = P + Q$ , ohne dass die Gleichung für die Berechnung der Intensitäten angewandt werden darf.

So wie nun zwei parallel gerichtete Kräfte  $Q$  und  $Q'$  in Fig. 28 sich durchaus nicht gegenseitig vertreten können, so sind auch in Figur 27 die beiden Wege  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  durchaus nicht einander gleich, trotz ihrer gleichen Länge, und so wie in Fig. 28 von der Mittel-

Fig. 27.

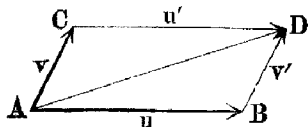
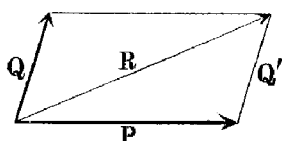


Fig. 28.

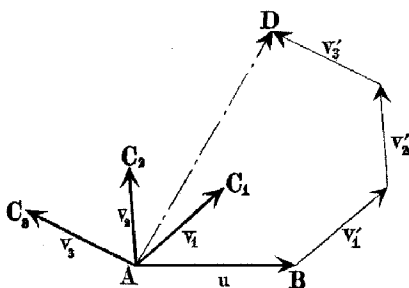


kraft  $R$  aus  $P$  und  $Q$  nicht behauptet werden darf, es sei  $R$  auch die Mittelkraft aus  $P$  und  $Q'$ , so darf man, wenn in Fig. 27  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$  ist, auch nicht behaupten, es sei

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}.$$

Zwei Wege nennen wir aneinanderschliessend, wenn der Endpunkt des ersten zugleich der Anfangspunkt des zweiten ist.

Fig. 29.



Wenn nun, wie in Figur 29 die Wege  $u, v_1, v_2, v_3$ , u. s. w. oder  $\overline{AB}, \overline{AC_1}, \overline{AC_2}, \overline{AC_3}$  denselben Anfangspunkt  $A$  haben, so sagen wir der Weg  $w$  oder  $\overline{AD}$  sei gleich der Summe der obigen Wege, und schreiben

$$w = u + v_1 + v_2 + v_3 + \text{etc.}$$

$$\text{oder } \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC_1} + \overline{AC_2} + \overline{AC_3} + \text{etc.},$$

wenn  $w$  oder  $\overline{AD}$  von dem gemeinsamen Anfangspunkte  $A$  nach dem Endpunkte  $D$  des Polygonzuges führt, dessen Theile solche aneinander schliessende Wege sind, dass der erste Theil der erste Weg  $u$  selbst ist, die übrigen Theile  $v'_1, v'_2$  etc. aber direct parallel und gleich lang mit den übrigen Wegen  $v_1, v_2$  u. s. w. sind.

Wir nennen hier  $u, v_1, v_2, v_3$  u. s. w. die Summanden, und zwar  $u$  den Anfangssummanden, die übrigen aber die Addenden.

Die Construction des Werthes  $w$  nach dieser Regel nennen wir die geometrische Summation der sämtlichen Summanden, und die geometrische Addition der Addenden  $v_1, v_2, v_3$  etc. zu dem Anfangssummanden  $u$ . Aus den bekannten Eigenschaften des Parallelogrammes ist leicht zu beweisen, dass die Hauptgesetze der algebraischen Addition auch für die geometrische Addition richtig sind, nämlich

1) Das Commutativgesetz

$$u + v = v + u$$

über die Vertauschbarkeit von Anfangssummand und Addend, d. h. in Fig. 30, die aneinander schliessenden Wege  $u$  und  $v'$  führen zu demselben Endpunkt  $D$  wie  $v$  und  $u'$ .

Fig. 30.

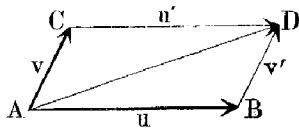
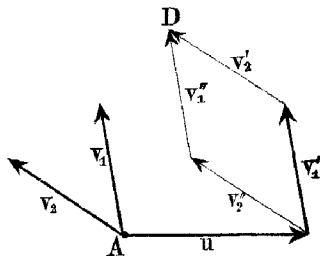


Fig. 31.



2) Das Permutativgesetz

$$(u + v_1) + v_2 = (u + v_2) + v_1$$

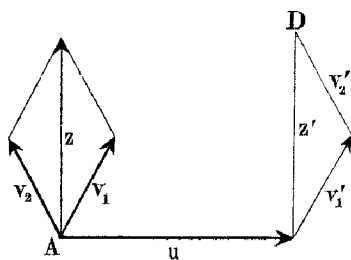
über die Vertauschbarkeit von zwei unmittelbar auf einander folgenden Addenden, d. h. in Fig. 31, die aneinander schliessenden Wege  $u, v'_1$ , und  $v'_2$  führen zu demselben Endpunkt  $D$ , wie die Wege  $u, v'_2$  und  $v'_1$ .

### 3) Das Associativgesetz

$$(u + v_1) + v_2 = u + (v_1 + v_2)$$

über die Ersetzung von zwei auf einander folgenden Additionen durch die einmalige Addition eines Weges, welcher der Summe der beiden successiven Addenden  $v_1$  und  $v_2$  gleich ist, d. h. in Fig. 32, die aneinander

Fig. 32.



schliessenden Wege  $u$ ,  $v'_1$  und  $v'_2$  führen zu demselben Endpunkt  $D$ , wie die Wege  $u$  und  $z'$ , wenn  $z = v_1 + v_2$  ist, und die oben markierten Buchstaben immer Wege bezeichnen, welche bezw. direct parallel und gleich lang sind mit den Wegen, deren Buchstaben am

Kopfe nicht markirt sind.

Um den Unterschied der aufgestellten drei Gesetze besser hervortreten zu lassen, betrachten wir dieselben bei den Potenzen.

1) Das Commutativgesetz lautet  $a^b = b^a$  und ist bei ungleichen rationalen Zahlen nur in dem einzigen Falle  $4^2 = 2^4$  richtig;

2) Das Permutativgesetz lautet  $(a^{b_1})^{b_2} = (a^{b_2})^{b_1}$  und ist immer richtig;

3) Das Associativgesetz lautet  $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$  und ist ebenfalls immer richtig.

Die drei Hauptgesetze der Addition sind übrigens nicht von einander unabhängig; denn wenn das Zeichen  $+$  irgend eine beliebige Verknüpfungsart bezeichnet, und für dieselbe die Richtigkeit des Commutativgesetzes und eines der beiden andern Gesetze bewiesen ist, so folgt die Richtigkeit des zweiten mit Nothwendigkeit. Dagegen ist das Commutativgesetz keine nothwendige Folge aus der Richtigkeit der beiden andern, noch weniger ist aber das Commutativgesetz nur ein specieller Fall des Permutativgesetzes und dies zeigt am besten die Betrachtung dieser beiden Gesetze bei den Potenzen.

Aus den drei Hauptgesetzen der algebraischen wie der geometrischen Addition ergeben sich dann

1) Das verallgemeinerte Permutativgesetz, lautend: Für jede Summe können sämtliche Summanden in beliebiger Reihenfolge geschrieben werden, ohne den Werth der Summe zu verändern;

2) Das verallgemeinerte Associativgesetz, lautend: Für jede Summe können die Summanden in beliebige Abtheilungen vertheilt werden; wenn man darauf innerhalb jeder Abtheilung für sich addirt, und die für die Partialsummen erhaltenen Werthe wieder summirt, so ist das Resultat gleich der ursprünglich verlangten Summe.

Es mögen jetzt in Fig. 33 die beiden zu summirenden

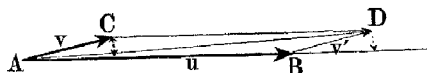
Fig. 33.



Wege  $u$  und  $v$  auf derselben Geraden liegen, es ist dann nicht möglich von dem Endpunkt

des  $u$  aus einen Weg  $v'$  so zu legen, dass im eigentlichen Sinne des Wortes  $v'$  parallel mit  $v$  werde, und die frühere Definition eines Werthes, welcher  $= u + v$  sei, passt daher nicht auf diesen Fall. Denken wir uns aber in Fig. 34  $u$  und  $v$  auf zwei verschiedenen Geraden,

Fig. 34.



darauf die Gerade für  $v$  gedreht um den Punkt  $A$ , immer näher an die Gerade für  $u$ ,

so dreht sich die Gerade für  $v'$  um den Punkt  $B$  ebenfalls immer näher an die Gerade für  $u$ .

Wir werden daher einen Weg  $w$  oder  $\overline{AD}$  als gleich der Summe zweier Wege  $u$  und  $v$  oder  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  auf derselben Geraden ansehen, wenn  $w$  von  $A$  zu denselben Endpunkte führt, wie die aneinander schliessenden Wege  $u$  und  $v'$ , und dabei  $v'$  mit  $v$  auf derselben Geraden liegt, gleich gerichtet und gleich lang ist.

Man überzeugt sich leicht, dass auch hier die drei Hauptgesetze der Addition richtig bleiben und desshalb auch die obigen beiden erweiterten Gesetze ihre Richtigkeit behalten.

Summen aus gleichen Summanden. Längenzahlen. Denken wir uns die Wege  $u_1, u_2, u_3$  etc. bis  $u_n$  wovon jeder einzelne identisch  $= u$  ist, und es sei  $w = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ , so schreiben wir in Uebereinstimmung mit der Algebra

$$w = nu$$

$$u = \frac{w}{n} = \frac{1}{n} w; w : u = n; u : w = \frac{1}{n}.$$

Es kann also ein Weg als das Vielfache eines andern Weges, und ebenso als ein aliquoter Theil eines andern Weges aufgefasst werden. Es seien nun  $p$  und  $q$  die Zeichen für irgend zwei ganze Zahlen,  $u, v, w$  die Zeichen für drei Wege, dann kann also sein

$$v = pu$$

$$w = \frac{v}{q}$$

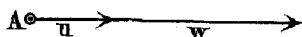
Daraus folgt  $w = \frac{pu}{q} = \frac{p}{q} u$ , wofür wir wieder  $nu$  schreiben, daher

$$w : u = \frac{p}{q} = n.$$

Es kann also ein Weg als Vielfaches eines andern Weges mit irgend einer gebrochenen Zahl als Coefficient erscheinen, oder als das Verhältniss eines Weges zu einem andern Wege kann jede ganze und jede gebrochene rationale Zahl erscheinen.

In derselben Weise, wie in der Geometrie die Beweise über die Proportionalität der Längen der Abschnitte von zwei geraden Linien zwischen parallelen Transversalen für den Fall der Incommensurabilität geführt werden, kann hier nun weiter entwickelt werden,

Fig. 35.



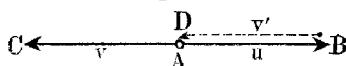
dass jeder Weg  $w$  in der Form  $nu$  dargestellt werden kann, wenn  $u$  und  $w$  denselben Anfangspunkt  $A$  haben

und auf derselben Geraden und in derselben Richtung liegen, und  $n$  irgend eine positive rationale oder irrationale Zahl bezeichnet.

Kein Weg ist in sich selbst negativ, es kann aber ein Weg als das Negative (oder Entgegengesetzte) eines andern Weges erscheinen. Wenn  $u$  und  $v$  zwei

beliebige Begriffe bezeichnen und  $u + v = 0$ , also  $v = 0 - u = -u$ , so erscheint  $v$  als das Negative

Fig. 36.



des  $u$ . Bezeichnen nun  $u$  und  $v$  zwei Wege und soll  $u + v = 0$  sein, so muss der Punkt  $D$  mit  $A$  zusammenfallen,

oder wenn  $v'$  von dem Endpunkte des  $u$  aus gleichgerichtet und gleich lang mit  $v$  ist, so muss, wenn  $u = \overline{AB}$  ist, auch  $v' = \overline{BA}$  sein, d. h. von zwei Wegen  $u$  und  $v$  mit gemeinsamem Anfangspunkt, heisst der eine das Negative des anderen (also  $v = -u$ ,  $u = -v$ ), wenn beide Wege entgegengesetzt gerichtet und gleich lang sind.

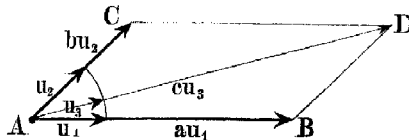
Es seien jetzt  $w_1$  und  $w_2$  zwei solche entgegengesetzt gerichtete und gleich lange Wege, so dass also  $w_2 = -w_1$ , und  $u$  sei ein Weg in derselben Richtung wie  $w_1$ , so dass  $w_1 = nu$  geschrieben werden kann, es ist dann  $w_2 = -(nu) = (-n)u$ , ferner

$$w_1 : u = n$$

$$w_2 : u = -n$$

d. h. alle Wege auf derselben Geraden, welche denselben Anfangspunkt haben, können als positive oder negative Vielfache eines festen Einheitsweges (von z. B. 1 Meter Länge) aufgefasst werden. Das Verhältniss eines Weges  $w$  zu einem solchen Einheitswege  $u$  heisst die Längenzahl des Weges  $w$  in Bezug auf  $u$  als Einheit.

Fig. 37.



Denken wir nun in dem Parallelogramm  $ABCD$  in den Richtungen  $AB, AC, AD$  drei gleich lange Einheitswege  $u_1, u_2, u_3$ , z. B. jeden von

1 Meter Länge und darauf die Wege  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  ausgedrückt in den Formen  $\overline{AB} = au_1, \overline{AC} = bu_2, \overline{AD} = cu_3$ ; so sind  $a, b, c$  die drei Längenzahlen der Wege  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  in Bezug auf die drei allerdings gleich langen,

aber doch der Richtung nach verschiedenen Einheitswege.

Die Gleichung

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

kann nun geschrieben werden

$$cu_3 = au_1 + bu_2,$$

aber hieraus folgt nicht

$$c = a + b,$$

sondern, wie aus der Trigonometrie bekannt ist

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}.$$

Man muss sich also hüten, eine Gleichung zwischen Wegen anzusehen, wie eine Gleichung zwischen den Längenzahlen dieser Wege, sobald sich diese Längenzahlen auf verschiedene Einheitswege beziehen, wenn auch diese Einheitswege gleich lang und nur verschieden gerichtet sind.

Wenn nun aber zwei Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  auf derselben Geraden liegen, und also auch ihre Summe  $\overline{AD}$  auf dieser Geraden liegt, so können alle drei Wege als Vielfache desselben Einheitsweges  $u$  angesehen werden, so dass  $\overline{AB} = au$ ,  $\overline{AC} = bu$ ,  $\overline{AD} = cu$  ist; die Gleichung

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

kann jetzt geschrieben werden

$$cu = au + bu = (a + b)u$$

und deshalb ist  $c = a + b$ , d. h. wenn ein Weg gleich der Summe zweier anderer Wege auf derselben Geraden ist, so ist auch die Längenzahl des ersten gleich der Summe der Längenzahlen der beiden andern, in Bezug auf denselben Einheitsweg.

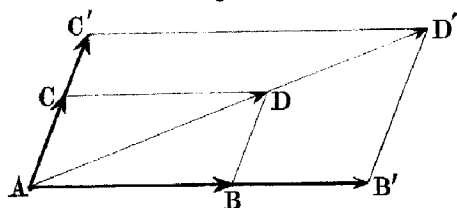
Offenbar gilt dieser Satz auch für Summen aus mehr als zwei Summanden, und selbst dann noch, wenn eine solche Summe  $= 0$  ist, da  $0 = 0u$  ist, und also 0 als ein Weg mit der Längenzahl 0 angesehen werden kann.

Der Satz

$$n(u + v) = nu + nv$$

ist in der Algebra eine Folge der erweiterten permutativen und associativen Gesetze, und da diese Gesetze auch für geometrische Summen gelten, so muss auch das obige

Fig. 38.



$AC$  und  $AC'$ , und endlich  $AD$  und  $AD'$  bezw. auf derselben geraden Linie liegen, und dabei  $ABCD$  und  $AB'C'D'$  Parallelogramme sind, dann

$$\overline{AD'} : \overline{AD} = \overline{AB'} : \overline{AB} = \overline{AC'} : \overline{AC} \text{ ist.}$$

§ 12. Projection eines Weges.

Fig. 39.

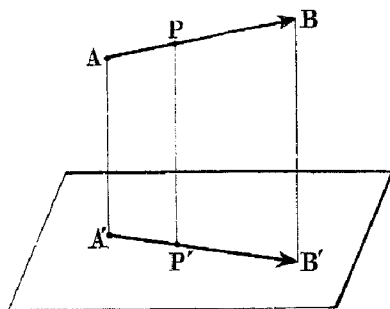
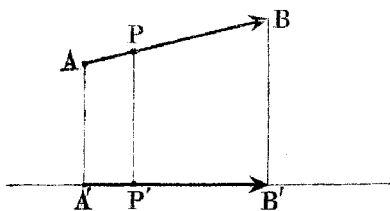


Fig. 40.



Gesetz  $n(u+v) = nu + nv$  für solche Summen gelten. Dieses Gesetz hat aber hier die geometrische Bedeutung, dass, wenn in Fig. 38  $AB$  und  $AB'$ , ebenso

Von den Projectionen eines Weges kommen in der Mechanik nur die Parallelprojectionen zur Anwendung, vorzugsweise aber die hier allein betrachteten rechtwinkligen Projectionen und zwar sowohl auf eine Axe, wie auf eine Ebene. Bezeichnet nun  $P$  den sich bewegendenden Punkt, welcher den Weg  $\overline{AB}$  zurücklegt, so denke man sich dazu einen zweiten Punkt  $P'$ , welcher sich so bewegt, dass derselbe beständig die Projection von  $P$  ist. Den Weg  $\overline{A'B'}$  dieses zweiten Punktes  $P'$  nennen wir die Projection des ursprünglichen Weges



Fig. 41.

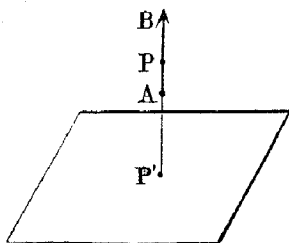


Fig. 42.

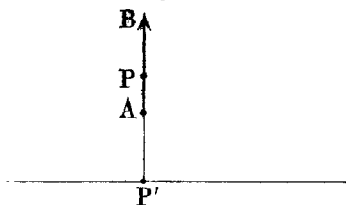


Fig. 43.

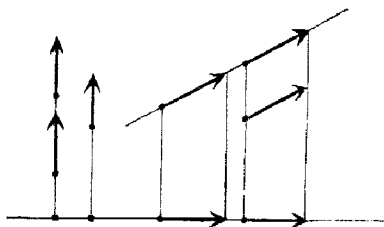
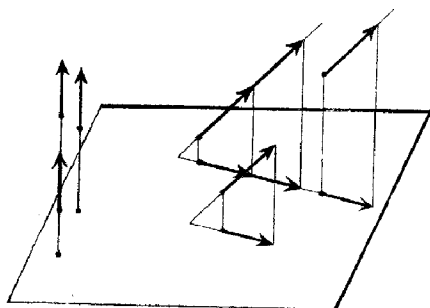


Fig. 44.



$\overline{AB}$ . Wenn  $\overline{AB}$  normal zu der Ebene oder Axe ist, auf welche projectirt wird, so würde man in der darstellenden Geometrie sagen, die Projection von  $\overline{AB}$  sei ein Punkt. Hier dagegen bemerken wir, dass während des Fortrückens von  $P$  seine Projection  $P'$  stillsteht, der Weg von  $P'$  ist also  $= 0$ , und daher sagen wir in diesem Falle die Projection von  $\overline{AB}$  ist  $= 0$ .

1) Die Projectionen von zwei gleich langen und entweder gleich oder direct parallel gerichteten Wegen sind entweder jede einzelne  $= 0$  oder auf einer Axe gleich lang und gleich gerichtet, auf einer Ebene dagegen auch gleich lang und entweder gleich oder direct parallel gerichtet, wie sich aus den Figuren 43 und 44 sofort ergibt.

2) Die Projection einer Gesammtheit von an-

einander schliessenden Wegen ist wieder eine Gesamtheit von aneinanderschliessenden Wegen. Figur 45 und 46.

3) Wenn demnach wie in Figg. 47, 48, 49,  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$  ist, also  $\overline{BD}$  und  $\overline{AC}$  gleich lang und entweder gleich oder direct parallel gerichtet sind, so sind auch die Projectionen  $\overline{A'C'}$  und  $\overline{B'D'}$  gleich lang und entweder gleich oder direct parallel gerichtet, und desshalb ist

Fig. 45.

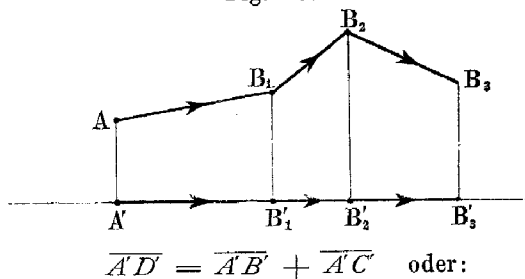
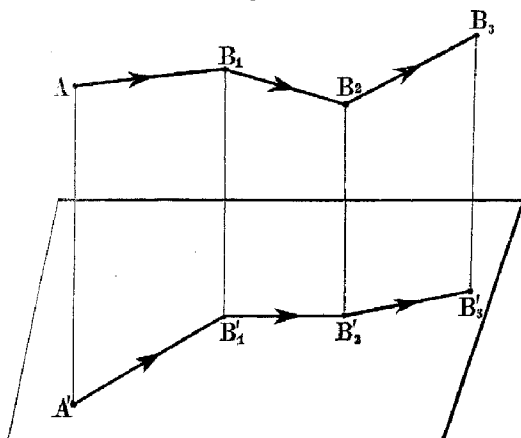
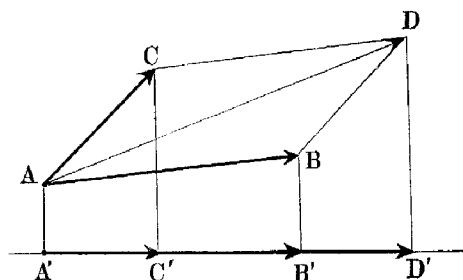


Fig. 46.



Ist ein Weg gleich der Summe von zwei anderen, Wegen so ist auch die Projection des ersten Weges gleich der Summe der

Fig. 47.



auf der-  
selben  
Axe oder  
Ebene  
liegen-  
den Pro-  
jectionen  
der an-  
dern bei-  
den  
Wege.

Der Satz gilt auch für eine Summe aus beliebig vielen Summanden.

Fig. 48.

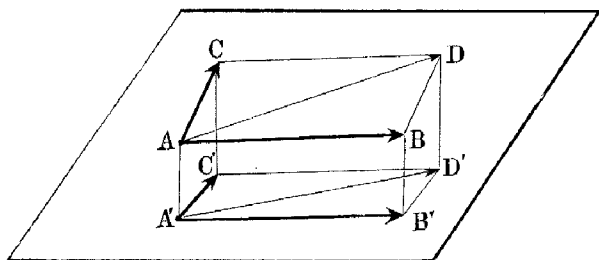
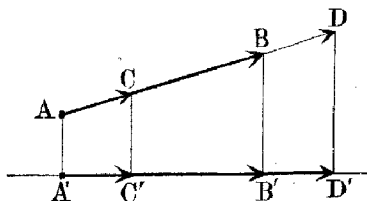
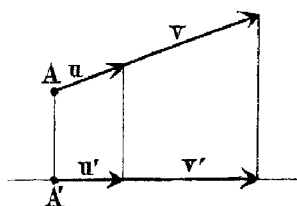


Fig. 49.



4) Liegen, wie in Fig. 50 und 51 zwei Wege  $u$  und  $v$  auf derselben Geraden und in derselben Richtung, so ist ihr Verhältniss gleich dem Verhältniss ihrer Projectionen  $u'$  und  $v'$  auf derselben Axe oder Ebene, oder

Fig. 50.



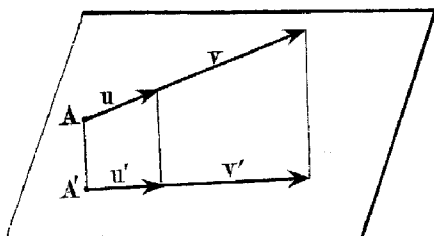
ist  $v = nu$ , so ist auch  $v' = nu'$ .

5) Sind wie in Fig. 52 und 53 zwei Wege  $u$  und  $v$  gleich lang und entgegengesetzt gerichtet, ist also  $u + v = 0$ ,  $v = -u$ , so sind auch ihre Projectionen  $u'$  und  $v'$  auf

derselben Axe oder Ebene entweder jede einzelne  $= 0$ , oder sie sind gleich lang und entgegengesetzt gerichtet, so dass  $u' + v' = 0$ , und  $v' = -u'$  ist.

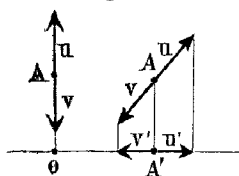
Der letzte Satz lässt sich auch aussprechen: Wenn ein Weg gleich dem Negativen eines andern Weges ist, so ist auch die Projection des ersten Weges gleich dem Negativen von der Projection des andern Weges, d. h. wenn beide Projectionen auf derselben Axe oder Ebene liegen.

Fig. 51.



6) Aus der Verbindung der beiden letzten Sätze ergibt sich der Satz: Wenn  $v = nu$ , so ist auch in der Projection  $v' = nu'$ , es mag  $n$  positiv oder negativ sein, wenn nur beide Projectionen auf derselben Axe oder Ebeneliegen.

Fig. 52.

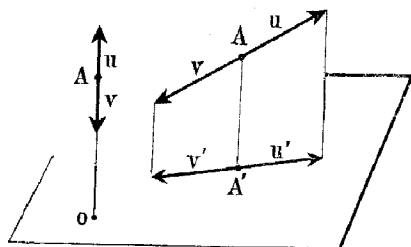


7) Es seien jetzt  $u_1$   $u_2$  etc. beliebige Wege mit gemeinsamem Anfangspunkt und zwischen

ihnen bestehe die Gleichung ersten Grades

$$n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3 + \dots = 0.$$

Fig. 53.



wo die Coefficienten beliebige positive oder negative, aber reelle Zahlen bezeichnen, so besteht zwischen den auf derselben Axe oder Ebene liegenden Projectionen  $u_1', u_2', \dots$  eine Gleichung

ersten Grades mit denselben Coefficienten, d. h. es ist wieder

$$n_1 u_1' + n_2 u_2' + n_3 u_3' + \dots = 0.$$

8) Kann jede einzelne von zwei Wegsummen durch denselben Weg  $w$  ersetzt werden, so kann auch jede einzelne der bezüglichen Projectionssummen durch dieselbe Projection  $w'$  des Weges  $w$  ersetzt werden. Man hat also den Satz:

Gleiche Wegsummen geben gleiche Projectionssummen auf derselben Axe oder Ebene.

9) Eine Wegsumme kann  $= 0$  sein; soll daher der vorstehende Satz auch für diesen Fall gelten, so entsteht die Frage, wie viel ist die Projection von 0? Offenbar kann nach dem Satze in Nr. 5 diese Projection nur selbst gleich 0 genommen werden.

10) Das Uebergehen von einem Wege  $u$  zu seiner Projection  $u'$  kann man wie eine an  $u$  auszuführende Operation ansehen und diese durch einen Buchstaben  $\mathfrak{P}$  bezeichnen, welchen man links von  $u$  setzt, so dass  $\mathfrak{P}u$  die Projection  $u'$  von  $u$  bezeichnet. Beziehen sich nun alle Projectionen auf dieselbe Axe oder Ebene, so lassen sich die obigen Sätze durch die folgende Symbolik bezeichnen

$$\mathfrak{P}(u + v) = \mathfrak{P}u + \mathfrak{P}v$$

$$\mathfrak{P}(nu) = n\mathfrak{P}(u)$$

$$\mathfrak{P}(-u) = -(\mathfrak{P}u).$$

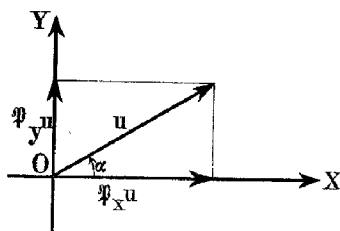
$$\text{Ist } n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots = 0, \text{ so ist } n_1(\mathfrak{P}u_1) + n_2(\mathfrak{P}u_2) + \dots = 0.$$

$$\text{Ist } u_1 + u_2 + \dots = v_1 + v_2 + \dots, \text{ so ist}$$

$$\mathfrak{P}u_1 + \mathfrak{P}u_2 + \dots = \mathfrak{P}v_1 + \mathfrak{P}v_2 + \dots$$

$$\mathfrak{P}(0) = 0.$$

Fig. 54.



11) Liegt ein Weg  $u$  in derselben Ebene mit zwei zu einander rechtwinkligen Axen  $X$  und  $Y$ , welche durch seinen Anfangspunkt  $A$  gehen, so ist  $u$  gleich der geometrischen Summe seiner beiden Pro-

jectionen auf diesen Axen, und bezeichnen wir dieselben mit  $\mathfrak{P}_x u$  und  $\mathfrak{P}_y u$ , so ist also

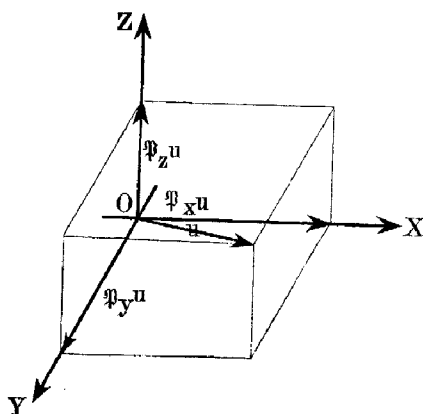
$$u = \mathfrak{P}_x u + \mathfrak{P}_y u.$$

12) Jeder Weg  $u$  ist gleich der geometrischen Summe seiner drei Projectionen auf drei zu einander rechtwinkligen Axen  $X, Y, Z$ , welche durch seinen Anfangspunkt gehen, oder es ist

$$u = \mathfrak{P}_x u + \mathfrak{P}_y u + \mathfrak{P}_z u.$$

13) Mit Hülfe der beiden vorhergehenden Sätze lässt sich die geometrische Summe beliebig vieler Wege  $u_1$

Fig. 55.



bis  $u_n$  durch Rechnung bestimmen.

Liegen diese Wege in derselben Ebene, so lege man durch ihren gemeinsamen Anfangspunkt  $A$  zwei auf einander rechtwinklige Axen  $X, Y$  und ersetze jeden Weg durch die Summe seiner beiden Projectionen auf

diesen Axen. Dann wird

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \mathfrak{P}_x u_1 + \mathfrak{P}_y u_1 + \dots + \mathfrak{P}_x u_n + \mathfrak{P}_y u_n \\ = \Sigma \mathfrak{P}_x u + \Sigma \mathfrak{P}_y u.$$

Nun denke man sich auf jeder von den geraden Linien der in Betracht kommenden Wege, sowie auf den Projectionsaxen  $X$  und  $Y$  Einheitswege von überall gleicher Länge, aber natürlich verschiedener Richtung, nenne diese Wege  $U$  und  $V$  auf den Axen  $X$  und  $Y$ , und  $W$  auf der geraden Linie einer der Wege  $u$ ; man kann dann schreiben

$$u = c W \\ \mathfrak{P}_x u = a U \\ \mathfrak{P}_y u = b V$$

wo also  $c$ ,  $a$ ,  $b$  die Längenzahlen des Weges  $u$  und seiner beiden Projectionen  $\mathfrak{P}_x u$  und  $\mathfrak{P}_y u$  sind in Bezug auf die angenommenen gleich langen Einheitswege. Bezeichnet nun  $\alpha$  den Winkel  $U^\wedge W$ , d. h. von der Richtung des Einheitsweges  $U$  zu derjenigen von  $W$ , so ist nach der Trigonometrie

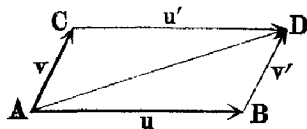
$$\frac{a}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{c} = \sin \alpha$$

also  $c W = c \cos \alpha \cdot U + c \sin \alpha \cdot V$ ,  
und die Gleichung  $\Sigma u = \Sigma \mathfrak{P}_x u + \Sigma \mathfrak{P}_y u$  heisst jetzt  
 $\Sigma u = (\Sigma c \cos \alpha) U + (\Sigma c \sin \alpha) V$   
woraus sich ein einziger Weg mit der Längenzahl  
 $\sqrt{(\Sigma c \cos \alpha)^2 + (\Sigma c \sin \alpha)^2}$  construiren lässt.

In ähnlicher Weise würde man verfahren, wenn die zu summirenden Wege nicht mehr in derselben Ebene liegen, und desshalb drei auf einander rechtwinklige Axen zu Hülfe genommen werden müssen.

§ 13. Geometrische Subtraction. Wenn in Fig. 56  $u + v = w$  ist, so folgt  $v = w - u$  oder der

Fig. 56.



Weg  $\overline{AC}$  gilt als Differenz der Wege  $\overline{AD}$  und  $\overline{AB}$ . Nun ist in der Algebra  $w - u = w + (-u)$ , oder jede algebraische Subtraction kann ersetzt werden durch die Addition des Negativen des Subtrahenden zum Minuenden.

Derselbe Satz gilt für die geometrische Subtraction, wenn man beachtet, dass  $-u$  mit dem Wege  $\overline{AB}$  gleich lang und entgegengesetzt gerichtet ist.

§ 14. Begriff der Strecken. Unter Strecke versteht man meistens einen Theil einer Linie, Grassmann gebraucht aber dieses Wort zur Bezeichnung einer Eigenschaft eines Weges. Darnach haben zwei geradlinige Wege gleiche Strecke, wenn die Wege gleich lang und gleich oder direct parallel gerichtet sind. Die Strecke eines beliebigen (gebrochenen oder krummlinigen) Weges von  $A$  nach  $B$  ist dasselbe wie die Strecke des geradlinigen Weges von  $A$  nach  $B$ . Alle beliebigen Wege von demselben Anfangspunkt nach demselben Endpunkt haben also dieselbe Strecke, aber natürlich nicht dieselbe Länge. Eine Strecke  $c$  heisst dann gleich der Summe von zwei andern Strecken  $a$  und  $b$ , wenn  $c$ ,  $a$  und  $b$  bezw. gleich den Strecken von drei Wegen  $w$ ,  $u$  und  $v$  sind, bei denen  $w = u + v$  ist. Demnach ist in Figur 56 die Strecke von  $\overline{AD}$  nicht nur gleich der Summe der Strecken von  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$ , sondern auch gleich der Summe der Strecken von  $\overline{AB}$  und  $\overline{BD}$ , während für die Wege selbst immer nur

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

und nicht  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$  ist.

Die Strecke eines Weges darf also mit dem Wege selbst nicht verwechselt werden.

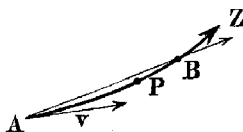
Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Strecke eines gebrochenen Weges von  $A$  nach  $B$  ist gleich der Summe der Strecken der einzelnen geradlinigen Theile dieses Weges.

Ferner gelten sämtliche Sätze der vorhergehenden §§ über die geometrische Addition, Subtraction und Projection der Wege auch für die entsprechende Operation bei den Strecken der Wege.

§ 15. Addition etc. der Geschwindigkeiten.

Wenn ein beweglicher Punkt  $P$  in Fig. 57 auf beliebiger Bahn sich von  $A$  nach  $B$  bewegt, so ist seine mittlere Bewegung die Bewegung auf der geradlinigen Bahn von  $A$  nach  $B$ , und die Geschwindigkeit dieser mittleren Bewegung ist das Ver-

Fig. 57.



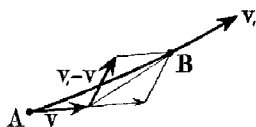


hältniss der Strecke des Weges  $\overline{AB}$  zu der Grösse der während der Bewegung verflossenen Zeit. Denken wir uns diese Zeiträume immer kleiner genommen, wobei auch das betrachtete Bahnstück  $\overline{AB}$  immer kleiner wird, jedoch immer mit  $A$  beginnt, und für jeden dieser Zeiträume die Geschwindigkeit der mittleren Bewegung bestimmt, so ist die Grenze  $V$  dieser so erhaltenen Werthe die augenblickliche Geschwindigkeit von  $P$  in der Lage  $A$ . Die Richtung derselben ist die Tangente der krummlinigen Bahn im Punkte  $A$ .

Wenn bei drei betrachteten Geschwindigkeiten die in demselben Zeitraum zurückgelegten Wege  $w$ ,  $u$  und  $v$  die Strecken  $c$ ,  $a$  und  $b$  besitzen, und die erste Strecke gleich der Summe der beiden andern ist, so sagen wir die erste Geschwindigkeit sei ebenfalls gleich der Summe der beiden andern. Für die geometrische Addition, Subtraction und Projection der Geschwindigkeiten gelten also alle Sätze der §§ 12 und 13.

§ 16. Addition etc. der Beschleunigungen. Bei einem Punkt  $P$ , welcher sich auf beliebiger Bahn

Fig. 58.



von  $A$  nach  $B$  bewegt, seien  $v$  und  $v_1$  die augenblicklichen Geschwindigkeiten in  $A$  und  $B$ , dann heisst die geometrische Differenz  $v_1 - v$  die Aenderung der Geschwindigkeit, und das Verhältniss dieser Aenderung zu der Grösse der während der Bewegung verflossenen Zeit heisst die mittlere Beschleunigung. Die Grenze dieser mittleren Beschleunigung unter der Voraussetzung, dass der betrachtete Zeitraum immer kleiner, demnach auch das Bahnstück  $\overline{AB}$  immer kleiner, jedoch stets mit dem Anfangspunkt  $A$  genommen werde, heisst die augenblickliche Beschleunigung von  $P$  in der Lage  $A$ .

Zwei Geschwindigkeitsänderungen werden addirt nach dem Satze  $(u_1 - u) + (v_1 - v) = (u_1 + v_1) - (u + v)$ .

Wenn bei drei betrachteten Beschleunigungen die drei in demselben Zeitraum erfolgenden Geschwindigkeitsänderungen von der Art sind, dass die erste gleich

der Summe der beiden andern ist, so sagen wir auch die erste Beschleunigung sei gleich der Summe der beiden andern. Für die geometrische Addition, Subtraction und Projection der Beschleunigungen gelten also ebenfalls alle Sätze der § 12 und 13.

§ 17. Alle obigen Sätze über die geometrische Addition etc. ergeben sich aus der Definition dessen, was gleich der Summe von bezw. zwei Wegen, Strecken, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sein soll. Sie sind daher rein formal, dagegen sind die folgenden beiden Sätze Naturgesetze, welche als die Grundlagen der Mechanik angenommen werden, nämlich:

1) Die Beschleunigung, welche ein Atom  $A$  durch die Einwirkung eines andern Atomes  $B$  erleidet, ist gerichtet auf der geraden Linie durch  $A$  und  $B$ , der Grösse nach abhängig von der Entfernung  $\overline{AB}$ , aber gänzlich unabhängig von der etwa vorhandenen Geschwindigkeit der beiden Atome.

2) Die unter der gleichzeitigen Einwirkung zweier Atome  $B$  und  $C$  auf dasselbe Atom  $A$  resultirende Beschleunigung für  $A$  ist, gleich der geometrischen Summe der beiden Beschleunigungen, welche jede einzelne der beiden Einwirkungen auf  $A$  für sich hervorbringen würde. Dieser letztere Satz wird gewöhnlich der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt.

Demnach gelten für die Addition, Subtraction und Projection der Kräfte an demselben Atom  $A$ , also mit gemeinsamen Angriffspunkt  $A$ , alle Sätze der §§ 12 und 13.

§ 18. Wahl der Einheiten. Wie ein Weg als positives oder negatives Vielfaches eines andern Weges auf derselben geraden Linie aufgefasst werden kann, so kann eine Kraft  $P = nU$  als positives oder negatives Vielfaches einer andern Kraft  $U$  angesetzt werden, wenn die Richtungen beider Kräfte auf derselben geraden Linie liegen, und das Verhältniss  $P:U$  der ersten Kraft  $P$  zu der zweiten  $U$  heisst dann die Intensitätszahl der ersten Kraft in Bezug auf die zweite. Aehnliches gilt für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wählen wir als Einheit der Strecken ein Meter und als Zeiteinheit eine Secunde mittlerer Zeit, so gilt als

Einheit der Geschwindigkeit diejenige, mit welcher in einer Secunde ein Weg von 1<sup>m</sup> Länge zurückgelegt wird. Dieselbe nennen wir „Meter pro Secunde“ und bezeichnen sie mit  $\frac{m}{sec.}$  oder  $\frac{Meter}{Sec.}$ . Als Einheit der Beschleunigung gilt diejenige, bei welcher in einer Secunde eine Geschwindigkeitsänderung von 1  $\frac{Meter}{Sec.}$  erreicht wird.

Wir bezeichnen dieselbe mit  $\frac{Meter}{Sec.^2}$  mit der Benennung „Meter pro Secunde-quadrat.“ Als Krafteinheit wählen wir diejenige Kraft, welche bei einem Atome  $N$   $\frac{Meter}{Sec.^2}$

Beschleunigung hervorbringt, wenn  $N$  Atome zu einer Massen-Einheit gehören. Nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte ist diese Kraft  $N$  mal so gross, wie diejenige, welche einem Atome eine Beschleunigung von 1  $\frac{Meter}{Sec.^2}$  ertheilt, und die Stärke dieser Kraft ist also

auch gleich der Summe der Intensitäten der  $N$  unter sich gleich starken und parallelen Kräfte, welche jedem einzelnen der  $N$  Atome einer Massen-Einheit je 1  $\frac{Meter}{Sec.^2}$

Beschleunigung ertheilen. Also Kraft-Einheit wirkend auf die Massen-Einheit bringt die Einheit der Beschleunigung hervor. Nun bringt aber die Anziehung der Erde bei einem Kilogramm Masse, welches sich in der Nähe der Erdoberfläche befindet, ungefähr 9,81  $\frac{Meter}{Sec.^2}$  Beschleunigung hervor, und wirkt also 9,81

mal so stark als zur Hervorbringung von 1  $\frac{Meter}{Sec.^2}$  Beschleunigung erforderlich wäre. Wird daher 1 Kilogramm Masse als Massen-Einheit genommen, so ist die Stärke der Erdanziehung auf ein in der Nähe der Erdoberfläche befindliches Kilogramm Masse = 9,81 Krafteinheiten. Wird aber diejenige Kraft, mit welcher die Erdanziehung auf ein in der Nähe der Erdoberfläche befindliches Kilogramm Masse wirkt, als Kraft-Einheit genommen, etwa unter dem Namen „Kilogramm Kraft,“ so kann das Kilogramm Masse (d. h. die Stoffmenge in einem Liter reinen Wassers etc.) nicht mehr als Massen-Einheit dienen, sondern diese letztere Einheit ist = 9,81 Kgr. Masse. Nun ist für den Techniker das Kilogramm Kraft

eine sehr bequeme Kraft-Einheit, wenn auch diese Einheit wegen der Abplattung der Erde u. s. w. vom Aequator nach den Polen zu etwas zunimmt. Für die rein wissenschaftliche Mechanik aber genügt diese Veränderlichkeit, um das Kilogramm Kraft als Einheit verwerfen zu lassen, und dafür das Kilogramm Masse (unter Umständen auch das Gramm oder selbst das Milligramm) als Massen-Einheit zu adoptiren. Die Einheiten für Kraft und Masse sind also in der Technik etwa 9,81 mal grösser, als in der rein wissenschaftlichen Mechanik. Der Umstand, dass das Kilogramm bald als Massen-Einheit, bald als Kraft-Einheit gebraucht wird, führt leicht zu Missverständnissen, namentlich in solchen Grenzgebieten der Technik und Wissenschaft, wie in der mechanischen Wärmetheorie, Theorie der Gase<sup>1)</sup> u. s. w.

Wirken nun  $P$  Kraft-Einheiten auf  $M$  Massen-Einheiten und bringen bei jedem Atom derselben  $G \frac{\text{Meter}}{\text{Sec.}^2}$  Beschleunigung hervor, so müssen bei jeder einzelnen Massen-Einheit  $G$  Kraft-Einheiten, im Ganzen also  $M G$  Kraft-Einheiten wirksam sein, und es muss also die Gleichung bestehen  $P = M G$ ; dies ist dann eine Gleichung zwischen unbenannten Zahlen. Man kann aber auch mit  $M$  die Masse selbst (also nicht die Anzahl der darin enthaltenen Massen-Einheiten) und eben so mit  $G$  die Beschleunigung selbst und mit  $P$  die Kraft selbst bezeichnen, und doch die Gleichung  $P = M G$  festhalten. Dies ist aber dann eine Gleichung ganz anderer Art wie vorher, und damit dieselbe richtig bleibt, muss man das Wort Kraft als eine abkürzende Bezeichnung für das Product „Masse mal Beschleunigung“ definiren. Darnach wird dann z. B.

1 Kilogramm Kraft = 1 Kilogramm Masse mal  $9,81 \frac{\text{Meter}}{\text{Sec.}^2}$  Beschleunigung, also auch

$$\frac{1 \text{ Kilogramm Kraft}}{1 \text{ Kilogramm Masse}} = 9,81 \frac{\text{Meter}}{\text{Sec.}^2} \text{ Beschleunigung.}$$

In dieser letztern Auffassung werden wir das Product aus Masse mal Geschwindigkeit die Bewegungs-

<sup>1)</sup> Man sehe: Kinetische Theorie der Gase von Dr. O. E. Meyer. Seite 193, Note 2, wo ein derartiges Missverständniss zwischen Prof. Meyer in Breslau und Prof. Wüllner in Aachen klargestellt wird.

grösse des Atoms, und das Product aus Kraft und Dauer ihrer Wirksamkeit den Antrieb der Kraft nennen. Bewegungsgrösse und Antrieb werden geometrisch addirt wie Wege und nicht wie Strecken, d. h. die Bewegungsgrössen und Antriebe in parallelen Richtungen können sich nicht gegenseitig vertreten.

Aus der Geschwindigkeit  $v$  und tangentiellen Beschleunigung  $G$  eines Atomes ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , und Winkelbeschleunigung  $\varphi$  in Bezug auf den Kreislauf um ein beliebiges Centrum  $C$  durch Division mit dem Abstände  $r$  des Atomes von diesem Centrum. Es ist also

$$\omega = v:r; \quad v = \omega r; \quad r = \frac{v}{\omega};$$

$$\varphi = G:r; \quad G = \varphi r; \quad r = \frac{G}{\varphi};$$

die Einheit der Winkelgeschwindigkeit wird dabei  $\frac{1}{\text{Sec.}}$ , d. h. die Geschwindigkeit einer Drehung, wobei der in der Secunde von dem Atome zurückgelegte Weg an Länge gleich seinem Abstände vom Centrum ist; der betreffende Drehwinkel ist in der Secunde =  $57^{\circ} 44''$ , 8, und dessen Arcuszahl = 1.

Die Einheit der Winkelbeschleunigung ist  $\frac{1}{\text{Sec.}^2}$ .

§ 19. Wege mit verschiedenen Anfangspunkten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei verschiedenen Atomen, Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Wir betrachten zunächst einen Körper von unveränderlicher Gestalt, d. h. eine Gesamtheit von Atomen, wobei die Entfernung zwischen je zwei derselben unverändert bleibt. Sind in diesem Falle die Wege von drei nicht alignirten Atomen<sup>1)</sup> direct parallel und gleich lang, so gilt dies von den Wegen sämmtlicher Atome, und die Bewegung heisst geradlinig fortschreitend. Wenn die Wege von drei nicht alignirten Punkten Kreisbogen von gleichem Centriwinkel und gleicher Normalaxe sind, so gilt dies von den Wegen sämmtlicher Atome, mit Ausnahme der Punkte in der Axe selbst, und die Bewegung heisst rotirend oder drehend. Als Normalaxe eines Kreises

<sup>1)</sup> Das heisst: nicht in gerader Linie liegenden A.

gilt hier die durch den Kreismittelpunkt gehende Normale zu der Ebene des Kreises. Die Punkte in der Axe bleiben in Ruhe. Wenn die Wege von drei nicht alignirten Punkten Schraubenlinien von gleicher Axe, gleichem Centriwinkel und gleicher Steigung sind, so gilt dies von den Wegen sämmtlicher Atome mit Ausnahme der Punkte in der Axe, und die Bewegung heisst schraubend. Die Punkte in der Axe haben dabei geradlinige Wege von gleicher Länge und Richtung wie die Steigung der Schraube. Bei der drehenden Bewegung haben alle Punkte dieselbe Winkelgeschwindigkeit. Die Bewegung eines Punktes ausserhalb der Axe erscheint von der einen Seite der Bahnebene aus gesehen, so wie die Bewegung der Spitze des Uhrzeigers, oder so wie die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne von einem Punkte auf der Nordseite des Erdäquators aus gesehen. Diese Seite der Bahnebene wollen wir die Nordseite, die entgegengesetzte aber die Südseite nennen. Die Richtung der Axe einer drehenden Bewegung ist diejenige, in welcher sich ein Punkt auf der Axe bewegen muss, um von der Südseite nach der Nordseite der Bahnebene eines beliebigen Körperpunktes zu gelangen.

Bezeichnen  $A$  und  $B$  zwei Lagen eines Körpers von unveränderlicher Gestalt am Anfange und Ende eines Zeitraums  $t$ , so kann der Körper in demselben Zeitraum von  $A$  nach  $B$  gelangen in einem der folgenden vier Zustände, aber immer nur in einem einzigen derselben, nämlich

1) Ruhe (wenn nämlich  $A$  und  $B$  dieselbe Lage bezeichnen);

2) eine geradlinige fortschreitende Bewegung mit constanter Geschwindigkeit;

3) eine drehende Bewegung mit constanter Winkelgeschwindigkeit;

4) eine schraubende Bewegung mit constanter Steigung und constanter Umdrehungszahl pro Minute.

Diese vier Zustände heissen die kinematischen Grundformen. Ihnen entsprechen die vier statischen Grundformen, nämlich

1) ein Nullsystem, d. h. entweder die Null oder auch eine Gesammtheit von solchen Kräften, welche sich gegenseitig das Gleichgewicht halten;

- 2) eine Einzelkraft;
- 3) ein Kräftepaar, d. h. eine Gesamtheit von zwei Kräften, welche entgegengesetzt parallele Richtungen und gleiche Intensitäten haben;
- 4) ein Schraubensystem von drei Kräften, von denen die ersten zwei ein Kräftepaar bilden, auf dessen Ebene die Richtung der dritten Kraft rechtwinklig steht.

Den kinematischen und statischen Grundformen kann man die vier geometrischen Grundformen: Punkt, Linie, Fläche und Körperraum gegenüberstellen.

Diejenige kinematische Grundform, durch welche ein Körper aus der Lage  $A$  in die Lage  $B$  während des Zeitraums  $t$  gelangen kann, heisst die mittlere Bewegung des Körpers während dieser Zeit. Die Grenze dieser mittleren Bewegung, unter der Voraussetzung, dass die Lage  $A$  immer als Anfangslage gilt, der betreffende Zeitraum aber immer kleiner gedacht wird, die Lage  $B$  also immer näher an  $A$  rückt, heisst die augenblickliche Bewegung am Anfange des Zeitraums  $t$ .

Eine Bewegung heisst gleich der Summe von zwei andern Bewegungen, wenn für jeden Punkt des mobilen Körpers die augenblickliche Geschwindigkeit vermöge der ersten Bewegung gleich der (geometrischen) Summe der augenblicklichen Geschwindigkeiten ist, welche den beiden andern Bewegungen entsprechen. Eine schraubende Bewegung ist offenbar gleich der Summe einer drehenden und einer fortschreitenden Bewegung. Eine fortschreitende Bewegung ist auch gleich der Summe von zwei drehenden Bewegungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, wenn deren Axen entgegengesetzt parallel sind und die Ebene dieser Axen rechtwinklig zu der Richtung der fortschreitenden Bewegung ist.

Ein Kraftsystem heisst gleich der Summe von zwei andern Kraftsystemen, wenn das erstere die Gesamtheit der beiden andern ersetzen kann. Diese Ersetzbarkeit kann natürlich nur in ganz bestimmter Hinsicht, etwa mit Rücksicht auf die Lösung bestimmter Aufgaben bestehen. Es sind nun für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten zwei Fälle zu unterscheiden. Die an einem Atom eines Körpers angreifenden Kräfte sind entweder innere oder äussere Kräfte, je nachdem dieselben entweder von andern Atomen desselben Körpers

oder von Atomen anderer Körper ausgeübt werden. Im Falle Gleichgewicht vorhanden ist, besteht dieses an jedem Atome einzeln für die Gesamtheit der dort angreifenden innern und äussern Kräfte, und damit dies möglich ist, müssen die äussern Kräfte für sich gewisse Bedingungen erfüllen, wovon ein Theil sich nur auf die Forderung bezieht, dass der Körper aus seiner etwaigen Ruhelage nicht als Ganzes fortgerissen werde, während der zweite Theil der Forderung entspricht, dass die Stücke des Körpers nicht von einander gerissen werden. Nur hinsichtlich des ersten Theils gilt nun der Erfahrungssatz, dass eine Kraft stets durch eine andere von derselben Richtung und Intensität, aber mit anderem Angriffspunkt ersetzt werden kann. Dieser Satz wird gewöhnlich als Grundsatz aufgeführt, derselbe ist jedoch eine Folge des oben erklärten Princips der Wechselwirkung.

Wenn demnach die Richtungen zweier Kräfte  $P$  und  $Q$  sich schneiden, so können unter den obigen Bedingungen  $P$  und  $Q$  zunächst durch zwei andere Kräfte  $P'$   $Q'$  ersetzt werden, welche den Durchschnittspunkt der Richtungen als gemeinsamen Angriffspunkt besitzen, und nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte kann die Gesamtheit der Kräfte  $P$  und  $Q'$  wieder durch eine einzige Kraft  $R$  ersetzt werden.

Wenn ebenso die Axen von zwei betrachteten Drehungen  $P$  und  $Q$  (zu denen die Winkelgeschwindigkeiten  $p$  und  $q$  gehören) sich schneiden, so ist die geometrische Summe der augenblicklichen Geschwindigkeiten, welche vermöge jeder einzelnen der beiden Drehungen für einen bestimmten Punkt  $A$  des mobilen Körpers stattfinden würden, gleich der augenblicklichen Geschwindigkeit, die sich für denselben Punkt  $A$  aus einer dritten Drehung  $R$  (mit der Winkelgeschwindigkeit  $r$ ) ergeben würde. Man kann also schreiben

$$R = P + Q,$$

aber deshalb durchaus nicht  $r = p + q$ , sondern es wird  $R$  als Drehung nach Axe und Winkelgeschwindigkeit genau so construirt wie bei den Kräften  $P$  und  $Q$  die Mittelkraft  $R$  nach Richtung und Intensität, so dass also  $r = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos \alpha}$ , wenn  $\alpha$  den Axenwinkel bezeichnet.

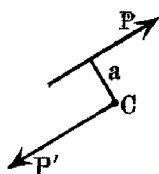


Wir können also durch Wege mit verschiedenen Anfangspunkten uns entweder Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten nach Richtung und Intensität, oder Drehungen nach Axe und Winkelgeschwindigkeit dargestellt denken, und in beiden Fällen geschieht die Addition nach demselben Gesetz, sodass jeder Weg durch einen anderen ersetzt werden kann, welcher dieselbe Richtung und Länge, aber einen andern Anfangspunkt hat.

Jedes System (d. h. Summe oder Gesamtheit) von Kräften (bezw. Drehungen) lässt sich stets durch eine der vier statischen (bezw. kinematischen) Grundformen ersetzen; dieselbe heisst dann die Resultante des Systems. Ist dieselbe eine Einzelkraft, so heisst dieselbe auch die Mittelkraft. Im Gegensatz zur Resultante heissen die einzelnen Bestandtheile des Systems (oder die Summanden der Summe) die Componenten desselben. Bei den Kräften sind die einzelnen Componenten das Reale, die Resultante dagegen ist nur eine Rechnungsgrösse, welche eingeführt wird, um gewisse Summen (Projectionen und Momente) schneller berechnen zu können. Bei den Bewegungen dagegen ist die Resultante das Reale, die wirkliche Bewegung, und die Componenten sind nur Grössen zur Erleichterung der Rechnung.

#### § 20. Statische und kinematische Momente.

Fig. 59.



Bei Kräften und Bewegungen sind zu unterscheiden das Moment in Bezug auf einen Punkt und in Bezug auf eine Axe. Das statische Moment einer Kraft  $P$  in Bezug auf einen Punkt  $C$  ist bekanntlich das Product  $pa$  aus der Intensität  $p$  der Kraft und der Länge  $a$  des Hebelarms der Kraft in Bezug auf den Punkt  $C$ , d. h. des Abstandes des Punktes  $C$  von der Richtung der Kraft  $P$ . Es ist bekannt, welche

wichtige Rolle diese Producte in der Statik spielen, aber diese Wichtigkeit tritt offenbar nicht a priori hervor und bleibt eine merkwürdige Thatsache. Auch ist nicht sofort zu erkennen, wie Momente zu addiren wären. Ganz anders erscheint das kinematische Moment  $pa$ ,

wenn wir  $P$  als das Zeichen einer Drehung ansehen und mit  $p$  die Winkelgeschwindigkeit derselben bezeichnen. Jetzt ist sofort klar, dass  $pa$  die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes  $C$  bei der Körperdrehung  $P$  bezeichnet, und dass diese Geschwindigkeit rechtwinklig zu der Ebene des Punktes  $C$  und der Axe von  $P$  gerechnet werden muss. Da wir nun eine Bewegung  $R$  nur dann gleich der Summe der Drehungen  $P_1, P_2$ , etc. nennen, wenn die dem  $R$  entsprechende augenblickliche Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes  $C$ , gleich der geometrischen Summe der augenblicklichen Geschwindigkeiten ist, die den Drehungen  $P_1, P_2$  etc. für  $C$  entsprechen, und die Addition der Kräfte vermöge derselben Constructionen an den darstellenden Wegen geschieht, wie bei den Drehungen, so folgt, dass auch bei den Kräften für jeden Punkt  $C$  das statische Moment einer Resultante  $R$  gleich der geometrischen Summe der statischen Momente ihrer Componenten sein muss, wenn man das statische Moment  $pa$  jeder Kraft  $P$  durch einen Weg von  $C$  aus darstellt, welcher rechtwinklig zu der Ebene von  $P$  und  $C$  ist, in der Richtung der augenblicklichen Geschwindigkeit, welche zu  $C$  gehören würde, wenn  $P$  eine Drehung bezeichnete. Liegen sämtliche Krafrichtungen oder Drehungsaxen der Componenten  $P_1, P_2$  u. s. w. mit dem Punkte  $C$  in derselben Ebene, so liegen die Richtungen der Momente auf derselben geraden Linie, mögen sie dabei gleich oder entgegengesetzt gerichtet sein. Jedes der Momente lässt sich dann als positives oder negatives Vielfaches eines Einheitsmomentes ausdrücken (dessen Werth etwa 1 Kgrmeter bei den Kräften, oder 1  $\frac{\text{Meter}}{\text{Sec.}}$  bei den Bewegungen sein kann), und das Verhältniss jedes Momentes zu diesem Einheitsmoment heisst dann die Momentenzahl. Ist hier wieder  $R = P_1 + P_2 + \text{etc.}$ , so ist nicht nur, wie immer

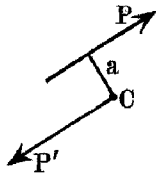
Moment von  $R = \text{Summe der Momente der } P$ ,  
sondern es ist auch

Momentenzahl von  $R = \text{Summe der Momenten-  
zahlen der } P$ .

Durch diese Anlehnung der Statik an die Kinematik erscheinen nun zwar die Sätze über die statischen Mo-

mente als logisch nothwendig, aber das statische Moment selbst erscheint immer noch als Product und nicht als eine einfache statische Grösse, die zu andern Kräften addirt werden könnte. Aber auch das kinematische Moment als Geschwindigkeit des einzelnen Punktes  $C$  kann nicht zu einer Körperbewegung addirt werden. Bemerken wir nun, dass eine fortschreitende Bewegung des ganzen Körpers, welche für den Punkt  $C$  dieselbe Geschwindigkeit  $pa$  bedingen sollte, wie die Drehung  $P$ , ja ebenfalls die Geschwindigkeit  $pa$  und in derselben Richtung wie vorher bei  $C$  besitzen müsste, so erscheint

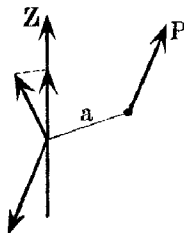
Fig. 59.



es zweckmässig, als kinematisches Moment einer Drehung  $P$  in Bezug auf einen Punkt  $C$  diese fortschreitende Bewegung zu definiren. Nun ist aber diese letztere Bewegung gleich der Summe  $P + P'$  aus der ursprünglichen Drehung  $P$  und einer zweiten Drehung  $P'$ , deren Axe durch  $C$  geht, wenn beide Drehungen entgegengesetzt parallele Axen und gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben. Demgemäss erklären wir

das statische Moment einer Kraft  $P$  als das Kräftepaar  $P + P'$ , bestehend aus der ursprünglichen Kraft  $P$  und der in  $C$  angreifenden Kraft  $P'$ , welche mit  $P$  entgegengesetzt parallele Richtung und gleiche Intensität besitzt. Die Summe mehrerer statischen Momente in Bezug auf denselben Punkt  $C$  ist also die Resultante mehrerer Kräftepaare.

Fig. 60.



Unter dem statischen oder kinematischen Momente einer Gesamtheit von Kräften oder Drehungen in Bezug auf einen Punkt, verstehen wir die Summe der Momente der Componenten. Darnach wird das Moment eines Paares gleich diesem Paare selbst, und hat desshalb für alle Punkte denselben Werth. Also das kinematische Moment einer fortschreitenden Bewegung ist für alle Punkte des Körpers diese fortschrei-

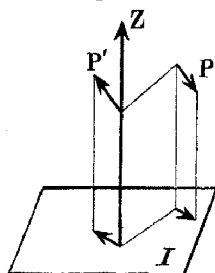
Moment  
nicht als  
Kräften  
matische  
punktes  $C$   
werden.  
Bewegung  
dieselbe  
Drehung  
derselben  
erscheint  
matisches  
n Bezug  
ortschrei-  
n. Nun  
Bewegung  
aus der  
nd einer  
xe durch  
gen ent-  
en und  
igkeiten  
ren wir  
äftepaar  
ft  $P$  und  
ntgegen-  
besitzt.  
ezug auf  
mehrerer

der kine-  
esamt-  
ungen in  
ehen wir  
der Com-  
s Moment  
m Paare  
für alle  
Also das  
er fort-  
für alle  
ortschrei-

tende Bewegung selbst, und die Summe der statischen Momente der zwei Kräfte eines Kräftepaars ist für alle Punkte dieses Kräftepaar selbst und deshalb constant.

Momente in Bezug auf eine Axe. Das kinematische Moment einer Drehung  $P$  in Bezug auf eine Axe  $Z$  ist die auf dieser Axe ausgeführte Projection des Momentes von  $P$  in Bezug auf einen beliebigen Punkt  $C$  der Axe, oder das Moment von  $P$  in Bezug auf die Axe  $Z$  ist die gemeinsame Geschwindigkeitscomponente, welche bei der Körperdrehung  $P$  die Punkte der Axe  $Z$  nach der Richtung dieser Axe haben würden. Das statische Moment der Kraft  $P$  in Bezug auf die Axe  $Z$  ist die auf dieser Axe ausgeführte Projection des Momentes der Kraft  $P$  in Bezug auf einen beliebigen Punkt  $C$  dieser Axe, vorausgesetzt, dass man das Moment durch einen Weg darstellt, in der Richtung der Geschwindigkeit, welche  $C$  haben würde, wenn  $P$  eine Drehung bezeichnete. Diese Projection ist aber identisch mit der auf einer zu  $Z$  rechtwinkligen Ebene  $I$  ausgeführten Projection des Kräftepaares  $P + P'$ , welche das Moment von  $P$  in Bezug auf den Punkt  $C$  bildet.

Fig. 61.



Ist die Ebene dieses Paares  $P + P'$  selbst rechtwinklig zu  $Z$ , so ist auch dieses Paar schon das Moment von  $P$  in Bezug auf die Axe  $Z$ . Liegen die Richtungen von Kraft und Axe in derselben Ebene, so ist das Moment  $= 0$ . Für Momente in Bezug auf eine Axe gilt der Satz:

gleiche Summen sowohl für ihre Momente, wie auch für die Momentenzahlen, welche man erhält, wenn man jedes der Momente als Vielfaches eines zu dieser Axe gehörenden Einheitsmomentes darstellt.

Bezeichnet man die Bildung des Momentes aus der Kraft oder der Drehung  $P$  wie eine Operation durch Vorsetzung des Buchstabens  $\mathfrak{M}$ , so kann man die obigen Sätze durch folgende Symbolik ausdrücken.

$$\mathfrak{M}(P+Q) = \mathfrak{M}P + \mathfrak{M}Q; \quad \mathfrak{M}(nP) = n\mathfrak{M}P \\ \mathfrak{M}(-P) = -\mathfrak{M}P; \quad \mathfrak{M}(0) = 0.$$

§ 21. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. Sind Kräfte im Gleichgewicht, also ihre Summe  $= 0$ , so ist für jede Axe und jede Ebene die Summe ihrer Projectionen  $= 0$ , und ebenso ist für jeden Punkt und jede Axe die Summe ihrer statischen Momente  $= 0$ . Es können aber umgekehrt die Summen der Projectionen wie der Momente für einige der Axen  $= 0$  sein, ohne dass deshalb Gleichgewicht vorhanden wäre. Nur wenn bei sechs von den erwähnten Summen in Bezug auf Axen jede einzelne  $= 0$  ist, und sich unter diesen sechs Summen wenigstens drei Momentensummen befinden, sind die Kräfte im Gleichgewicht. Dabei ist aber die Lage der Axen nicht beliebig. Meistens wählt man drei zu einander rechtwinklige Axen  $X, Y, Z$  und die Summen der Projectionen  $\mathfrak{P}_x P, \mathfrak{P}_y P, \mathfrak{P}_z P$  und der Momente  $\mathfrak{M}_x P, \mathfrak{M}_y P, \mathfrak{M}_z P$  in Bezug auf diese Axen, so dass also die sechs Gleichgewichtsbedingungen heissen:

$$\Sigma \mathfrak{P}_x P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{P}_y P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{P}_z P = 0; \\ \Sigma \mathfrak{M}_x P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{M}_y P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{M}_z P = 0.$$

Zeigen die Richtungen gewisse gemeinsame Eigenschaften, so ist es leicht, die Coordinatenaxen so zu legen, dass einige von diesen sechs Bedingungen immer erfüllt sind, die Kräfte mögen im Gleichgewicht sein oder nicht.

Liegen z. B. die Richtungen aller Kräfte in derselben Ebene, und nimmt man die Axen  $X$  und  $Y$  in dieser Ebene, so ist stets

$$\Sigma \mathfrak{P}_z P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{M}_z P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{M}_y P = 0,$$

wie auch die Kräfte sein mögen, es erübrigt daher, um Gleichgewicht zu haben, nur noch die Erfüllung der drei Bedingungen

$$\Sigma \mathfrak{P}_x P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{P}_y P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{M}_x P = 0;$$

wobei man anstatt  $\Sigma \mathfrak{M}_z P$  auch die Summe der Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Kraftebene nehmen kann.

Liegen die Richtungen aller Kräfte auf parallelen geraden Linien, so nehme man parallel mit ihnen die Axe  $Z$ , dann ist stets

$$\Sigma \mathfrak{P}_z P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{P}_y P = 0; \quad \Sigma \mathfrak{M}_x P = 0;$$

wie auch die Kräfte sein mögen; es erübrigt daher um Gleichgewicht zu haben nur noch die Erfüllung der drei Bedingungen:

$$\Sigma \mathfrak{P}_z P = 0; \Sigma \mathfrak{M}_x P = 0; \Sigma \mathfrak{M}_y P = 0.$$

Liegen die Richtungen aller Kräfte auf geraden Linien, welche sich in demselben Punkte  $O$  schneiden, so nehme man diesen Punkt  $O$  zum Anfangspunkt der drei Axen  $X, Y, Z$ . Es ist dann immer

$$\Sigma \mathfrak{M}_x P = 0; \Sigma \mathfrak{M}_y P = 0; \Sigma \mathfrak{M}_z P = 0,$$

und zum Gleichgewicht bedarf man noch der Erfüllung der drei Bedingungen

$$\Sigma \mathfrak{P}_x P = 0; \Sigma \mathfrak{P}_y P = 0; \Sigma \mathfrak{P}_z P = 0.$$

Besteht die Gesamtheit der Kräfte aus lauter Kräftepaaren, so ist immer

$$\Sigma \mathfrak{P}_x P = 0; \Sigma \mathfrak{P}_y P = 0; \Sigma \mathfrak{P}_z P = 0;$$

und es findet Gleichgewicht statt, wenn ausserdem noch

$$\Sigma \mathfrak{M}_x P = 0; \Sigma \mathfrak{M}_y P = 0; \Sigma \mathfrak{M}_z P = 0.$$

§ 22. Energie. Die Energie erscheint entweder als Eigenschaft eines einzelnen Atomes oder als gemeinsamer Besitz zweier Atome, die erstere heisst nach W. Thomson die kinetische, die zweite die potentielle Energie. Man könnte dafür auch Bewegungs-Energie und Spannungs-Energie sagen. Bezeichnet  $m$  die Masse eines Atoms und  $v$  seine Geschwindigkeit, so ist  $\frac{1}{2}mv^2$  seine Bewegungs-Energie. Nehmen wir Meter, Secunde und Kilogramm-Kraft als Einheiten der Länge, Zeit und Kraft, also 9,81 Kgr. Masse als Massen-Einheit, so enthalten 2.9,81 Kgr. oder 19,62 Kgr. Masse, also zwei Massen-Einheiten, welche sich mit 1  $\frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}}$  Geschwindigkeit bewegen, als Summe der Bewegungsenergien der einzelnen darin enthaltenen Atome  $\frac{1}{2} \cdot 2.9,81 \text{ Kgr. Masse} \cdot \left( \frac{1 \text{ Meter}}{\text{Secunde}} \right)^2$

$$= 1 \text{ Kgr. Masse} \cdot 9,81 \frac{\text{Meter}}{\text{Sec.}^2} \cdot \text{Meter} = 1 \text{ Kgr. Kraft mal 1 Meter} \\ = 1 \text{ Kgrmeter Energie.}$$

Die Bewegungsenergie ist entweder  $= 0$  (nämlich wenn  $v = 0$ ) oder positiv; aber niemals negativ; die Richtung der Geschwindigkeit ist dabei völlig gleichgültig. Die Bewegungsenergie eines Körpers ist die arithmetische Summe der Bewegungsenergien seiner

einzelnen Atome (ausgedrückt in Kgrmetern) ohne Rücksicht auf die etwaige Verschiedenheit in den Richtungen der Geschwindigkeiten der einzelnen Atome.

Denken wir uns jetzt zwei Atome  $A$  und  $B$  mit den augenblicklichen Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  in der Entfernung  $r$  von einander, wobei  $r$  beliebig grösser oder kleiner als die neutrale Entfernung sein kann, und frei von jeder andern Krafteinwirkung nur unterworfen der zwischen ihnen bestehenden Anziehungs- oder Abstossungsspannung. Wenn diese beiden Atome später mit den Geschwindigkeiten  $V_1$  und  $V_2$  zwischen sich die neutrale Entfernung  $N$  erlangen, so wird die Summe ihrer Bewegungsenergien  $\frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2$  den anfänglichen Werth  $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$  um eine gewisse Grösse übertreffen, und diese nennen wir die Spannungsenergie des Vereins der beiden Atome  $A$  und  $B$  bei der Entfernung  $r$  von einander. Dieser Werth wird auch

dargestellt durch das Integral  $\int_{x=r}^{x=N} p dx$ , wenn  $p$  die Inten-

sität der Spannung bei der Entfernung  $x$  zwischen den Atomen so bezeichnet, dass die Abstossungsspannung positiv und die Anziehungsspannung negativ gerechnet wird. Der Werth des Integrals ist desshalb entweder  $= 0$  (wenn nämlich  $r = N$  ist) oder positiv, aber niemals negativ. Die Summe  $\frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2$  ist deshalb entweder  $= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$  (wenn nämlich  $r = N$ ) oder grösser als  $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$ , aber niemals kleiner. Es ist damit aber nicht gesagt, dass auch für das einzelne Atom  $A$  oder  $B$  die spätere Bewegungsenergie  $\frac{1}{2} m V^2$  nicht kleiner als die anfängliche Energie  $\frac{1}{2} m v^2$  sein könne. Die Differenz

$\frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2 - (\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2)$  oder die Summe  $(\frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{1}{2} m v_1^2) + (\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m v_2^2)$  oder das Integral

$\int_{x=r}^{x=N} p dx$  ist immer derselbe Werth, wenn die zwei Atome

ohne fremde Einwirkung aus der anfänglichen Entfernung  $r$  in die neutrale Entfernung  $N$  zu einander gelangen, welches auch die anfänglichen Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  gewesen sein mögen, wie auch die Richtungen von  $r$  und  $N$  sein mögen, und durch welche Zwischenwerthe auch die Entfernung von  $r$  bis  $N$  sich verändern möge, aber der

Werth der einzelnen Summanden  $\frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$  und  $\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m v_2^2$  hängt von den Anfangswerthen  $v_1$  und  $v_2$  ab.

Die Energie  $E$  des Vereins zweier Atome  $A$  und  $B$  bei der Entfernung  $r$  von einander und den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  ist die Summe aus den individuellen Bewegungsenergien  $\frac{1}{2} m v_1^2$  und  $\frac{1}{2} m v_2^2$  der beiden einzelnen Atome und der als Collectivbesitz zu betrachtenden Spannungsenergie  $\int_{x=r}^{x=N} p dx$ , also ist

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \int_{x=r}^{x=N} p dx.$$

Bleiben die zwei Atome frei von jeder fremden Kraft-einwirkung nur ihrer eignen Wechselwirkung überlassen, so bleibt  $E$  constant.

Die Energie  $E$  eines Vereins von beliebig vielen Atomen ist ebenso die Summe aus den individuellen Bewegungsenergien der einzelnen Atome und der Spannungsenergien der sämtlichen aus dem Vereine ableitbaren Atompaare, also ist

$$E = \sum \frac{1}{2} m v^2 + \sum \int_{x=r}^{x=N} p dx.$$

Betrachten wir zwei Körper  $A$  und  $B$  jeden als einen Verein von Atomen, so enthält die Energie  $E$  der Gesamtheit beider Körper drei Theile, nämlich

1) die im Alleinbesitz des Körpers  $A$  befindliche Energie  $E_1$ , welche aus den Bewegungsenergien seiner einzelnen Atome und den Spannungsenergien seiner Atompaare besteht,

2) die im Alleinbesitz des Körpers  $B$  befindliche Energie  $E_2$  von ähnlicher Zusammensetzung,

3) die im Collectivbesitz der Körper  $A$  und  $B$  befindliche Energie  $E_{1,2}$ , welche aus den Spannungsenergien derjenigen Atompaare besteht, wovon das eine Atom zu  $A$  und das andere zu  $B$  gehört, Es ist also  $E = E_1 + E_2 + E_{1,2}$ . So lange nun die beiden Körper fremder Einwirkung entzogen bleiben, so lange wird  $E$  constant bleiben, aber durch die Wechselwirkung der beiden Körper auf einander wird nun in der Summe  $E = E_1 + E_2 + E_{1,2}$  häufig der eine der drei Sum-



manden sich vermindern und einer der zwei andern sich um ebenso viel vermehren, also ein Quantum Energie aus der einen Besitzform in die andere übergehen, während die ganze Summe constant bleibt. Jeder solche Uebergang ist begleitet von mechanischer Arbeit.

§ 23. Arbeit. Effect. Pferdekraft. Die Arbeit einer Kraft von constanter Richtung und Intensität ist das Product aus dieser Intensität und der auf die Krafrichtung ausgeführten Projection vom Wege ihres Angriffspunktes. Die Arbeit, welche 1 Kgr. Kraft verrichtet, wenn die Projection vom Wege ihres Angriffspunktes = 1 Meter in der Richtung der Kraft ist, nennen wir 1 Kilogramm-Meter. Liegt die erwähnte Projection der Krafrichtung entgegengesetzt, so rechnen wir die Arbeit negativ. Wenn die Arbeit von  $P$  durch  $\mathfrak{A}P$  bezeichnet wird, so gelten für Kräfte mit gemeinsamen Angriffspunkt die Sätze

$$\mathfrak{A}(P + Q) = \mathfrak{A}P + \mathfrak{A}Q$$

$$\mathfrak{A}(nP) = n\mathfrak{A}P$$

$$\mathfrak{A}(-P) = -\mathfrak{A}P$$

$$\mathfrak{A}(0) = 0$$

$$\text{ist } R = P + Q$$

$$\text{so ist } \mathfrak{A}R = \mathfrak{A}P + \mathfrak{A}Q.$$

Die Zunahme an Bewegungsenergie, welche bei einem Atom während eines bestimmten Zeitraums stattfindet, ist an Kilogramm Metern gleich der Summe der Arbeiten, welche während dieses Zeitraums die einzelnen an dem Atom wirksamen Kräfte verrichten. Ist diese Summe negativ, so ist die negative Zunahme an Bewegungsenergie eine reale Verminderung.

Die während eines bestimmten Zeitraums stattfindende Abnahme an Spannungsenergie eines Atom-paares ist an Kilogramm Metern gleich der Summe der Arbeiten, welche in diesem Zeitraum die zwei die Spannung bildenden Kräfte verrichten. Ist diese Summe negativ, so ist die negative Abnahme an Spannungsenergie eine reale Zunahme. Jede positive Arbeit einer von  $B$  ausgehenden Kraft an einem Atome  $A$  ist also begleitet von einer Zunahme der Bewegungsenergie des Atomes  $A$ , und einer gleich grossen Abnahme an Spannungsenergie bei dem Atompaare  $AB$ , zwischen

welchen die Spannung stattfindet, wovon die Kraft  $P$  der eine Bestandtheil ist, begleitet also von einem Uebergange von genossenschaftlicher Spannungsenergie in individuelle Bewegungsenergie, und umgekehrt ist jede negative Arbeit begleitet von einem Uebergange von individueller Bewegungsenergie in genossenschaftliche Spannungsenergie. Es liegt daher nahe nur den Uebergang der Energie aus einer Besitzform in die andere zu betrachten, ohne Berücksichtigung der Intensität des Druckes, bei welchem der Uebergang stattfindet, und dann diesen Uebergang selbst Arbeit zu nennen. Die Begriffe Energie und Arbeit sind dann analog den kaufmännischen Begriffen Capital und Zahlung zwischen zwei Associés, wobei deren beide Privateassen und ihre gemeinschaftliche Geschäftscasse in Frage kommen.

Zuweilen gebraucht man das Wort Arbeit als ver- richtet nicht von einer Kraft, sondern von einem Körper (oder Körperverein)  $A$  an einem anderen Körper (oder Körperverein)  $B$ . Alsdann muss die Arbeit von  $A$  an  $B$  positiv (bezw. negativ) gerechnet werden, wenn ein Energiebetrag  $E$  von  $A$  an  $B$  übertragen (bezw. von  $B$  nach  $A$  entnommen) wird.

Die Bewegungen der einzelnen Atome erscheinen entweder messbar in der Bewegung eines ganzen Körpers, oder wir können sie nur in der Form von Wärme, Electricität u. s. w. wahrnehmen. Eine Calorie oder Wärme-Einheit, d. h. diejenige Wärmemenge, welche 1 Kgr. reinen Wassers bei  $1^{\circ}$  Celsius mehr besitzt als bei  $0^{\circ}$ , ist = 424 Kgrmeter Energie, aber nicht = 424 Kgrmeter Arbeit.

Die Schnelligkeit, mit welcher die Energie aus einer Besitzform  $A$  in eine andere  $B$  übergeht, wird bestimmt durch das Verhältniss der in einem Zeitraum übergegangenen Energie zu der Grösse dieses Zeitraums. Dieses Verhältniss heisst Effect. Ein Effect von 75 Kgrmetern pro Secunde heisst eine Pferdekraft.

Alle Maschinen sind nur Vorrichtungen, welche die zu ihrem Betriebe dienende Energie durch sich hindurchgehen lassen, wie eine Röhrenleitung das Wasser. Totaleffect und Nutzeffect einer Maschine sind die Verhältnisse der in einem gewissen Zeitraum für die

Maschine gelieferten, bzw. zu unserm Nutzen wiedergewonnenen Energie zu der Grösse dieses Zeitraums. Effectverlust ist die Differenz zwischen Totaleffect und Nutzeffect, welche dadurch entsteht, dass ein Theil der zur Aufnahme in die Maschine gelieferten Energie entweder gar nicht in die Maschine gelangt, oder dieselbe auf einem für uns nutzlosem Wege verlässt. Wirkungsgrad endlich ist das Verhältniss des Nutzeffectes zum Totaleffect, und desshalb immer ein echter Bruch.

§ 24. Alle Sätze über die Constanz der Energie und den Wechsel ihrer Besitzform beziehen sich auf die absolute Bewegung im unendlichen Raume, und nicht auf die relative Bewegung der Körper gegen unsere Erdkugel. Die Correcturen, welche angebracht werden müssen, um die Gültigkeit der obigen Sätze auch für diese relative Bewegung zu erlangen, sind nur in sehr wenigen Fällen so beträchtlich, dass dieselben nicht vernachlässigt werden könnten. Der Grund hiervon ist die ausserordentliche Langsamkeit der Drehung der Erde um ihre Axe, wobei fast ein ganzer Tag zu einer einzigen Umdrehung erfordert wird.

---

## Zweiter Abschnitt.

### Allgemeine Begriffe und Formeln der Elasticitätstheorie.

§ 25. 1) Die Spannungen. Es ist oben erklärt worden, dass wir unter Spannung zwischen zwei Atomen die Gesamtheit der zwei Druck- oder Zugkräfte verstehen, mit denen diese beiden Atome sich gegenseitig abstossen oder anziehen. Wir denken uns diese Kräfte von sehr kleiner Intensität, sobald die Entfernung zwischen den beiden Atomen eine messbare Grösse erlangt, und stellen daher diese Intensität nur dann in Rechnung, wenn die Anzahl dieser sehr kleinen Kräfte so ausserordentlich gross ist, dass sich aus denselben doch eine messbare Mittelkraft ergibt. So rechnet der Astronom

mit der Mittelkraft aus den einzelnen Anziehungskräften, welche von der Sonne aus Entfernungen von mehr als 20 Millionen Meilen an den Theilen unserer Erdkugel ausgeübt werden. In der Festigkeitslehre beachtet man von der Einwirkung entfernter Atome nur die Mittelkraft aus den Anziehungskräften, mit denen die Atome unserer Erdkugel auf einen beliebigen Körpertheil wirken, das sogenannte Eigengewicht dieses Körpertheils. Im Uebrigen werden bei einem Körpertheil nur die Einwirkungen solcher Atome in Rechnung gebracht, welche sich in nächster Nähe seiner Grenzfläche befinden.

Fig. 62.



Es sei jetzt  $ab$  (Fig. 62) eine beliebige Trennungsfläche zwischen den Atomen eines Körpers  $cd$ . Wir verstehen dann unter Spannung an der Fläche  $ab$  die Gesammtheit der beiden Resultanten  $P$  und  $P'$  aus den Druck- und Gegendruck (bezw.

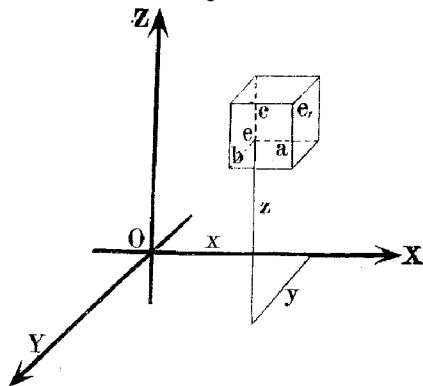
Zug- und Gegenzug-) Kräften, welche zwischen den auf beiden Seiten von  $ab$  aber nahe daran befindlichen Atomen so bestehen, dass die Krafrichtungen durch die Fläche  $ab$  hindurch gehen. Denkt man sich diese Fläche  $ab$  sehr klein, so werden die Krafrichtungen fast direct parallel sein und ihre Resultanten sind zwei entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte, deren übereinstimmende Intensität die Intensität der Spannung an der Fläche  $ab$  genannt wird. Das Verhältniss dieser Intensität zu der Grösse der Fläche  $ab$  heisst die mittlere Schärfe der Spannung an der Fläche  $ab$ . Würden wir  $ab$  in kleine Theile von der Grösse  $f$  theilen, und die mittlere Schärfe der Spannung an einem solchen Theile mit  $p$  bezeichnen, so wäre  $pf$  die Intensität der Spannung an dem Theile  $f$ , demnach  $\Sigma pf$  die Intensität der Spannung an der Fläche  $ab$ .

Wäre nun der Raum des Körpers in der Nähe der Fläche  $ab$  stetig von dem Materiale erfüllt, so würde man eine Grenze dieser mittleren Spannungsschärfe  $p$  so bestimmen können, dass die Grösse  $f$  des Theiles von  $ab$  immer kleiner (oder unendlich klein) genommen würde und dabei ein Punkt  $e$  als Grenze von  $f$  erschiene. Dadurch erhielte man die Schärfe der Spannung im Punkte  $e$  der Fläche  $ab$ . Da wir aber die stetige Raumerfüllung durch das Material nicht annehmen, so kann auch ein

Grenzwert der Spannungsschärfe nicht so bestimmt werden, dass  $f$  unendlich klein wird. Wir verstehen vielmehr unter der Schärfe der Spannung im Punkte  $e$  der Fläche  $ab$  die mittlere Spannungsschärfe an einem sehr kleinen (aber doch nicht unendlich kleinen) Theile  $f$  der Fläche  $ab$ . Die Formel  $\Sigma pf$  für die Spannung an der Fläche  $ab$  bleibt also ein endliches Integral. Dennoch wird der Fehler völlig vernachlässigt werden können, wenn man diesen Werth wie eine Summe unendlich kleiner Theile berechnet und deshalb auch  $p$  wie einen Differentialquotienten behandelt.

§ 26. Die Richtung der Spannungsschärfe  $p$  im Punkte  $e$  der Fläche  $ab$  wird nur ausnahmsweise normal zu der Fläche  $ab$  sein. Legt man durch den Punkt  $e$  eine zweite Fläche  $gh$ , so erhält man für die Schärfe der Spannung im Punkte  $e$  einen andern Werth. Wir wollen nun untersuchen nach welchem Gesetze die Spannungsschärfe von einer Fläche zu andern sich ändert, und betrachten zu dem Behufe in Fig. 63 einen sehr

Fig. 63.

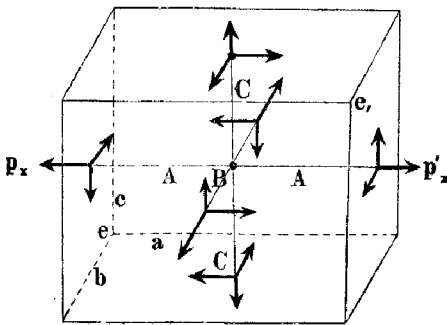


kleinen prismatischen Körpertheil mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , während  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Coordinaten des Eckpunktes  $e$  sind. Die Dichtigkeit desselben sei  $\rho$ . Wir denken uns  $a$ ,  $b$ ,  $c$  klein genug, um ihre Producte und höheren Potenzen gegen die ersten Potenzen vernachlässigen,

sowie die Masse  $pabc$  innerhalb des Prisma's als gleichförmig vertheilt ansehen zu können, woraus sich die Schwerpunktslage in der geometrischen Mitte ergibt. Ferner bezeichnen wir für die drei in  $e$  zusammenstehenden Flächen die Schärfe der (im Allgemeinen schief gegen die Fläche gerichteten) Spannung bezw. mit  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ,

dagegen für die in  $e$ , zusammenstehenden Flächen und zwar für die Endpunkte von  $a, b, c$  bzw. mit  $p'_x, p'_y, p'_z$ , wobei der als Index stehende Buchstabe die Coordinatenaxe andeutet, zu welcher die Fläche normal ist. Diesen Spannungsschärfen entsprechen die auf die Flächen des Prisma's wirkenden Kräfte  $p_x bc, p_y ac, p_z ab$  und  $p'_x bc, p'_y ac, p'_z ab$ . Bei hinreichender Kleinheit von  $a, b, c$  dürfen wir uns erlauben auch diese Kräfte über die betreffenden Flächen als gleichförmig vertheilt anzusehen, so dass sie durch Mittelkräfte ersetzt werden können, deren Angriffspunkte die geometrischen Mittelpunkte dieser Flächen sind. Jede dieser sechs Kräfte zerlegen wir in ihre Componenten parallel zu den drei Coordinatenaxen  $X, Y, Z$  und nennen diese  $p_{xx} bc, p_{xy} bc, p_{xz} bc$  u. s. w., so dass überall der als zweiter Index stehende Buchstabe die Axe bezeichnet, nach welcher der Schub

Fig. 64.



der Kraft gemeint ist. Wie man in Fig. 64 erkennt, nehmen wir die Zugspannung als positiv und die Druckspannung als negativ an. Bezeichnen wir nun noch die drei Axen-

Componenten der auf die Einheit der Masse aus grösserer Entfernung wirkenden Kraft (d. h. der Schwerkraft) mit  $q_x, q_y, q_z$ , die Componenten der ganzen Kraft also mit  $q_x pabc, q_y pabc$  und  $q_z pabc$ , ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes mit  $v$  und ihre Componenten mit  $v_x, v_y, v_z$ , die Componenten der Beschleunigung also mit  $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}$ , so haben wir für die Kräfte parallel zur Axe  $X$



Die Zähler dieser Brüche müssen also kleine Werthe von derselben Ordnung wie ihre Nenner  $a, b, c$  sein.

Durch den Schwerpunkt des Prismas  $ee_1$  denken wir uns drei Axen  $A, B, C$  parallel zu den Coordinatenaxen  $X, Y, Z$ . Die Trägheitsmomente des Prismas in Bezug auf die Axen  $A, B, C$  mögen ebenfalls mit diesen Buchstaben bezeichnet werden und haben die Werthe

$$A = \frac{1}{12} \rho abc (b^2 + c^2)$$

$$B = \frac{1}{12} \rho abc (a^2 + c^2)$$

$$C = \frac{1}{12} \rho abc (a^2 + b^2)$$

$$\text{Auch ist } C - B = \frac{1}{12} \rho abc (b^2 - c^2).$$

Hätte nun das Prisma  $ee_1$  eine drehende Bewegung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe mit der Winkelgeschwindigkeit  $w$ , so könnte man diese als die Summe von drei Drehungen um die Axen  $A, B, C$  ansehen, zu denen die Winkelgeschwindigkeiten  $w_x, w_y, w_z$  und die Winkelbeschleunigungen  $\frac{dw_x}{dt}, \frac{dw_y}{dt}, \frac{dw_z}{dt}$  gehören würden. Da nun  $A, B, C$  Hauptaxen des Prismas  $ee_1$  sind, so besteht die der Drehung entsprechende Bewegungsgrösse aus drei zu diesen Axen normalen Kräftepaaren oder Momenten  $Aw_x, Bw_y, Cw_z$ . In der Zeit  $dt$  beträgt die Vermehrung des Momentes in Bezug auf die Axe  $A$

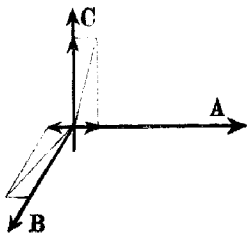
1) durch Vermehrung der Winkelgeschwindigkeit  $w_x$  die Grösse  $Adw_x$ ;

2) durch Drehung von  $Cw_z$  um die Axe  $B$  durch den Arcus  $w_y dt$  die Grösse  $Cw_z w_y dt$ ;

3) durch Drehung von  $Bw_y$  um die Axe  $C$  durch den Arcus  $w_z dt$  die Grösse  $-Bw_y w_z dt$ . Die ganze Vermehrung beträgt also  $Adw_x + Cw_y w_z dt - Bw_y w_z dt$   

$$= \left\{ A \frac{dw_x}{dt} + (C - B) w_y w_z \right\} dt$$
 und diese muss gleich dem Momente des in der Zeit  $dt$  durch die an dem Prisma  $ee_1$  wirkenden Kräfte geschehenden Antriebes sein, oder, da Antrieb

Fig. 55.



ken, so  
Brüche  
würden  
hungen

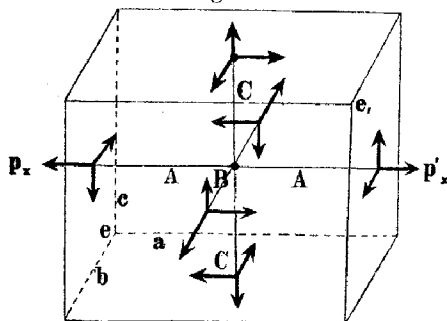
a Seiten  
s daher  
müssen.



= Kraft mal Zeit ist, so muss  $A \frac{dw_x}{dt} + (C-B) w_x w_z$  gleich dem auf die Axe  $A$  bezogenem Momente der an dem Prisma wirkenden Kräfte sein. Von diesen Kräften sind es aber nur vier, deren Richtungen mit der Axe  $A$  nicht in einer Ebene liegen, also überhaupt ein Moment in Bezug auf  $A$  verschieden von 0 besitzen, und deren Momentensumme ist

$$\begin{aligned} & p'_{yz} ac \frac{b}{2} p_{yz} + ac \frac{b}{2} - p'_{xy} ab \frac{c}{2} - p_{xy} ab \frac{c}{2} \\ &= \left\{ \frac{p'_{yz} + p_{yz}}{2} - \frac{p'_{xy} + p_{xy}}{2} \right\} abc. \end{aligned}$$

Fig. 66.



Da aber  $\frac{p'_{yz} - p_{yz}}{b}$  und  $\frac{p'_{xy} - p_{xy}}{c}$  endliche Werthe sind, die man mit  $h$  und  $k$  bezeichnen kann, so ist  $p'_{yz} - p_{yz} = hb$  und  $p'_{xy} - p_{xy} = kc$  oder  $p'_{yz} = p_{yz} + hb$  und  $p'_{xy} = p_{xy} + kc$ , und folglich ist

$$\frac{p'_{yz} + p_{yz}}{2} = p_{yz} + \frac{1}{2} hb \text{ und } \frac{p'_{xy} + p_{xy}}{2} = p_{xy} + \frac{1}{2} kc,$$

die obige Momentensumme wird also

$$[(p_{yz} + \frac{1}{2} hb) - (p_{xy} + \frac{1}{2} kc)] abc = (p_{yz} - p_{xy} + \frac{1}{2} hb - \frac{1}{2} kc) abc,$$

dies führt zu der Gleichung

$$(p_{yz} - p_{xy} + \frac{1}{2} hb - \frac{1}{2} kc) abc = A \frac{dw_x}{dt} + (C - B) w_y w_z$$

$$= \frac{1}{12} \rho abc (b^2 + c^2) \frac{dw}{dt} + \frac{1}{12} \rho abc (b^2 - c^2) w_y w_z,$$

oder, wenn man mit  $abc$  dividirt,

$$p_{yz} - p_{xy} + \frac{1}{2} hb - \frac{1}{2} kc = \frac{1}{12} \rho \left\{ (b^2 + c^2) \frac{dw}{dt} + (b^2 - c^2) w_y w_z \right\}.$$

Werden jetzt  $a, b, c$  sehr klein genommen, so wird die rechte Seite der Gleichung klein zweiter Ordnung und es muss dies daher auch von der linken Seite der Gleichung, namentlich von der Differenz  $p_{yz} - p_{zy}$  gelten, oder wenn in einer Rechnung die Quadrate  $a^2, b^2, c^2$  und die Producte  $ab, ac, bc$  gegen die ersten Potenzen  $a, b, c$  vernachlässigt werden, so kann man auch den Unterschied von  $p_{yz}$  und  $p_{zy}$  vernachlässigen, oder  $p_{yz} = p_{zy}$  setzen.

Man sieht, dass diese Gleichung  $p_{yz} = p_{zy}$  weder durch das Vorhandensein der Schwerpunktschwindigkeit  $v$ , noch der Winkelgeschwindigkeit  $w$ , noch deren Beschleunigungen, noch endlich der aus grösserer Entfernung wirkenden Kraft  $q$  (Schwerkraft) beeinträchtigt wird.

Stellt man dieselbe Betrachtung für die Axen  $B$  und  $C$  an, so hat man die drei Gleichungen

$$p_{yz} = p_{zy}, p_{zx} = p_{xz}, p_{xy} = p_{yx},$$

und diese sind nur besondere Fälle von dem allgemeineren Satze, welcher lautet: Projicirt man für jede von zwei sich schneidenden Flächen die Schärfe der Spannung in einem ihrer Durchschnittspunkte auf die Normale der andern Fläche, so sind die Projectionen von gleicher Intensität (aber natürlich verschiedener Richtung.)

Es werde jetzt eine Ebene  $F$  durch die Endpunkte  $g, h, i$  von  $a, b, c$  gelegt, und die Fläche des Dreieckes  $ghi$  sei  $= f$ ; ferner seien  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel, welche die Normale zu  $F$  mit den Richtungen von  $a, b, c$  bildet.

Dann ist

$$\triangle ehi = \frac{1}{2} bc = f \cos \alpha$$

$$\triangle eig = \frac{1}{2} ac = f \cos \beta$$

$$\triangle egh = \frac{1}{2} ab = f \cos \gamma$$

Auf diese Dreiecke wirken die Kräfte

$$p_x \cdot \frac{1}{2} bc = p_x f \cos \alpha$$

$$p_y \cdot \frac{1}{2} ac = p_y f \cos \beta$$

$$p_z \cdot \frac{1}{2} ab = p_z f \cos \gamma$$

und liefern Componenten

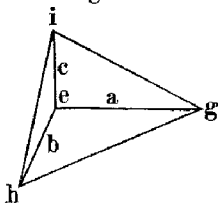


Fig. 67.

, die  
=hb  
+kc,

c)abc,

w, w,

w, w,



welche von dem gemeinsamen Punkte  $c$  der betrachteten Flächen ausgehen. Die Endpunkte dieser Linien werden eine krumme Fläche bilden, die wir auf ein (im Allgemeinen schiefwinkliges) Coordinatensystem beziehen, dessen Axen  $X' Y' Z'$  heissen und die Richtungen von  $p_x, p_y$  und  $p_z$  haben; dabei seien  $A, B, C$  die darstellenden Linien für  $p_x, p_y, p_z$ . Da nun  $p_n$  die Mittelkraft aus den drei Kräften  $p_x \cos \alpha, p_y \cos \beta$  und  $p_z \cos \gamma$  ist, so folgt, dass die Coordinaten  $x', y', z'$  der Endpunkte der erwähnten Linien, welche  $p_n$  darstellen, diese Werthe  $p_x \cos \alpha, p_y \cos \beta, p_z \cos \gamma$  ihrerseits darstellen müssen, oder dass

$x' = A \cos \alpha, y' = B \cos \beta, z' = C \cos \gamma$  sein muss,

woraus folgt  $\cos \alpha = \frac{x'}{A}, \cos \beta = \frac{y'}{B}, \cos \gamma = \frac{z'}{C},$

und da  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  ist, so muss

$$\left\{ \frac{x'}{A} \right\}^2 + \left\{ \frac{y'}{B} \right\}^2 + \left\{ \frac{z'}{C} \right\}^2 = 1$$

die Gleichung der gesuchten Oberfläche sein. Diese Fläche ist demnach ein Ellipsoid, welche wir das Spannungsellipsoid nennen wollen und  $A, B, C$  sind conjugirte Halbmesser desselben. Die Einführung dieser Fläche verdankt man Lamé.

Hätte man für die ursprünglichen auf einander rechtwinkligen Axen  $X, Y, Z$  drei andere, ebenfalls auf einander rechtwinklige Axen genommen, so würde man drei andere Werthe für  $p_x, p_y, p_z$  und desshalb drei andere Werthe für  $A, B, C$  erhalten haben, welche drei andere aber ebenfalls unter sich conjugirte Halbmesser desselben Ellipsoides gewesen wären, und da aus der Geometrie bekannt, dass es für jedes Ellipsoid wenigstens ein System von auf einander rechtwinkligen conjugirten Durchmessern giebt und dass diese Axen des Ellipsoides sind, so wollen wir die Spannungen in den Richtungen dieser Axen die Hauptspannungen nennen. Sind  $p_x, p_y, p_z$  die Schärfe der drei Hauptspannungen, so ist jede andere Spannungsschärfe  $p_n$  wie immer die Mittelkraft aus  $p_x \cos \alpha, p_y \cos \beta, p_z \cos \gamma$ , und da dann diese Kräfte zugleich die Richtungen der Coordinatenaxen  $X, Y, Z$  haben, so bilden sie mit der Normale der zu  $p_n$

gehörenden Fläche ebenfalls die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , und folglich ist für  $p_n$  die Normalcomponente

$$p_{nn} = p_x \cos \alpha^2 + p_y \cos \beta^2 + p_z \cos \gamma^2.$$

Dem entsprechend ist die Tangentialcomponente

$$p_{nt} = \sqrt{p_n^2 - p_{nn}^2}, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(p_x \cos \alpha)^2 + (p_y \cos \beta)^2 + (p_z \cos \gamma)^2 - (p_x \cos \alpha^2 + p_y \cos \beta^2 + p_z \cos \gamma^2)^2}$$

Suchen wir nach dieser Formel die Tangentialcomponente für die Schärfe einer der Hauptspannungen, selbst, z. B. für  $p_x$ , so ist  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 90^\circ$  zu setzen und es wird dann die Tangentialcomponente  $= \sqrt{p_n^2 - p_n^2} = 0$ , d. h. die Hauptspannungen stehen normal auf den zugehörigen Flächen.

Für drei beliebige Flächen, deren Normalen die Richtungswinkel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  gegen die Richtungen der Hauptspannungen besitzen, wird die Summe der Normalcomponenten ihrer Spannungsschärfen

$$= p_x (\cos \alpha_1^2 + \cos \alpha_2^2 + \cos \alpha_3^2) + p_y (\cos \beta_1^2 + \cos \beta_2^2 + \cos \beta_3^2) + p_z (\cos \gamma_1^2 + \cos \gamma_2^2 + \cos \gamma_3^2).$$

Stehen nun die drei Flächen normal zu einander, so wird innerhalb jeder Klammer die Summe der Cosinusquadrate  $= 1$ , und folglich ist die betrachtete Summe der Normalcomponenten  $= p_x + p_y + p_z$  also unabhängig von den Stellungswinkeln der drei Flächen.

Um nun die Stellung der Ebene, zu welcher die Spannung  $p_n$  gehört, deutlich zu machen, müssen wir noch eine zweite Fläche betrachten. Die Richtungen der Hauptspannungen seien zugleich die Coordinatenachsen. Da nun  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$  die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebene ist, deren Normale die Richtungswinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  besitzt, da ferner die Gleichung  $(x-a) \frac{df}{dx} + (y-b) \frac{df}{dy} + (z-c) \frac{df}{dz} = 0$ , zur Tangentialebene für einen Punkt mit den Coordinaten  $a, b, c$  einer beliebigen krummen Oberfläche mit der Gleichung  $f(x, y, z) = 0$  gehört, und dies auf eine Fläche mit der Gleichung  $\frac{x^2}{KA} + \frac{y^2}{KB} + \frac{z^2}{KC} = 1$  angewandt, die Gleichung

$$\frac{a(x-a)}{KA} + \frac{b(y-b)}{KB} + \frac{c(z-c)}{KC} \text{ oder } \frac{xa}{KA} + \frac{yb}{KB} + \frac{zc}{KC} = 1$$

für die Tangentialebene ergibt, so ist  $\frac{xa}{KA} + \frac{yb}{KB} + \frac{zc}{KC} = 0$  die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebene, welche zu dieser Tangentialebene parallel ist, und diese Gleichung stimmt dann mit der obigen Gleichung  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$  überein, wenn  $\cos \alpha = \frac{a}{KA}$ ,  $\cos \beta = \frac{b}{KB}$ ,  $\cos \gamma = \frac{c}{KC}$  ist, oder wenn  $A \cos \alpha = \frac{a}{K}$ ,  $B \cos \beta = \frac{b}{K}$ ,  $C \cos \gamma = \frac{c}{K}$  ist, d. h. wenn die Coordinaten  $a, b, c$  sich zu einander verhalten, wie die Linien, welche die Axencomponenten der Spannungsschärfe  $p_n$  darstellen, oder Punkt  $a, b, c$  ist der Durchschnittspunkt der Richtung von  $p_n$  mit der Fläche, deren Gleichung  $\frac{x^2}{KA} + \frac{y^2}{KB} + \frac{z^2}{KC} = 1$  ist, und die zu  $p_n$  gehörende Ebene ist parallel mit der Tangentialebene dieser krummen Fläche in dem erwähnten Durchschnittspunkte. Aus diesem Grunde nennen wir die Fläche mit der Gleichung  $\frac{x^2}{KA} + \frac{y^2}{KB} + \frac{z^2}{KC} = 1$  die Stellungsfläche der Spannungen.

Der Werth von  $K$  kann hier beliebig genommen werden. Sind die drei Hauptspannungen Zugspannungen und daher positiv, so sind auch  $A, B, C$  positiv, und man kann dann  $K=1$  nehmen. Die Stellungsfläche erhält die Gleichung  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$  und ist folglich ein Ellipsoid. Sind die drei Hauptspannungen sämtlich Druckspannungen und daher negativ, so sind auch  $A, B, C$  negativ und wird dann  $K = -1$  genommen, so erhält die Stellungsfläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{-A} + \frac{y^2}{-B} + \frac{z^2}{-C} = 1$$

und ist daher ebenfalls ein Ellipsoid. Sind dagegen unter den drei Hauptspannungen zwei Zug- und eine Druckspannung, so dass z. B.  $A$  und  $B$  positiv sind, während  $C$  negativ ist, wobei  $-C_1$  für  $C$  gesetzt werden kann, und setzt man dann  $K=1$ , so ist die Gleichung der Stellungsfläche  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{z^2}{C_1} = 1$ , und die Fläche selbst ein einschaliges Hyperboloid. Setzt man

dagegen  $K = -1$ , so wird die Gleichung der Stellungsfläche  $\frac{x^2}{-A} + \frac{y^2}{-B} + \frac{z^2}{C_1} = 1$  oder  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{z^2}{C_1} = -1$ , und die Fläche selbst ist ein zweischaliges Hyperboloid. Diese beiden Hyperboloide sind conjugirt, sie besitzen einen gemeinsamen Asymptotenkegel mit der Gleichung  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{z^2}{C} = 0$ , und ihre Gesamtheit bildet erst die Stellungsfläche. Sind endlich unter den drei Hauptspannungen zwei Druckspannungen und nur eine Zugspannung, so dass z. B.  $A$  und  $B$  negativ sind, während  $C$  positiv ist, so sei  $A = -A_1$  und  $B = -B_1$ ; setzt man dann  $K$  zuerst  $= -1$  und dann  $= 1$ , so wird man  $\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - \frac{z^2}{C} = 1$  und  $\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - \frac{z^2}{C} = -1$  als die Gleichungen für die beiden Theile der Stellungsfläche erhalten. Diese Fläche wird also wieder durch die Gesamtheit von zwei conjugirten Hyperboloiden mit gemeinsamem Asymptotenkegel gebildet.

Wie eben die Schärfe  $p_n$  der ganzen Spannung untersucht wurde, so können wir auch die Normal- und Tangentialcomponenten  $p_{nn}$  und  $p_{nt}$  in ähnlicher Weise betrachten. Bezeichnen wieder  $p_x, p_y, p_z$  die Schärfen der drei Hauptspannungen, so war die Normalcomponente  $p_{nn} = p_x \cos \alpha^2 + p_y \cos \beta^2 + p_z \cos \gamma^2$ . Es mögen nun die Längen  $A, B, C, R$  sich verhalten, wie die  $p_x, p_y, p_z$ ,  $p_{nn}$ , trägt man dann in der Richtung der Normale eine Länge  $r$  auf, so dass  $x, y, z$  die Coordinaten des Endpunktes von  $r$  sind, so ist

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r},$$

und daher

$$p_{nn} = p_x \left\{ \frac{x}{r} \right\}^2 + p_y \left\{ \frac{y}{r} \right\}^2 + p_z \left\{ \frac{z}{r} \right\}^2 \text{ oder}$$

$$p_{nn} r^2 = p_x x^2 + p_y y^2 + p_z z^2$$

$$\text{und } R r^2 = A x^2 + B y^2 + C z^2.$$

Wird jetzt die Länge  $r$  so gewählt, dass für jeden Werth von  $p_{nn}$  und  $R$  das Product  $R r^2 = K^3$  gleich dem Cubus einer constanten Länge  $K$  wird, und bestimmt man auch für die Hauptspannungen entsprechende Längen  $a, b, c$  so dass  $A a^2 = B b^2 = C c^2 = K^3$ , so wird

$$K^3 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 = Aa^2 \frac{x^2}{a^2} + Bb^2 \frac{y^2}{b^2} + Cc^2 \frac{z^2}{c^2}$$

$$= K^3 \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\} \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung eines neuen Ellipsoides, dessen Radien

$$r = \sqrt{\frac{K^3}{R}} = \sqrt{\frac{Aa^2}{R}} = a \sqrt{\frac{A}{R}} = a \sqrt{\frac{p_x}{p_{nn}}}$$

den Quadratwurzeln der Normal-Componente  $p_{nn}$  der Spannung umgekehrt proportional sind.

Sind die betrachteten Spannungen sämmtlich Zug, oder sämmtlich Druck, so sind  $a^2, b^2, c^2$  sämmtlich positiv und es kann dann kein Werth von  $r$  unendlich und deshalb kein Werth der Normalspannung  $= 0$  werden. Sind dagegen einige Spannungen Druck und andere Zug, so geht die obige Gleichung in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ oder } -1$$

über, und man hat anstatt des Ellipsoides wieder die Gesammtheit von zwei Hyperboloiden. Die Radien  $r$ , welche dabei in die Mantelfläche des gemeinsamen Asymptotenkegels fallen, sind unendlich gross, und für die auf ihnen normal stehenden Flächen ist die Normal-componente  $p_{nn}$  der Spannungsschärfe  $= 0$ , so dass die Richtung der Spannung tangentiell ist.

Für die Tangentialcomponente  $p_{nt}$  von  $p_n$  haben wir

$$p_{nt}^2 = p_n^2 - p_{nn}^2 = (p_x^2 \cos^2 \alpha + p_y^2 \cos^2 \beta + p_z^2 \cos^2 \gamma) - (p_x \cos \alpha + p_y \cos \beta + p_z \cos \gamma)^2$$

oder

$$p_{nt}^2 = p_x^2 \cos^2 \alpha + p_y^2 \cos^2 \beta + p_z^2 \cos^2 \gamma - (p_x^2 \cos^4 \alpha + p_y^2 \cos^4 \beta + p_z^2 \cos^4 \gamma$$

$$+ 2p_x p_y \cos \alpha \cos \beta + 2p_x p_z \cos \alpha \cos \gamma + 2p_y p_z \cos \beta \cos \gamma)$$

$$= p_x^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + p_y^2 \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) + p_z^2 \cos^2 \gamma (1 - \cos^2 \gamma)$$

$$- 2p_x p_y \cos \alpha \cos \beta - 2p_x p_z \cos \alpha \cos \gamma - 2p_y p_z \cos \beta \cos \gamma.$$

Beachtet man, dass

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

so kann man setzen

$$p_{nt}^2 = p_x^2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + p_y^2 \cos^2 \beta (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + p_z^2 \cos^2 \gamma (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)$$

$$- 2p_x p_y \cos \alpha \cos \beta - 2p_x p_z \cos \alpha \cos \gamma - 2p_y p_z \cos \beta \cos \gamma$$



oder

$$p_{nt}^2 = (p_x - p_y)^2 \cos \alpha^2 \cos \beta^2 + (p_y - p_z)^2 \cos \beta^2 \cos \gamma^2 + (p_z - p_x)^2 \cos \alpha^2 \cos \gamma^2.$$

Für die Ebenen, welche die Axe  $Z$  enthalten, liegt die Normale in der Ebene der Axen  $X$  und  $Y$ , und ist  $\gamma = 90^\circ$ ;  $\cos \beta^2 = \sin \alpha^2$ , und folglich

$$p_{nt}^2 = (p_x - p_y)^2 \cos \alpha^2 \sin \alpha^2 = \left\{ (p_x - p_y) \cos \alpha \sin \alpha \right\}^2 = \left\{ (p_x - p_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} \right\}^2.$$

Es wird hier die Tangentialkomponente der Spannungsschärfe am grössten, wenn  $(\sin 2\alpha)^2 = 1$ , also  $\sin 2\alpha = 1$  oder  $-1$ , also  $2\alpha = 90^\circ$  oder  $270^\circ$ , also  $\alpha = 45^\circ$  oder  $90^\circ + 45^\circ$ , d. h. für die beiden Ebenen, welche die Winkel zwischen den Axen  $X$  und  $Y$  halbiren. Das Entsprechende gilt für die Ebenen, welche die Axen  $Y$  und  $X$  enthalten, bei denen bezw.  $\beta = 90^\circ$  oder  $\alpha = 90^\circ$  ist. Wir erhalten dadurch sechs Ebenen, in denen die Tangentialkomponente (oder die sogenannte Schubspannung) grösser ist als für die andern Ebenen, welche eine der Axen enthalten.

Diese sechs Ebenen sind überhaupt diejenigen, für welche die Tangentialkomponente der Spannungsschärfe unter allen Ebenen den grössten Werth hat und für dieselben ist also

1) für die zwei Ebenen, welche die Axe  $Z$  enthalten und die Winkel zwischen  $X$  und  $Y$  halbiren,

$$p_{nt}^2 = \left\{ \frac{p_x - p_y}{2} \right\}^2 \text{ und } p_{nt} = \pm \frac{p_x - p_y}{2};$$

2) für die zwei Ebenen, welche die Axe  $Y$  enthalten und die Winkel zwischen  $X$  und  $Z$  halbiren,

$$p_{nt}^2 = \left\{ \frac{p_z - p_x}{2} \right\}^2 \text{ und } p_{nt} = \pm \frac{p_z - p_x}{2};$$

3) für die zwei Ebenen, welche die Axe  $X$  enthalten und die Winkel zwischen  $Y$  und  $Z$  halbiren,

$$p_{nt}^2 = \left\{ \frac{p_y - p_z}{2} \right\}^2 \text{ und } p_{nt} = \pm \frac{p_y - p_z}{2}.$$

Besondere Fälle. Haben zwei von den Hauptspannungen dieselbe Schärfe, ist z. B.  $p_x = p_y$ , so ist in der Gleichung des Spannungsellipsoides  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$

auch  $A = B$ , und die neue Gleichung  $\frac{x^2+y^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$  gehört zu einem Umdrehungsellipsoide. Die Stellungsfläche erhält eine der Gleichungen

$$\frac{x^2+y^2}{A} + \frac{z^2}{C} = 1 \text{ oder } \frac{x^2+y^2}{A} - \frac{z^2}{C_1} = \pm 1,$$

und ist also ebenfalls eine Umdrehungsfläche. Haben alle drei Hauptspannungen dieselbe Schärfe und dasselbe Vorzeichen ist also  $p_x = p_y = p_z$ , so ist auch  $A=B=C$ . Die Spannungsfläche erhält die Gleichung  $\frac{x^2+y^2+z^2}{A^2} = 1$  oder  $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$ , und ist also eine Kugel-  
fläche mit gleichen Radien, und folglich ist auch die Schärfe der Spannung in diesem Falle nach allen Richtungen gleich gross. Die Stellungsfläche erhält die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{A} = 1 \text{ oder } x^2 + y^2 + z^2 = A, \text{ und ist also}$$

ebenfalls eine Kugelfläche, und da bei einer solchen die Tangentialebenen normal zu den Radien ihrer Berührungspunkte stehen, so sind hier sämtliche Spannungen normal auf den Ebenen, zu denen sie gehören.

Ist eine der Hauptspannungen = 0, also auch ihre Schärfe = 0, z. B.  $p_z = 0$ , so wird aus der allgemeinen Formel

$$p_n^2 = (p_x \cos \alpha)^2 + (p_y \cos \beta)^2 + (p_z \cos \gamma)^2$$

$$\text{hier } p_n^2 = (p_x \cos \alpha)^2 + (p_y \cos \beta)^2$$

Hinsichtlich des Winkels  $c$ , welchen die Richtung von  $p_n$  mit der Axe  $Z$  bildet, ist allgemein

$$\cos c = \frac{p_z \cos \gamma}{\sqrt{(p_x \cos \alpha)^2 + (p_y \cos \beta)^2 + p_z^2 \cos^2 \gamma}}$$

und hieraus wird jetzt

$\cos c = 0$ , also  $c = 90^\circ$ , oder die Spannungen  $p_x$  liegen in der Ebene der Axen  $X$  und  $Y$ . Construiert man wieder Radien  $R$  in den Richtungen von  $p_n$ , deren Längen den Werthen von  $p_x$  proportional sind, so dass  $A$  für  $p_x$  und  $B$  für  $p_y$  angenommen wird, und nennt man  $x$  und  $y$  die Coordinaten des Endpunktes eines Radius  $R$ , so werden  $x$  und  $y$  proportional den Axencomponenten  $p_{nx}$  und  $p_{ny}$  von  $p_n$ , und da  $p_{nx} = p_x \cos \alpha$ ;  $p_{ny} = p_y \cos \beta$ ,

$$\text{also } 1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$

$$= \left\{ \frac{p_{nx}}{p_x} \right\}^2 + \left\{ \frac{p_{ny}}{p_y} \right\}^2 = \left\{ \frac{x}{A} \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{B} \right\}^2 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

so liegen die Endpunkte dieser Radien in einer Ellipse, welche die Spannungsellipse genannt wird, und im Falle der Gleichheit der beiden Hauptspannungen in einen Kreis übergeht und damit die Gleichheit aller Spannungen ausdrückt. Anstatt der Stellungsfläche des allgemeinen Falles erhält man eine Stellungslinie, welche, wenn beide Hauptspannungen gleichartig sind, ebenfalls eine Ellipse ist mit der Gleichung  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ , welche im Falle gleicher Hauptspannungen ebenfalls in einen Kreis übergeht, und damit anzeigt, dass alle Spannungen normal zu den zugehörigen Ebenen stehen, d. h. wenn diese Ebenen die Axe Z enthalten. Sind die beiden Hauptspannungen ungleichartig (die eine Druck, die andere Zug), so erhält die Stellungslinie die Gleichung  $\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B_1} = \pm 1$ , und ist also die Gesamtheit von zwei conjugirten Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten. Die Spannungen in den Richtungen der Asymptoten liegen tangential oder es sind Schubspannungen.

Sind zwei von den Hauptspannungen = 0, so ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung

$$p_n^2 = (p_x \cos \alpha)^2 + (p_y \cos \beta)^2 + (p_z \cos \gamma)^2,$$

wenn darin  $p_x = 0$  und  $p_y = 0$  gesetzt wird, dass

$$p_n = p_z \cos \gamma,$$

und hinsichtlich des Winkels  $c$  zwischen der Spannungsrichtung und der Axe Z ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung

$$\cos c = \frac{p_z \cos \gamma}{\sqrt{(p_x \cos \alpha)^2 + (p_y \cos \beta)^2 + (p_z \cos \gamma)^2}}$$

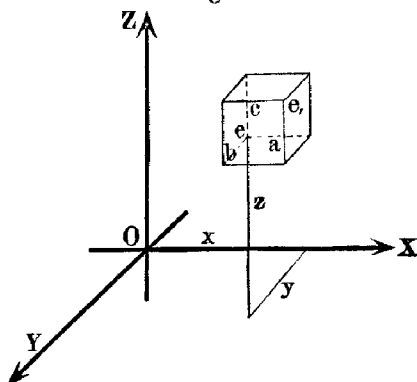
hier  $\cos c = 1$ , also  $c = 0$ , oder alle Spannungen haben die Richtung der Axe Z. Die Normalcomponente von  $p_n$  ist  $p_{nn} = p_z \cos^2 \gamma$  und wird am grössten, wenn  $\gamma = 0$ , also in der Axe Z.

Die Tangentialkomponente von  $p_n$  ist  $p_{nt}$   
 $= \sqrt{p_n^2 - p_{nn}^2} = \sqrt{(p_z \cos \gamma)^2 - (p_z \cos^2 \gamma)^2} = p_z \cos \gamma \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$   
 $= p_z \cos \gamma \sin \gamma = \frac{1}{2} p_z \sin 2\gamma$ , und wird also am grössten,  
 wenn  $2\gamma = 90^\circ$  oder  $\gamma = 45^\circ$ , oder für alle Seitenlinien  
 einer Kegelfläche, dessen Axe  $Z$  ist, und dessen Seiten  
 von  $Z$  um  $45^\circ$  abweichen.

Die grösste Spannungsschärfe  $p_n$  ist hier  $= p_z$ ; die  
 grösste Normalkomponente ist ebenfalls  $p_z$ , und die  
 grösste Tangentialkomponente ist  $= \frac{1}{2} p_z$ .

## II. Die Formänderungen.

§ 27. Betrachten wir wieder in Fig. 68 ein kleines  
 Fig. 68. Prisma mit den



Kantenlängen  
 $a, b, c$  parallel  
 zu den Coordi-  
 natenachsen und  
 denken uns das-  
 selbe so veränd-  
 ert (oder deform-  
 irt) dass die  
 Kanten die Län-  
 gen  $a', b', c'$  er-  
 halten, während  
 dieselben jedoch  
 ihre Richtungen  
 beibehalten, so  
 sagen wir das  
 Prisma habe nach

jeder seiner drei Hauptrichtungen eine Dehnung erfahren.  
 Als Schärfe der Dehnung gelten bezw. die Verhält-  
 nisse  $a':a, b':b, c':c$ , welche wir mit  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$  be-  
 zeichnen, so dass  $a' = \mu_1 a, b' = \mu_2 b, c' = \mu_3 c$  ist. Es ist  
 klar, dass diese Dehnung eine Verlängerung der  
 Verkürzung ist, je nachdem die Schärfe der Dehnung  
 grösser oder kleiner als 1 ist. Die Verhältnisse der  
 Differenzen zwischen den neuen Kantenlängen und den  
 entsprechenden ursprünglichen Längen zu diesen letzteren  
 heissen die Dilatationen und sollen mit  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  be-  
 zeichnet werden. Demnach ist

$$\begin{aligned} (a' - a) : a &= \delta_x & \text{und } a' - a &= \delta_x a & \text{also } a' &= (1 + \delta_x) a \\ (b' - b) : b &= \delta_y & b' - b &= \delta_y b & b' &= (1 + \delta_y) b \\ (c' - c) : c &= \delta_z & c' - c &= \delta_z c & c' &= (1 + \delta_z) c. \end{aligned}$$

Man sieht also, dass  $\mu_1 = 1 + \delta_x$ ,  $\mu_2 = 1 + \delta_y$ ,  $\mu_3 = 1 + \delta_z$  ist.

Das Volumen des Prismas nach der Deformation ist  $(\mu_1 a)(\mu_2 b)(\mu_3 c) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 abc$ , die Volumänderung ist  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 abc - abc = (\mu_1 \mu_2 \mu_3 - 1) abc$  und also ist  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 - 1$  deren Verhältniss zu der ursprünglichen Volumgrösse  $abc$ . Dieser Werth wird die räumliche Dilatation genannt und mit  $\theta$  bezeichnet. Es ist also auch

$$\theta = \mu_1 \mu_2 \mu_3 - 1 = (1 + \delta_x)(1 + \delta_y)(1 + \delta_z) - 1 = \delta_x + \delta_y + \delta_z + \delta_x \delta_y + \delta_x \delta_z + \delta_y \delta_z + \delta_x \delta_y \delta_z$$

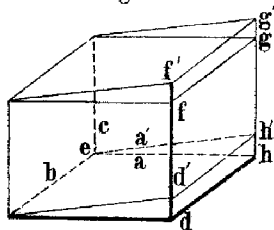
Bei geringen Formänderungen kann man die Producte der Dilatationen gegen ihre einfachen Werthe vernachlässigen, und hat also die räumliche Dilatation

$$\theta = \delta_x + \delta_y + \delta_z.$$

Würden wir zwei einzelne Atome betrachten, deren Entfernung von einander ursprünglich  $r$  und später  $r'$  wäre, so würde  $(r' - r) : r$  die Dilatation für den Verein dieser beiden Atome sein. Würde man nun  $r$  und  $r'$  auf die Coordinatenachsen projiciren und die Projectionen z. B. für die Axe  $X$  mit  $r_x$  und  $r'_x$  bezeichnen, so wäre  $(r'_x - r_x) : r_x$  die Componente der Dilatation für diese Axe. In dem Prisma  $abc$  werden nun die Atome nicht völlig regelmässig vertheilt sein, und wir können daher die drei Dilatationen  $\delta_x = (a' - a) : a$ ,  $\delta_y = (b' - b) : b$  und  $\delta_z = (c' - c) : c$  nur als die Mittelwerthe aus den Axencomponenten der Dilatationen der in dem Prisma  $abc$  enthaltenen Atompaaire ansehen.

Wir wollen jetzt in Fig. 69 annehmen, dass die

Fig. 69.



Kanten  $b$  und  $c$  ihre Lage und Grösse behalten, während die  $bc$  gegenüber liegende Fläche  $dfgh$  nach  $d'f'g'h'$  verschoben wird und dabei in ihrer ersten Ebene bleibt. Das Volumen des Prismas wird dabei nicht verändert. Die Kante  $a$  rückt nach  $a'$ , wird dabei etwas länger und schief gegen  $c$ , während  $a'$  gegen  $b$  noch

rechtwinklig bleibt. Die Schärfe dieser Schiebung heisst die Gleitung, sie ist der Quotient  $(\overline{hh'}) : (\overline{ee'})$  und soll mit  $\gamma$  bezeichnet werden. Von den an  $\gamma$  zu-

setzenden Indices soll der erste die Axe bezeichnen, zu welcher die betreffende Fläche ursprünglich normal war, das zweite Zeichen soll die Richtung bezeichnen, nach welcher die Gleitung stattfindet. Die Gleitung der Fläche  $d f g h$  nach  $d' f' g' h'$  würde also mit  $\gamma_{xz}$  bezeichnet werden. Demgemäss erklärt sich die Bedeutung der Zeichen  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ .

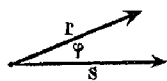
Die Gleitung  $\gamma_{zx}$  ist auch der trigonometrische Tangens des kleinen Winkels  $h e h'$ , um welchen die Kante  $a$  nach  $a'$  gedreht wurde, und wegen der Kleinheit dieses Winkels kann man anstatt des Tangens für den Werth der Gleitung auch den Sinus oder den Arcus dieses Winkels nehmen, und daher auch den Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen von  $a$  und  $c$  nach der Schiebung. Dadurch ist sofort klar, dass  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ .

Diese Coefficienten  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{xy}$  etc. denken wir uns nur als die Mittelwerthe aus den Axencomponenten der Gleitungen, welche zwischen je zwei benachbarten Atom-schichten in dem Prisma  $abc$  stattgefunden haben.

Sind die drei Dilatationen  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  und die drei Gleitungen  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  für das Prisma  $abc$  bekannt, so findet man aus ihnen leicht die Dilatation  $\delta_r$  einer in  $abc$  liegenden Geraden  $r$  von beliebiger Richtung und die Gleitung  $\gamma_{rs}$  einer zu  $r$  normalen Ebene nach der beliebigen Richtung  $s$ .

Nennt man nämlich (wie Grassmann in seiner Ausdehnungslehre vorgeschlagen) in Fig. 70 das Product  $rs \cos \varphi$  das innere Product von  $r$  und  $s$ , und wird

Fig. 70.



jeder dieser beiden Wege als eine geometrische Summe dargestellt, so ist ihr inneres Product auch gleich der Summe aller einzelnen inneren Producte, welche man erhält, wenn man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der andern multiplicirt.

Sind nun  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  bezw. die Richtungswinkel von  $r$  und  $s$  gegen die Coordinatenachsen, so kann man vor der Deformation  $r$  und  $s$  ansehen als die geometrischen Summen (oder Diagonalen) von Wegen

$$r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma \text{ und } s \cos \alpha', s \cos \beta', s \cos \gamma',$$

welche parallel zu den Axen liegen. Durch die Deformation geht  $r$  in  $(1 + \delta_r) r$  über, ebenso  $s$  in  $(1 + \delta_s) s$ , der Winkel  $\varphi$  in  $\varphi_1$ , die Summanden von  $r$  und  $s$  gehen

über in  $(1 + \delta_x) r \cos \alpha$ ,  $(1 + \delta_y) r \cos \beta$ ,  $(1 + \delta_z) r \cos \gamma$   
 $(1 + \delta_x) s \cos \alpha'$ ,  $(1 + \delta_y) s \cos \beta'$ ,  $(1 + \delta_z) s \cos \gamma'$ ,  
 und die ursprünglich rechten Winkel zwischen diesen  
 Componenten werden schiefe, deren Cosinus die Werthe  
 $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  erhalten. Demnach ist das innere Product  
 von  $rs$ , 1) vor der Deformation

$$r s \cos \varphi = r \cos \alpha \cdot s \cos \alpha' + r \cos \beta \cdot s \cos \beta' + r \cos \gamma \cdot s \cos \gamma',$$

2) nach der Deformation

$$\begin{aligned} & (1 + \delta_r) r \cdot (1 + \delta_s) s \cos \varphi_1 \\ = & (1 + \delta_x) r \cos \alpha (1 + \delta_x) s \cos \alpha' + (1 + \delta_y) r \cos \beta (1 + \delta_y) s \cos \beta' + (1 + \delta_z) r \cos \gamma (1 + \delta_z) s \cos \gamma' \\ & + (1 + \delta_x) r \cos \alpha (1 + \delta_y) s \cos \beta' \cdot \gamma_{xy} + (1 + \delta_y) r \cos \beta (1 + \delta_x) s \cos \alpha' \cdot \gamma_{xy} \\ & + (1 + \delta_y) r \cos \beta (1 + \delta_z) s \cos \gamma' \cdot \gamma_{yz} + (1 + \delta_z) r \cos \gamma (1 + \delta_y) s \cos \beta' \cdot \gamma_{yz} \\ & + (1 + \delta_z) r \cos \gamma (1 + \delta_x) s \cos \alpha' \cdot \gamma_{zx} + (1 + \delta_x) r \cos \alpha (1 + \delta_z) s \cos \gamma' \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned}$$

Dividirt man jede der Gleichungen durch  $rs$ , subtrahirt  
 dann die erste von der zweiten und vernachlässigt die  
 Producte der Dilatationen und Gleitungen gegen ihre  
 einfachen Werthe, so erhält man

$$\begin{aligned} (1 + \delta_r + \delta_s) \cos \varphi_1 - \cos \varphi = & 2\delta_x \cos \alpha \cos \alpha' + 2\delta_y \cos \beta \cos \beta' + 2\delta_z \cos \gamma \cos \gamma' + (\cos \alpha \cos \beta' \\ & + \cos \beta \cos \alpha') \gamma_{xy} + (\cos \beta \cos \gamma' + \cos \gamma \cos \beta') \gamma_{yz} + (\cos \gamma \cos \alpha' + \cos \alpha \cos \gamma') \gamma_{zx}. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt  $s=r$  so wird  $\varphi=\varphi_1=0$ ,  $\alpha'\beta'\gamma'$  werden  
 $\alpha, \beta, \gamma$ ; die linke Seite wird  $(1 + 2\delta_r) - 1 = 2\delta_r$ , und dividirt  
 man die Gleichung durch 2, so hat man

$$\delta_r = \delta_x \cos \alpha^2 + \delta_y \cos \beta^2 + \delta_z \cos \gamma^2 + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \gamma_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Nimmt man dagegen  $s$  normal zu  $r$ , so ist  $\cos \varphi = \cos 90^\circ = 0$ ,  
 dagegen  $\cos \varphi_1$  wird die gesuchte Gleitung  $\gamma_{rs}$  und  
 folglich wird die linke Seite der Gleichung  $(1 + \delta_x + \delta_y) \gamma_{rs}$   
 wofür nur  $\gamma_{rs}$  genommen wird, wenn man die Producte  
 der Dilatationen  $\delta_x, \delta_y$  mit der Gleitung  $\gamma_{rs}$  selbst ver-  
 nachlässigt. Man hat also

$$\begin{aligned} \gamma_{rs} = & 2\delta_x \cos \alpha \cos \alpha' + 2\delta_y \cos \beta \cos \beta' + 2\delta_z \cos \gamma \cos \gamma' \\ & + \gamma_{xy} (\cos \alpha \cos \beta' + \cos \beta \cos \alpha') + \gamma_{yz} (\cos \beta \cos \gamma' + \cos \gamma \cos \beta') + \gamma_{zx} (\cos \gamma \cos \alpha' + \cos \alpha \cos \gamma'). \end{aligned}$$

Man denke sich jetzt um den Punkt  $e$  eine Kugel mit  
 dem Radius  $r$  beschrieben und durch den Mittelpunkt  
 drei Coordinatenaxen  $X, Y, Z$  gelegt. Für jede Richtung  
 dieses Radius sind seine Axencomponenten vor der  
 Formänderung  $r \cos \alpha$ ,  $r \cos \beta$ ,  $r \cos \gamma$ , und nach der Form-  
 änderung  $(1 + \delta_x) r \cos \alpha$ ,  $(1 + \delta_y) r \cos \beta$ ,  $(1 + \delta_z) r \cos \gamma$ ,  
 welche Werthe wir mit  $x, y, z$  bezeichnen wollen, so  
 dass  $\cos \alpha = \frac{x}{(1 + \delta_x)r}$ ,  $\cos \beta = \frac{y}{(1 + \delta_y)r}$ ,  $\cos \gamma = \frac{z}{(1 + \delta_z)r}$ , also

$$\left\{ \frac{x}{r + \delta_x r} \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{r + \delta_y r} \right\}^2 + \left\{ \frac{z}{r + \delta_z r} \right\}^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \text{ ist.}$$

Es sind  $x, y, z$  die Coordinaten des Endpunktes von  $r$  nach der Formänderung, aber in Bezug auf Axen, welche jetzt im Allgemeinen schief geworden sind. Daher gehört die letzte Gleichung zu der Oberfläche eines Ellipsoides, welches das Deformationsellipsoid genannt wird. Die Gleichung zeigt, dass die Axen  $X, Y, Z$  nach der Deformation conjugirte Durchmesser des Ellipsoides werden. Da es aber bei jedem Ellipsoide wenigstens ein System von auf einander rechtwinkligen conjugirten Durchmessern giebt, so sagt die Formel, dass es bei jeder Kugel wenigstens ein System von solchen drei auf einander rechtwinkligen Durchmessern giebt, welche nach der Formänderung noch auf einander rechtwinklig sind, bei denen also keine Schiebung stattgefunden hat, oder wofür die Werthe  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  einzeln  $= 0$  sind. Die zu diesen Durchmessern gehörenden  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  werden die Hauptdilatationen genannt. Nimmt man diese Durchmesser als Coordinatenaxen, so wird  $\delta_r = \delta_x \cos^2 \alpha + \delta_y \cos^2 \beta + \delta_z \cos^2 \gamma$ ,

$$\gamma_{rs} = 2\delta_x \cos \alpha \cos \alpha' + 2\delta_y \cos \beta \cos \beta' + 2\delta_z \cos \gamma \cos \gamma'.$$

Die Formel für  $\delta_r$  zeigt, dass die Summe der Dilatationen für je drei auf einander rechtwinklige Richtungen constant und desshalb gleich der räumlichen Dilatation ist. Sind die drei Hauptdilatationen einander gleich, so ist die Dilatation nach allen Richtungen dieselbe und die Gleitungen sind überall gleich Null.

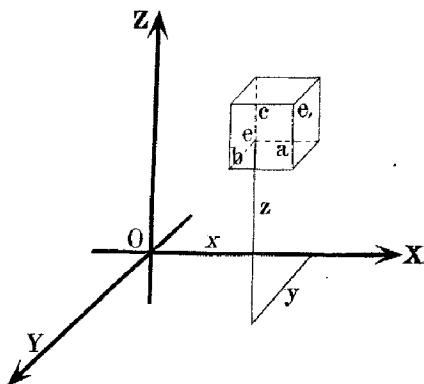
Aus der Uebereinstimmung der Formeln für  $\delta_r$  und  $\rho_{nn}$  im vorigen § kann man schliessen, dass auch die Gleitung ein Maximum sein wird für die sechs Ebenen, welche je eine der Axen des Deformationsellipsoides enthalten und die Winkel zwischen den andern beiden Axen halbiren, und dass diese Maxima die Werthe  $\pm \frac{\delta_x - \delta_y}{2}$ ,  $\pm \frac{\delta_y - \delta_z}{2}$  und  $\pm \frac{\delta_z - \delta_x}{2}$  haben werden.

§ 28. III. Die Beziehungen zwischen den Deformationen der kleinen Theile eines Körpers und den Aenderungen der Coordinaten seiner einzelnen Punkte. Wir betrachten in Fig. 71 (folg. Seite) wieder ein kleines Prisma, dessen Kanten  $a, b, c$  ursprünglich



parallel zu den Coordinatenaxen sind. Für den Eckpunkt  $e$  seien die Coordinaten vor der Deformation

Fig. 71.



$x, y, z$  und nach derselben  $x+u, y+v, z+w$ ; dann gelten für den gegenüberliegenden Eckpunkt  $e_1$  die entsprechenden

Werthe  $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ , und die Werthe  $x+u+\Delta(x+u), y+v+\Delta(y+v), z+w+\Delta(z+w)$ .

Die Kantenlängen sind also bezw.

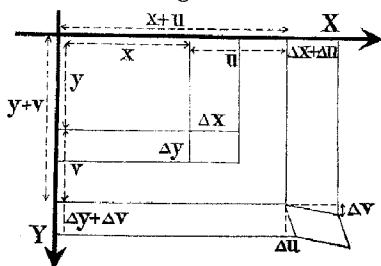
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  und  $\Delta x+\Delta u,$

$\Delta y+\Delta v, \Delta z+\Delta w$ , wenn wir von der Längenänderung absehen, welche durch die Gleitungen entsteht, da dieselbe klein zweiter Ordnung ist. Die Kantenlängen ändern sich um die Grössen  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ , und folglich sind die Dilatationen  $\delta_x = \frac{\Delta u}{\Delta x}, \delta_y = \frac{\Delta v}{\Delta y}, \delta_z = \frac{\Delta w}{\Delta z}$ , wo-

für man die partiellen Derivirten  $= \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$  nehmen

kann. Um die Gleitungen zu finden, beachte man, dass die Flächen des Prismas fast parallel zu den Coordinatenebenen bleiben und also der Winkel zwischen  $a$  und  $b$  nach der Deformation dem Winkel zwischen ihren Pro-

Fig. 72.



jectionen auf der Ebene der Axen  $X$  und  $Y$  gleich gesetzt werden kann. Die Fig. 72 zeigt nun, dass die Deformation den rechten Winkel vermindert um zwei kleine Winkel, deren Tangenten zunächst

$\frac{\Delta v}{\Delta x + \Delta u}$  und  $\frac{\Delta u}{\Delta y + \Delta v}$  sind, wofür  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$  und  $\frac{\Delta u}{\Delta x}$  geschrieben werden kann. Wegen der Kleinheit der Winkel kann man Tangens und Sinus verwechseln und den Sinus ihrer Summe  $= \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}$  setzen und folglich ist der Cosinus des Winkels, welchen die Kanten  $ab$  nach der Deformation bilden, oder  $\gamma_{xy}$  ebenfalls  $\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta y}$ , wofür man  $\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}$  schreiben kann. Da für die beiden anderen Ebenen analoge Ausdrücke gebildet werden können, so haben wir schliesslich die sechs Formeln

$$\delta_x = \frac{du}{dx}, \delta_y = \frac{dv}{dx}, \delta_z = \frac{dw}{dy},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}, \gamma_{yz} = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}, \gamma_{zx} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}.$$

§ 29. IV. Die Constanten der Elasticität. Zwischen den Schärfe der drei Normalcomponenten  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$ , sowie der Tangentialcomponenten  $p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$  der Spannungen einerseits und den drei Dilatationen und drei Gleitungen andererseits müssen Gleichungen bestehen, wobei man wegen der Kleinheit der Formänderungen überall nur die ersten Potenzen von  $\delta$  und  $\gamma$  beizubehalten braucht. Denkt man sich diese Gleichungen für jedes einzelne der sechs  $p$  aufgelöst, so wird man für jedes  $p$  einen sechsgliedrigen Ausdruck erhalten. Die Coefficienten, welche dabei vor  $\delta$  und  $\gamma$  erscheinen, heissen die Coefficienten oder Constanten der Elasticität und sind nicht mit dem Elasticitätsmodul zu verwechseln. Es giebt also im Allgemeinen 36 solcher Coefficienten, die jedoch zum Theil einander gleich sind. Die genauere Untersuchung geschieht durch die Betrachtung des Potentials wie folgt.

§ 30. Das Potential. Das Wort Potential bezeichnet hier diejenige Spannungsenergie, um welche die Energie eines Körpers durch die Deformation desselben vermehrt wird. Es ist also (der Anzahl der Kilogrammster nach) gleich der Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um diese Deformation hervorzubringen. Wir wollen mit  $\Phi$  den Werth dieses Potentials für die Volumeinheit des kleinen Prismas, Fig. 71, be-

zeichnen, sodass  $abc\Phi$  der Werth für das ganze Prisma ist. Zunächst ist nun klar, dass  $\Phi$  eine Function der drei Dilatationen und drei Gleitungen sein wird, und dass die Reihenfolge, in welcher man die entsprechenden sechs Deformationen auf einander folgen lässt, für den Werth von  $\Phi$  gleichgültig sein muss, weil sonst bei einer Zurückbildung in die ursprüngliche Form das Princip von der Erhaltung der Energie nicht würde bestehen bleiben. Die sechs  $\delta$  und  $\gamma$  müssen demnach als von einander unabhängige Variable in dem Werth von  $\Phi$  auftreten. Lassen wir nun die Deformation unendlich wenig zunehmen, so ist dabei die Arbeit, welche von den an dem Prisma wirkenden Kräften  $p$  ausgeübt wird

$$d(abc\Phi) = abc d\Phi = abc \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\delta_x} d\delta_x + \frac{\partial\Phi}{\partial\delta_y} d\delta_y + \frac{\partial\Phi}{\partial\delta_z} d\delta_z \right. \\ \left. + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}} d\gamma_{yz} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{zx}} d\gamma_{zx} \right\}, \text{ wo die angedeuteten}$$

Differentialquotienten partielle sind. Betrachten wir die Dehnung parallel zur  $X$ -Axe allein und lassen dieselbe unendlich wenig zunehmen, so treten die zur  $X$ -Axe normalen Seiten des Prismas  $abc$ , welche von den Zugkräften  $p_{xx}bc$  und  $p'_{xx}bc$  beansprucht werden, um den Weg  $(1+\delta_x+d\delta_x)a - (1+\delta_x)a = ad\delta_x$  aus einander, und die betreffende Arbeit ist  $p_{xx}bc \cdot ad\delta_x = abc p_{xx} d\delta_x$ . In derselben Weise wird die Arbeit für eine unendlich kleine Vermehrung der Dilatation in den Richtungen der Axen  $Y$  und  $Z$ , bezw.  $abc p_{yy} d\delta_y$  und  $abc p_{zz} d\delta_z$ .

Betrachtet man dagegen eine Verschiebung der zur Axe  $X$  normalen Seitenfläche in einer Richtung parallel zur Axe  $Y$ , so sind die Kräfte  $p_{xy}bc$  und  $p'_{xy}bc$  nach entgegengesetzten Richtungen für die Verschiebung thätig, die Seitenflächen haben sich gegeneinander um  $a\gamma_{xy}$  verschoben, und wenn diese Verschiebung unendlich wenig zunimmt, ist die dabei verrichtete Arbeit

$$p_{xy}bc \cdot a d\gamma_{xy} = abc \cdot p_{xy} d\gamma_{xy},$$

und ähnlich für die übrigen Verschiebungen der Seiten.

Für die Arbeit, welche mit einer unendlich kleinen Aenderung der Deformation verbunden ist, haben wir also den doppelten Ausdruck  $d(abc\Phi)$

$$1) = abc \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_x} d\delta_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_y} d\delta_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_z} d\delta_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{zx}} d\gamma_{zx} \right\}$$

$$2) = abc (p_{xx} d\delta_x + p_{yy} d\delta_y + p_{zz} d\delta_z + p_{xy} d\gamma_{xy} + p_{yz} d\gamma_{yz} + p_{zx} d\gamma_{zx}).$$

Demnach sind die sechs Componenten der Spannungs-schärfen zugleich die sechs partiellen Differentialquotienten von dem auf die Volumeneinheit bezogenem Potentiale.

Weil wir nun in den Formeln, welche jede der sechs Componenten  $p_{xx}$  etc. als Function der sechs Deformationsquotienten  $\delta$  und  $\gamma$  ausdrücken, überall nur die ersten Potenzen von  $\delta$  und  $\gamma$  beibehalten, so sind die Coefficienten vor diesen  $\delta$  und  $\gamma$  wieder die partiellen Differentialquotienten der  $p$  nach den  $\delta$  und  $\gamma$ , und deshalb sind es die partiellen Derivirten zweiter Ordnung des auf die Volumeinheit bezogenen Potentials  $\Phi$  nach den  $\delta$  und  $\gamma$ . Die Zahl dieser Derivirten ist aber bei sechs Variablen nur  $= \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ , und daher müssen die 36 Coefficienten der Elasticität sich durch 21 derselben ausdrücken lassen.

In der That ist z. B.

$$p_{xx} = \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_x}, \quad p_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}},$$

der Coefficient von  $\gamma_{xy}$  in der Formel für  $p_{xx}$  ist

$$= \frac{\partial p_{xx}}{\partial \gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta_x \cdot \partial \gamma_{xy}},$$

der Coefficient von  $\delta_x$  in der Formel für  $p_{xy}$  ist

$$= \frac{\partial p_{xy}}{\partial \delta_x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xy} \cdot \partial \delta_x}.$$

Die letzten beiden Differentialquotienten zweiter Ordnung sind aber bekanntlich einander gleich, weil hier  $\delta_x$  und  $\gamma_{xy}$  als von einander unabhängige Variable gelten, und demnach ist der Coefficient von  $\gamma_{xy}$  in der Formel für  $p_{xx}$  gleich dem Coefficienten von  $\delta_x$  in der Formel für  $p_{xy}$ , und ähnliche Gleichungen gelten für die übrigen Coefficienten.

§ 31. Die Symmetrien der Elasticität. Wenn man bei unveränderter Lage der Axen  $X$  und  $Y$  die Richtung der Axe  $Z$  in die entgegengesetzte verwandelt, so behalten  $x$ ,  $y$ ,  $u$  und  $v$  ihre bisherigen Werthe,

während  $z$  wie  $w$  in die entgegengesetzten Werthe übergehen. Dadurch bleiben auch

$$\delta_x = \frac{du}{dx}, \delta_y = \frac{dv}{dy}, \delta_z = \frac{dw}{dz} \text{ und } \gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}$$

ungeändert, während

$$\gamma_{yz} = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \text{ und } \gamma_{zx} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$$

in die entgegengesetzten Werthe verwandelt werden. Ebenso gehen die Componenten  $p_{yz}$  und  $p_{zx}$  der Spannungsschärfe in die entgegengesetzten Werthe über. Wenn nun die Coefficienten in den sechs Formeln für die  $p$  als abhängig von  $\delta$  und  $\gamma$  für die beiden entgegengesetzten Lagen der  $Z$ -Axe dieselben Werthe haben, so sagen wir die Ebene der Axen  $X$  und  $Y$  sei eine Symmetrieebene der Elasticität. Wegen der erwähnten Zeichenwechsel müssen dann 16 von den 36 Coefficienten gleich Null sein; nämlich die Coefficienten von  $\gamma_{yz}$  und  $\gamma_{zx}$  in den Formeln für die Normalcomponenten  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  und die Tangentialcomponente  $p_{xy}$ , und die ihnen gleichen Coefficienten von  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  und  $\gamma_{xy}$  in den Formeln für  $p_{yz}$  und  $p_{zx}$ .

Sind zwei Coordinatenebenen zugleich Symmetrieebenen der Elasticität, so ist auch die dritte eine solche. Jede der Normalcomponenten hängt dann nur noch von den drei Dilatationen, und jede Tangentialcomponente nur von der einen Gleitung ab, welche mit ihr durch dieselben Indices bezeichnet wird. Die sechs Gleichungen für  $p$  können dann geschrieben werden

$$\begin{aligned} p_{xx} &= a\delta_x + f'\delta_y + e'\delta_z \text{ und } p_{yz} = d'\gamma_{yz} \\ p_{yy} &= f'\delta_x + b\delta_y + d'\delta_z & p_{zx} &= e'\gamma_{zx} \\ p_{zz} &= e'\delta_x + d'\delta_y + c\delta_z & p_{xy} &= f'\gamma_{xy} \end{aligned}$$

Wenn unter Beibehaltung der Axe  $Z$  und der Ebene der Axen  $X$  und  $Y$  diese letzteren durch neue zu einander rechtwinklige Axen  $X'$  und  $Y'$  ersetzt werden, und dabei die Coefficienten, durch welche die auf die neuen Axen bezüglichen Componenten der  $p$  von den entsprechenden  $\delta$  und  $\gamma$  abhängen, dieselben bleiben, so heisst  $Z$  eine Symmetrieaxe der Elasticität. Damit  $Z$  eine solche Axe sein kann, müssen zunächst die drei ursprünglichen Coordinatenebenen Symmetrieebenen

sein. Ebenso müssen die Coefficienten dieselben bleiben, wenn man die Axen  $X$  und  $Y$  mit einander vertauscht. Demnach muss  $a = b$ ,  $d = e$ ,  $d' = e'$  sein. Aber dies genügt noch nicht. Wenn die neuen Axen  $X'$  und  $Y'$  von den alten  $X$  und  $Y$  nur um einen unendlich kleinen Winkel abweichen und man bestimmt nach den früheren Formeln die neuen Werthe für  $p$ ,  $\delta$  und  $\gamma$ , so findet man, dass die Elasticitätscoefficienten nur dann unverändert bleiben, wenn ausser den obigen Gleichungen noch  $a = b = 2f + f'$  ist.

Für eine Symmetrieaxe  $Z$  ist demnach

$$\begin{aligned} p_{xx} &= (2f + f') \delta_x + f' \delta_y + e \delta_z & \text{und} & & p_{yz} &= e' \gamma_z \\ p_{yy} &= f' \delta_x + (2f + f') \delta_y + e' \delta_z & & & p_{zy} &= e' \gamma_{zx} \\ p_{zz} &= e' \delta_x + e' \delta_y + c \delta_z & & & p_{xy} &= f' \gamma_{xy}. \end{aligned}$$

Wenn neben der  $Z$ -Axe auch die  $Y$ -Axe eine Symmetrieaxe der Elasticität ist, so gilt dasselbe auch für die  $X$ -Axe und die Gleichungen zwischen den Componenten der Spannungen und Deformationen heissen dann

$$\begin{aligned} p_{xx} &= (2e + e') \delta_x + e' \delta_y + e' \delta_z & \text{und} & & p_{yz} &= e' \gamma_z \\ p_{yy} &= e' \delta_x + (2e + e') \delta_y + e' \delta_z & & & p_{zx} &= e' \gamma_{zx} \\ p_{zz} &= e' \delta_x + e' \delta_y + (2e + e') \delta_z & & & p_{xy} &= e_{xy} \end{aligned}$$

Ersetzt man in diesem Falle die Axen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  durch irgend ein neues System von drei auf einander rechtwinkligen Axen  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , so bleiben die Coefficienten  $e$  und  $e'$  dieselben Werthe. Nach Lamé sagt man von einem solchen Körper er sei von constanter Elasticität, und nach Cauchy, der Körper sei isotrop.

§. 32. Der Streit um die Anzahl der unabhängigen Coefficienten. Die Lehrsätze und Formeln der vorhergehenden Paragraphen dieses Abschnittes sind allgemein als richtig anerkannt, über den folgenden Punkt besteht jedoch ein Widerstreit. Bei der ersten Begründung der Elasticitätstheorie durch Cauchy und Navier, war nämlich aus der Annahme, dass die Körper aus getrennten Atomen bestehen, welche aus der Entfernung sich gegenseitig anziehen oder abstossen, noch gefolgert worden, dass unter den 36 Constanten

der Elasticität ausser den schon erwähnten 15 Gleichungen noch sechs andere beständen, und dadurch die Zahl von einander unabhängigen Constanten nur 15 anstatt 21 betrüge. Bezeichnet nämlich  $n$  die Normale zu einer beliebigen Ebene, so sollte für jede Richtung von  $n$  sein:

- |                                                                         |   |
|-------------------------------------------------------------------------|---|
| 1) Der Coefficient von $\delta_y$ in der Formel für $p_{nx}$            | } |
| gleich dem Coefficienten von $\gamma_{xy}$ in der Formel für $p_{ny}$ ; |   |
| 2) Der Coefficient von $\gamma_{yz}$ in der Formel für $p_{nx}$         | } |
| gleich dem Coefficienten $\gamma_{xz}$ in der Formel für $p_{ny}$ .     |   |

Würden diese Gleichheiten zugegeben, so würden im Falle Symmetrien bestehen, diejenigen Coefficienten, welche in den Formeln des vorhergehenden Paragraphen mit Strichen versehen sind, den ungestrichenen Buchstaben gleich werden und man hätte also

1) im Falle von drei Symmetrieebenen der Elasticität nur sechs verschiedene Coefficienten, nämlich

$$\begin{aligned} p_{xx} &= a\delta_x + f\delta_y + e\delta_z \text{ und } p_{yz} = d\gamma_{yz} \\ p_{yy} &= f\delta_x + b\delta_y + d\delta_z & p_{zx} &= e\gamma_{zx} \\ p_{zz} &= e\delta_x + d\delta_y + c\delta_z & p_{xy} &= f\gamma_{xy}, \end{aligned}$$

2) im Falle einer Symmetrieaxe  $Z$  nur drei unabhängige Coefficienten, nämlich

$$\begin{aligned} p_{xx} &= 3f\delta_x + f\delta_y + e\delta_z \text{ und } p_{yz} = e\gamma_{yz} \\ p_{yy} &= f\delta_x + 3f\delta_y + e\delta_z & p_{zx} &= e\gamma_{zx} \\ p_{zz} &= e\delta_x + e\delta_y + c\delta_z & p_{xy} &= f\gamma_{xy}, \end{aligned}$$

und

3) im Falle der Isotropie enthielten die Gleichungen nur einen einzigen Coefficienten, sodass

$$\begin{aligned} p_{xx} &= 3e\delta_x + e\delta_y + e\delta_z \text{ und } p_{yz} = e\gamma_{yz} \\ p_{yy} &= e\delta_x + 3e\delta_y + e\delta_z & p_{zx} &= e\gamma_{zx} \\ p_{zz} &= e\delta_x + e\delta_y + 3e\delta_z & p_{xy} &= e\gamma_{xy}. \end{aligned}$$

Nachdem diese Gleichungen eine Reihe von Jahren unbestritten geblieben waren, erhob zuerst der englische Physiker Green Widerspruch und später glaubte der damals in Paris lebende österreichische Physiker Werthheim aus seinen Versuchen zu gleichem Schlusse kommen

zu müssen, während andererseits an de Saint-Venant die Richtigkeit der obigen Gleichungen einen eifrigen und geschickten Vertheidiger fand. Der Streit dreht sich dabei besonders um die Formeln für die isotropen Körper, also um die Frage, ob die betreffenden Gleichungen mit einem oder mit zwei verschiedenen Coefficienten zu schreiben seien. Wenn nun auch die Genauigkeit der Werthheim'schen Versuche nicht bezweifelt wird, so ist doch von Werthheim selbst zugegeben, dass bei den Metallen eine vollständige Isotropie nicht vorhanden ist, und de Saint-Venant erklärt durch diesen Mangel an Isotropie die Differenz zwischen den Resultaten der obigen Formeln und den erwähnten Versuchen.

§ 33. Der Elasticitätsmodul  $E$  des Materials für eine bestimmte Zug- oder Druckrichtung ist das Verhältniss der Schärfe der in dieser Richtung normal zu einer Fläche wirkenden Spannung zu der in ihrer eignen Richtung hervorgebrachten Dilatation.

Betrachten wir wieder ein kleines Prisma, dessen Kantenlängen  $a, b, c$  bezw. parallel mit den Coordinatenachsen  $X, Y, Z$  liegen und denken uns nur auf die beiden Flächen, welche normal zur  $X$ -Axe sind, Spannungen und zwar Normalspannungen ausgeübt, so wird  $p_{xy} = 0$ ,  $p_{xz} = 0$  und deshalb für einen isotropen Körper

$$\begin{aligned} p_{xx} &= (2e + e') \delta_x + e' \delta_y + e' \delta_z \\ 0 &= e' \delta_x + (2e + e') \delta_y + e' \delta_z \\ 0 &= e' \delta_x + e' \delta_y + (2e + e') \delta_z. \end{aligned}$$

Durch Subtraction der dritten Gleichung von der zweiten folgt

$$\begin{aligned} 2e \delta_y - 2e \delta_z &= 0, \\ \text{oder } \delta_y &= \delta_z, \end{aligned}$$

und deshalb aus der zweiten Gleichung

$$e' \delta_x + 2(e + e') \delta_y = 0,$$

$$\text{und } \delta_y = \delta_z = - \frac{e'}{2(e + e')} \delta_x.$$

Setzt man hierin mit de Saint-Venant  $e' = e$ , so wird  $\delta_y = \delta_z = -\frac{1}{2} \delta_x$ , d. h. dieselben Kräfte, welche durch directen Zug eine Verlängerung in der Richtung der  $X$ -Axe hervorbringen, bewirken auch gleichzeitig eine Zusammenziehung in den Richtungen der andern beiden Axen und zwar beträgt die Zusammenziehung



ein Viertel der Verlängerung. Setzt man für  $\delta_y$  und  $\delta_z$  ihren Werth in die erste Gleichung, so folgt

$$p_{xx} = (2e + e') \delta_x + 2e' \frac{-e'}{2(e+e')} \delta_x = \frac{2e+3e'}{e+e'} e \delta_x,$$

und demnach ist  $E = \frac{2e+3e'}{e+e'} e$  der Elasticitätsmodul.

Für  $e' = e$  geht dieser Werth in  $E = \frac{5}{2} e$  über.

Den Coefficienten  $e$ , welcher wegen der Gleichung  $p_{yz} = e' \gamma_{yz}$  das Verhältniss der Schärfe einer Tangentialspannung zu der von ihr in ihrer eignen Richtung hervorgebrachten Gleichung ist, könnte man den Elasticitätsmodul für Gleiten nennen. Navier hat diesen Werth eben mit  $G$  bezeichnet, und die Gleichung

$$E = \frac{5}{2} G \text{ oder } G = \frac{2}{5} E$$

bei der Torsion erwähnt. Wertheim glaubte aus seinen Versuchen die Beziehung  $G = \frac{3}{8} E$  herleiten zu müssen.

Bei nicht isotropen Körpern sind die Modul  $E$  und  $G$  natürlich für jede Richtung besondere Werthe.

§. 34. Die Aufgabe bei gegebenen Kräften, die Gestalt des deformirten Körpers und die Spannungen zwischen seinen Theilen zu bestimmen, hat immer nur eine Lösung, doch ist es bis jetzt nicht gelungen, diese Lösung für den allgemeinsten Fall zu finden. Die eben gegebenen Gleichungen bilden stets den Ausgangspunkt der Rechnung, wobei  $\delta$  und  $\gamma$  die Formänderungen aus dem sogenannten natürlichen Zustande bezeichnen, d. h. aus dem Zustande des Körpers, in welchem die einzelnen prismatischen Theile desselben ohne Spannung neben einander gedacht werden. Damit sind dann die Gleichungen zu verbinden, welche sich auf die Oberfläche des Körpers beziehen, indem man in den Formeln für  $p_n$ ,  $p_{nx}$  die Werthe setzt, welche für die Spannungsschärfe an der Oberfläche vorgeschrieben sind. Professor G. Kirchhof hat zuerst die Lösung gegeben für den Fall eines ursprünglich prismatischen Stabes, dessen Querdimensionen so klein sind, dass sie gegen die Länge vernachlässigt werden können, wobei sich eine merkwürdige Uebereinstimmung zeigte zwischen den Formeln der Biegungsaufgabe und der Aufgabe, die

Rotation eines Körpers um einen festen Punkt  $b$  zu bestimmen. Im Allgemeinen muss man die Biegungsaufgabe umgekehrt stellen, nämlich nicht beliebige Kräfte als gegeben ansehen und die Deformationen suchen, sondern man muss einzelne specielle Deformationen betrachten und die Gesammtheit der innern Kräfte, welche diesen Deformationen entsprechen auf ihren einfachsten Ausdruck reduciren, womit man dann auch die äussern Kräfte kennt, welche diesen innern Kräften der Gleichheit halten würden. Dadurch sind dann auch für bestimmte Gruppen von äussern Kräften die entsprechenden Deformationen bekannt. Dies wird die Aufgabe des nächsten Abschnittes sein.

§. 35. Nachtrag zu dem Gesetze der Tangentialcomponente der Spannungsschärfe. Erst während des Druckes erlangte ich Kenntniss von einer Arbeit von J. Boussinesq (abgedruckt in Lionville's Journal de Mathématique, année 1877, pag. 147), welche es ermöglicht, die Veränderung der Tangentialcomponente oder der sogenannten Schubspannung sich auf sehr einfache Weise vorzustellen.

Die Formel auf Seite 484 oben, für die Tangentialcomponente, nämlich

$$p_{nt}^2 = (p_x - p_y)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + (p_y - p_z)^2 \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + (p_z - p_x)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma$$

zeigt deutlich, dass die Tangentialcomponente unverändert bleibt, wenn die Schärfe von jeder der drei Hauptspannungen  $p_x, p_y, p_z$  um denselben Betrag vermindert wird. Andererseits zeigt die Formel auf Seite 480, oben, für die Normalcomponente

$$p_{nn} = p_x \cos^2 \alpha + p_y \cos^2 \beta + p_z \cos^2 \gamma$$

dass, wenn die Schärfe jeder Normalspannung um denselben Werth  $A$  vermindert wird, man als neuen Werth von  $p_{nn}$  erhält

$$\begin{aligned} & (p_x - A) \cos^2 \alpha + (p_y - A) \cos^2 \beta + (p_z - A) \cos^2 \gamma \\ &= p_x \cos^2 \alpha + p_y \cos^2 \beta + p_z \cos^2 \gamma - A(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma), \\ & \text{oder da } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ so wird der vorhergehende Ausdruck } p_x \cos^2 \alpha + p_y \cos^2 \beta + p_z \cos^2 \gamma - A, \\ & \text{d. h. die Normalcomponente } p_{nn} \text{ wird ebenfalls um denselben Werth } A \text{ vermindert, wie die Schärfe jeder der drei Hauptspannungen.} \end{aligned}$$

Suchen wir nun die Intensität  $F$  der Mittelkraft aus der unveränderten Tangentialcomponente  $p_{nt}$  und der um  $A$  verminderten Normalcomponente  $p_{nn}-A$ , so wird diese Kraft auch die Mittelkraft aus den drei Axenkräften  $(p_x-A) \cos \alpha$ ,  $(p_y-A) \cos \beta$ ,  $(p_z-A) \cos \gamma$  sein, wo also

$$F = \sqrt{(p_x - A)^2 \cos^2 \alpha + (p_y - A)^2 \cos^2 \beta + (p_z - A)^2 \cos^2 \gamma}$$

ist. Sind nun die drei Werthe  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  ungleich, so sei  $p_x$  der grösste,  $p_z$  der kleinste von den drei Werthen, und zugleich nehme man

$$A = \frac{p_x + p_z}{2}, \text{ sodass } p_x - A = p_x - \frac{p_x + p_z}{2} = \frac{p_x - p_z}{2} \text{ und}$$

$$p_z - A = p_z - \frac{p_x + p_z}{2} = -\frac{p_x - p_z}{2} \text{ wird, wofür man}$$

$$p_x - A = R \text{ und } p_z - A = -R \text{ schreiben kann, während}$$

$$p_y - A = p_y - \frac{p_x + p_z}{2} \text{ mit } T \text{ bezeichnet wird. Man hat dann}$$

$$F = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + T^2 \cos^2 \beta + (-R)^2 \cos^2 \gamma} = \sqrt{R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + T^2 \cos^2 \beta}$$

$$= \sqrt{R^2 (1 - \cos^2 \beta) + T^2 \cos^2 \beta} = \sqrt{R^2 - (R^2 - T^2) \cos^2 \beta},$$

also einen Werth, welcher nur von dem Winkel  $\beta$  zwischen der Normale der gedrückten Fläche und der Axe  $Y$  abhängt. Die Componente von  $F$  in der Richtung der  $Y$ -Axe ist  $T \cos \beta$  und in der Ebene der Axen  $X$  und  $Z$  dagegen  $\sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + R \cos^2 \gamma}$

$$= \sqrt{R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma)} = \sqrt{R^2 (1 - \cos^2 \beta)} = R \sin \beta.$$

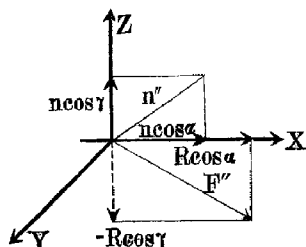
Bezeichnet man daher den Winkel zwischen der Axe  $Y$  und der Richtung von  $F$  mit  $\beta'$ , so ist  $\tan \beta' = \frac{R \sin \beta}{T \cos \beta}$

$$= \frac{R}{T} \tan \beta. \text{ Projicirt man die Normale } N \text{ der gedrückten}$$

Fläche und gleichzeitig die Kraft  $F$  auf die Ebene der Axen  $X$  und  $Z$ , so erhält man  $n''$  in Fig. 73 (folg. Seite) als Diagonale aus  $n \cos \alpha$  und  $n \cos \gamma$ , dagegen  $F''$  als Diagonale aus  $R \cos \alpha$  und  $R \cos \gamma$ , die Richtungen von  $n''$  und  $F''$  liegen also symmetrisch zur Axe  $X$ . Die beiden Ebenen, welche die Axe  $Y$  und ausserdem die eine die Normale  $n$  der gedrückten Fläche, die andere aber die Richtung der Kraft  $F$  enthalten, liegen also symmetrisch zu der Ebene der Axen  $X$  und  $Y$ .

Alle Lagen der Normale  $n$  der gedrückten Fläche, welche mit der Axe  $Y$  den Winkel  $\beta$  einschliessen,

Fig. 73.

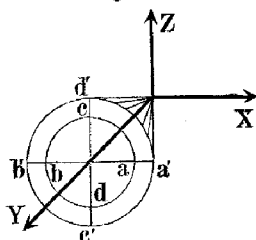


bilden den Mantel eines Kegels, dessen Axe  $Y$  ist, und alle Lagen der dazu gehörigen Richtungen von  $F$ , welche mit der Axe  $Y$  den Winkel  $\beta'$  einschliessen, bilden den Mantel eines zweiten Kegels, dessen Axe ebenfalls  $Y$  ist.

Wählen wir in Fig. 74 die Längen für  $n$  und  $F$  so, dass die Endpunkte

in einer Ebene normal zu  $Y$  liegen, so wird man für die Endpunkte zwei concentrische Kreise erhalten, und

Fig. 74.



wegen der obigen Symmetriengesetze muss, wenn die Normale bezw. in den Punkten  $a, b, c, d$  endigt, die Linie für  $F$  in den Punkten  $a', b', c', d'$  endigen. Der Winkel  $\varphi$  zwischen den Richtungen von  $n$  und  $F$  ist also am kleinsten bei den Lagen  $a, a'$  und  $b, b'$  dagegen am grössten bei den Lagen  $c, c'$  und  $d, d'$ . Dieser grösste

Winkel ist  $\beta + \beta'$  und da  $\tan(\beta + \beta')$

$$= \frac{\tan \beta + \tan \beta'}{1 - \tan \beta \tan \beta'} = \frac{\tan \beta + \frac{R}{T} \tan \beta}{1 - \tan \beta \cdot \frac{R}{T} \tan \beta} = \frac{T + R}{T - R \tan^2 \beta} \cdot \tan \beta,$$

so wird dieser Winkel so lange kleiner als  $90^\circ$  sein, also eine positive Tangente besitzen, wie  $T - R \tan^2 \beta^2$

positiv, also  $R \tan^2 \beta^2 < T$ , oder  $\tan^2 \beta < \frac{T}{R}$ ,  $\tan \beta < \sqrt{\frac{T}{R}}$

ist. Wird  $\tan \beta = \sqrt{\frac{T}{R}}$ , so wird der grösste Winkel

zwischen  $n$  und  $F = 90^\circ$ , und wird  $\tan \beta > \sqrt{\frac{T}{R}}$ , so

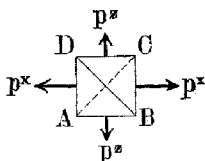
wird dieser Winkel ein stumpfer.

Da nun  $F$  die Mittelkraft ist aus der Tangential-  
 componente  $p_{nt}$  und der um  $A = \frac{p_x + p_z}{2}$  verminderten  
 Normalcomponente, und diese beiden Componenten recht-  
 winklig zu einander sind, so folgt, dass für constante  
 Werthe von  $F$  und veränderlichem Winkel  $\varphi$  zwischen  
 der Normale  $n$  und der Richtung von  $F$ , die Tangential-  
 componente  $p_{nt} = F \sin \varphi$  dann am grössten wird, wenn  $\varphi$   
 einem rechten Winkel am nächsten kommt. Solange  
 daher  $\varphi$  einen rechten Winkel nicht übertreffen kann,  
 d. h. so lange nicht  $> \sqrt{\frac{T}{R}}$  ist, so lange ist die  
 Tangentialcomponente  $p_{nt}$  oder die Schubspannung am  
 grössten, wenn  $\varphi$  am grössten ist, d. h. wenn die Normale  
 und die Richtung von  $F$  sich in der Ebene der Axen  $Y$   
 und  $Z$ , in den Lagen  $c$  und  $c'$  oder  $d$  und  $d'$  befinden.  
 Wenn aber  $\varphi$  grösser als  $90^\circ$  werden kann, d. h. für  
 alle Winkel  $\beta$ , bei denen  $\tan \beta > \sqrt{\frac{T}{R}}$  ist, wird  $p_{nt}$   
 dann am grössten wenn  $\varphi = 90^\circ$  ist, d. h. wenn  $F$  normal  
 zu  $n$  ist; es ist dann  $p_{nn} - Y = 0$ , also  $p_{nn} = A$  oder die  
 Normalcomponente hat den constanten Werth  $\frac{p_x + p_z}{2}$ , und  
 die Tangentialcomponente  $p_{nt}$  ist  $= F = \sqrt{R^2 - (R^2 - F^2) \cos^2 \beta}$ .  
 Dieser Werth ist wieder am grössten wenn  $\cos^2 \beta = 0$ ,  
 also  $\beta = 90^\circ$  ist, oder die Normale  $n$  in der Ebene der  
 Axen  $X$  und  $Z$  liegt. Da aber nach den obigen Sym-  
 metriegesetzen dann auch  $F$  in dieser Ebene und mit  $n$   
 symmetrisch zur Axe  $X$  liegen muss, und ausserdem  $n$   
 und  $F$  rechtwinklig zu einander sein sollen, so folgt,  
 dass die grössten Schubspannungen die Schärfe  $F = \frac{p_x - p_z}{2}$   
 besitzen, dass sie auf beiden Ebenen stattfinden, deren  
 Normalen  $n_1$  und  $n_2$  die Winkel halbiren zwischen  $X$   
 und  $Z$ , dass die Richtungen von  $F_1$  und  $F_2$  den Winkel  
 halbiren zwischen  $X$  und  $-Z$ , d. h. so lange  $p_x, p_y, p_z$   
 zu Zugspannungen gehören, während bei Druckspannungen  
 die Richtungen von  $F_1$  und  $F_2$  entgegengesetzt liegen.  
 Dabei ist zu erinnern, dass bei der ganzen Herleitung  
 vorausgesetzt wurde, dass die Schärfen  $p_x, p_y, p_z$  der  
 drei Hauptspannungen ungleich seien, und dass  $p_x$  der  
 grösste,  $p_z$  der kleinste von diesen drei Werthen sei,  
 sowie, dass die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  zwischen den Axen und

derjenigen Richtung der Normale gezählt werden müssen, welche auf der beanspruchten Fläche aus dem Innern des zugehörigen kleinen Körpertheiles führt, während  $F$  diejenige von den beiden zu einer Spannung gehörigen Kräfte ist, welche an den kleinsten Körpertheil angreift.

Ist der vorstehende Satz erst einmal gefunden, so lässt sich die Richtigkeit desselben bei der Figur 75 leicht erkennen.

Fig. 75.



Es habe der kleine Körpertheil die Länge  $b$  und einen quadratischen Querschnitt mit der Seite  $a$ . An den Seitenflächen wirken normale Zugspannungen  $p_x ab$ ,  $p_z ab$ . Denkt man den Körper durch eine Diagonalfäche  $BD$  geschnitten und zerlegt die auf  $BC$  und  $CD$  wirkenden Zugkräfte normal und tangential zu  $DB$ ,

so erhält man für den untern Körpertheil  $ADB$  für die nach aussen gerichtete Normalcomponente der Zugkraft auf  $DB$  den Werth  $p_x ab \cos 45^\circ + p_z ab \cos 45^\circ = \frac{p_x + p_z}{2} ab \sqrt{2}$  und da die Fläche  $DB$  den Inhalt  $ab\sqrt{2}$  hat, so ist die Schärfe dieser Kraft  $= \frac{p_x + p_z}{2}$ . Tangential und zwar in der Richtung von  $D$  nach  $B$  erhält man für die auf der Fläche  $DB$  des Körpertheils  $ADB$  wirkenden Kräfte den Werth  $p_x ab \cos 45^\circ = p_z ab \cos 45^\circ = \frac{p_x - p_z}{2} \cdot ab \sqrt{2}$ , also die Schärfe dieser Kraft  $= \frac{p_x - p_z}{2}$ . Ganz ähnlich wird das Resultat für die Spannung auf der Fläche  $AC$  hergeleitet.

### Dritter Abschnitt.

#### Anwendungen der Elasticitätsgesetze auf die Berechnung der Baukonstruktionen.

§. 36. Durch die Entwicklungen des vorigen Abschnittes ist man in den Stand gesetzt, im Allgemeinen einen Weg anzugeben, der geeignet ist, zu einer Lösung des allgemeinen Problems der Elasticitätstheorie zu führen, wenn man auch analytischer Schwierigkeiten halber bisher nicht im Stande war, diese Lösung selbst aufzufinden.

In § 31 sind für einen isotropen Körper die Beziehungen angegeben, welche zwischen den Dilatationen und Gleitungen einer- und den Spannungsschärfen andererseits bestehen. Diese Formeln sind mit 2 Constanten  $e$  und  $e'$  geschrieben, von denen man auf Grund einer Hypothese über die molekulare Beschaffenheit des Körpers glaubte annehmen zu dürfen, dass sie einander gleich zu setzen seien. In §. 33 ist ferner gezeigt, dass ein kleines Prisma, auf das ein Zug in seiner Längsrichtung als einzige äussere Kraft einwirkt, in jeder zu dieser senkrechten Richtung eine Contraktion  $\delta$  erfährt, die die  $\delta = -\frac{e'}{2(e+e')} \delta_x$ , wenn mit  $\delta_x$  die Dilation in der Zugrichtung bezeichnet wird. Setzt man in dieser Formel  $e' = e$ , so kommt  $\delta = -\frac{1}{4} \delta_x$ . Abstrahirt man dagegen von der Voraussetzung  $e = e'$  und setzt den Coefficienten  $\frac{e'}{2(e+e')}$  in obiger Formel  $= \frac{1}{m}$ , also  $\delta = -\frac{1}{m} \delta_x$ , worin  $m$  eine für jeden isotropen\*) Körper durch Versuche zu ermittelnde Constante bedeutet, so lässt sich daraus das Verhältniss beider Constanten bestimmen. Man findet  $\frac{e'}{e} = \frac{2}{m-2}$ .

Substituirt man hieraus den Werth von  $e'$  in die im § 33 aufgestellte Formel für den Elasticitäts-Modul so wird  $E = 2 \frac{m+1}{m} e$ , woraus  $e = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$ . Diese Formel gibt den Zusammenhang zwischen den Moduln der Schub- und der Normal-Elasticität.

\*) Die meisten Baumaterialien, wie Eisen und Stein lassen sich wenigstens näherungsweise als isotrope Körper ansehen. Eine Ausnahme macht das Holz. Im Folgenden sind jedoch nur isotrope Körper berücksichtigt.

Setzt man den aufgestellten Werth von  $\epsilon'$  in die Formeln für  $p_{xx}, p_{xy} \dots$  in § 31 und berücksichtigt zugleich die in § 28 gefundenen Werthe

$$\delta_x = \frac{du}{dx}, \delta_y = \frac{dv}{dy}; \delta_z = \frac{dw}{dz}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}; \gamma_{yz} = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}; \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx},$$

so erhält man die Spannungs-Componenten ausgedrückt in den partiellen Differential-Quotienten der Coordinaten-Aenderungen  $u, v, w$ , nämlich

$$1) \begin{cases} p_{xx} = 2e \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}}{m-2} \right\} & p_{yz} = e \left\{ \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right\} \\ p_{yy} = 2e \left\{ \frac{dv}{dy} + \frac{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}}{m-2} \right\} & p_{zx} = e \left\{ \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right\} \\ p_{zz} = 2e \left\{ \frac{dw}{dz} + \frac{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}}{m-2} \right\} & p_{xy} = e \left\{ \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right\} \end{cases}$$

Zwischen diesen 6 Spannungen bestehen die 3 Gleichungen des § 26, welche aussprechen, dass die Componenten-Summe der auf ein unendlich kleines Parallelepipedum wirkenden Kräfte gleich sei dem Produkte aus der entsprechenden Componente der Beschleunigung und der Masse des Parallelepipedums. Für den Fall des Gleichgewichts hat man also die drei Gleichungen

$$2) \begin{cases} \frac{d p_{xx}}{dx} + \frac{d p_{xy}}{dy} + \frac{d p_{xz}}{dz} + \rho q_x = 0 \\ \frac{d p_{xy}}{dx} + \frac{d p_{yy}}{dy} + \frac{d p_{yz}}{dz} + \rho q_y = 0 \\ \frac{d p_{xz}}{dx} + \frac{d p_{yz}}{dy} + \frac{d p_{zz}}{dz} + \rho q_z = 0, \end{cases}$$

worin die Differential-Quotienten partielle sind und  $\rho$  und  $q$  die frühere Bedeutung haben.

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der  $p_{xx}, p_{xy} \dots$  aus den Gleichungen 1, so erhält man drei simultane partielle Differential-Gleichungen 2. Ordnung für die Bestimmung der  $u, v, w$  als Funktionen von  $x, y, z$ . Bei der Integration derselben treten als Integrations-



Constanten Funktionen auf, in denen nur die betreffende Veränderliche fehlt, nach der grade integrirt wurde. Zur Bestimmung derselben stehen die Grenzbedingungen zur Verfügung. Es muss nämlich der äussere Druck in jedem Punkte der Oberfläche nach Richtung und Grösse gegeben sein und ebenso muss die Lage eines Punktes, einer durch diesen und einen benachbarten Punkt gelegten Grade sowie einer durch einen dritten Punkt, der mit den beiden ersten ein unendlich kleines Dreieck bildet, durch jene Grade gezogenen Ebene bekannt sein, damit die Aufgabe überhaupt bestimmt ist.

Würde es gelingen, die vollständige Lösung dieser Differentialgleichungen anzugeben, so wäre damit zugleich die Lösung des allgemeinen Problems der Elasticitätstheorie gefunden. Mit Hülfe der Gleichungen 1 und der übrigen Gleichungen der §§ 26 und 27 könnte man leicht jede Frage, die sich auf den Zustand des deformirten Körpers bezieht, beantworten.

Da sich aber diese allgemeine Lösung nicht angeben lässt, stellt man die Aufgabe umgekehrt, indem man einen bestimmten specialisirten Spannungszustand des betrachteten Körpers voraussetzt und ermittelt, welche äusseren Kräfte denselben hervorzurufen vermögen.

Wir müssen des beschränkten Raumes halber hier auf eine eingehende Darstellung der in dieser Hinsicht durchgeführten Untersuchungen verzichten und begnügen uns damit, im folgenden § in kurzen Umrissen die St. Vénant'sche Theorie der Elasticität cylindrischer Körper zu berühren und deren Resultate zur Lösung praktisch wichtiger Aufgaben zu benutzen. Zum speciellen Studium dieser Probleme verweisen wir auf die Werke von Clebsch und Kirchhoff. Eine gedrängtere Darstellung mit Anwendungen, die sich vorzugsweise auf die Constructionslehre des Maschinenbaues beziehen, findet man bei Grashof\*).

§ 37. Ein cylindrischer Körper befinde sich in einem solchen Gleichgewichtszustande, dass in jedem Punkte desselben die Normalspannung in jeder zur Cylinder-Achse senkrechten Richtung gleich Null und

\*) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.  
Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig 1877.  
Grashof, Festigkeitslehre. Berlin 1866.

ferner die Tangentialspannung in jeder zur Cylinder-Achse parallelen Ebene parallel zu dieser Achse gerichtet sei. Auf die Elemente der cylindrischen Oberfläche soll keinerlei Druck und ebenso soll keine äussere Kraft auf die im Innern gelegenen materiellen Punkte einwirken. Es wird gefragt, welche auf die beiden Endflächen des Körpers wirkenden Kräfte diesen Spannungszustand hervorzurufen vermögen. — Diese Aufgabe wurde zuerst von de St. Vénant behandelt und wird nach ihm das St. Vénant'sche Problem genannt.

Wir betrachten ein Stück des cylindrischen Stabes, das durch die beiden Querschnitte  $F_1$  und  $F_2$  begrenzt wird. Bezeichnen  $A$ ,  $B$  und  $C$  drei in  $F_1$  liegende, ein unendlich kleines Dreieck bildende Punkte, so legen wir ein rechtwinkliges Coordinaten-System in dem Körper dadurch fest, dass vor wie nach der Deformation  $A$  den Ursprung bildet, das Linien-Element  $AB$  mit der  $Y$ -Achse und das Flächen-Element  $ABC$  mit der  $YZ$ -Ebene zusammenfällt. Ist  $A$  ausserdem ein Punkt der Cylinder-Achse, so fällt die  $X$ -Achse mit der Cylinder-Achse zusammen.

Analytisch wird diese Festlegung ausgedrückt durch die Bedingung, dass

$$\text{für } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0$$

Ferner hat man die Voraussetzungen

$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = p_{zy} = 0,$$

womit für jeden Punkt des Körpers aus den Gleichungen 1) folgt

$$3) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{m} \frac{du}{dx} \text{ und} \\ \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} = 0 \end{cases}$$

Die erste, fünfte und sechste der Gleichungen 1) gehen dadurch über in

$$p_{xx} = 2 \frac{1+m}{m} e \frac{du}{dx} = E \frac{du}{dx}$$

$$p_{zx} = e \left\{ \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right\}$$

$$p_{zy} = e \left\{ \frac{dv}{dz} + \frac{du}{dy} \right\}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (2) ein, so erhält man mit Rücksicht auf

$$\frac{d^2v}{dx dy} = - \frac{1}{m} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2w}{dx dz} \text{ (nach Gl. (3) und da}$$

$$E = 2e + \frac{2}{m} e \text{ die Gleichungen}$$

$$4) \begin{cases} 2 \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2u}{dx dy} = 0 \\ \frac{d^2u}{dx dz} + \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

Zu den 6 Gleichungen (3) und (4), die für jeden Punkt des Körpers von den gesuchten Funktionen  $u, v, w$  erfüllt sein müssen, kommen noch die Grenzbedingungen, welche die Lage des Coordinaten-Systems fixiren und die Gleichungen, welche ausdrücken, dass der Druck an der Oberfläche gleich Null sei. Die letzteren erhält man, wenn man die Ausdrücke für die Componenten von  $p_n$  in § 26, wenn  $n$  die Richtung der Normalen zur Cylinder-Fläche bedeutet gleich Null setzt.

Die Bestimmung der Funktionen  $u, v, w$  nach diesen Bedingungen bietet keine besondere Schwierigkeit. Wir wollen jedoch davon absehen, diese Entwicklung hier zu reproduciren und beschränken uns darauf, die Resultate derselben in so fern zu benutzen, als wir den aus denselben hervorgehenden und für uns besonders wichtigen

Werth von  $p_{xx} = E \frac{du}{dx}$  angeben.

Man findet

$$p_{xx} = a + a_1 y + a_2 z + x (a_3 y + a_4 z),$$

worin die Grössen  $a$  Constante bedeuten, die sich mit Rücksicht auf die äusseren Kräfte bestimmen. (Oder präciser ausgedrückt, die auf die Endquerschnitte wirkenden Kräfte müssen der Wahl der Constanten  $a$  entsprechend bestimmt werden).

Für den Querschnitt  $F'$  speziell findet man aus dieser Formel  $p_{xx} = a + a_1 y + a_2 z$ . Bezeichnen nun  $R_x$ ,  $R_y$  und  $R_z$  die Komponentensummen aller rechts vom Querschnitt  $F_1$  angreifenden äusseren Kräfte nach Richtung der Achsen und ebenso  $M_x$ ,  $M_y$  und  $M_z$  die Drehmomenten-Summen dieser Kräfte in Bezug auf die Coordinaten-Achsen, ferner  $\mathcal{I}_y$  und  $\mathcal{I}_z$  die Trägheits-Momente des Querschnitts  $F_1$  in Bezug auf die  $Y$ - resp. die  $Z$ -Achse, so hat man zur Bestimmung der Constanten  $a$ ,  $a_1$  und  $a_2$  die Gleichungen

$$\int p_{xx} dF = R_x$$

$$\int p_{xx} z dF = M_y$$

$$\int p_{xx} y dF = M_z$$

Wenn der Coordinaten-Ursprung  $A$  der Schwerpunkt von  $F_1$  und die  $Y$ - und  $Z$ -Achse Haupt-Achsen des Querschnitts  $F_1$  sind, erhält man hieraus

$$a = \frac{R_x}{F}; \quad a_2 = \frac{M_y}{\mathcal{I}_y}; \quad a_1 = \frac{M_z}{\mathcal{I}_z}$$

und demnach

$$p_{xx} = \frac{R_x}{F} + \frac{M_y}{\mathcal{I}_y} \cdot z + \frac{M_z}{\mathcal{I}_z} \cdot y.$$

Da man den Querschnitt  $F_1$  beliebig in dem Körper annehmen konnte und dabei nur die Voraussetzung machte, dass auf ein zwischen den Querschnitten  $F_1$  und  $F_2$  liegendes Stück des Stabes keine äusseren Kräfte einwirken, gilt die Formel für  $p_{xx}$  in allen Querschnitten. Mit ihrer Hilfe wollen wir nun einige Rechnungen von praktischer Wichtigkeit über die Biegunstheorie der Stäbe durchführen.

§ 38. Wir setzen jetzt voraus, dass ein etwa als Brückenträger dienender Stab an beliebigen Stellen unterstützt und mit beliebigen, senkrecht gerichteten Kräften belastet sei. An beiden Enden soll er ausserdem, um den allgemeinsten Fall zu behandeln, eingemauert sein. Die äusseren Kräfte, welche an den Auflagerstellen auf ihn einwirken, wollen wir uns bereits mit Hilfe der von

Navier in § 375 angegebenen Methode bestimmt denken. Wir machen dabei die weitere Voraussetzung, dass diese Auflager-Reactionen keine horizontale Componenten besitzen. Bei einer Auflagerung des Stabes, wie sie hier angenommen ist, würden allerdings solche horizontale Componenten schon in Folge der Temperatur-Aenderungen auftreten müssen. Wir sehen aber vorläufig von denselben ab und denken uns dieselben später noch besonders berücksichtigt.

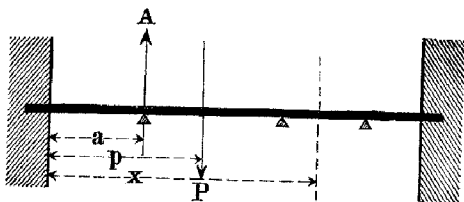
In diesem Falle geht die im vorigen § für  $p_{xx}$  gegebene Formel, da  $R_x = 0$  und  $M_z = 0$  in die einfachere  $p_{xx} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z$  über, die wir in der Folge kürzer

$p = \frac{M}{J} \cdot z$  schreiben wollen. Nach derselben lässt sich bei gegebenem Querschnitt leicht die in jedem Punkte desselben auftretende Normalspannung ermitteln, wenn  $M$  bekannt ist.

Wir bezeichnen ferner mit  $M_0$  das Anfangs-Moment des Stabes, d. h. das Integral der Momente der auf die einzelnen Elemente der Oberfläche des eingemauerten Stab-Endes vom Mauerwerk ausgeübten Druckkräfte, bezogen auf die durch den Schwerpunkt des ersten Querschnittes des freien Stabtheiles gezogene  $Y$ -Achse.  $A_0$  sei die algebraische Summe, der in der Einmauerung ausgeübten vertikalen Druckkräfte;  $P$  irgend eine der gegebenen Belastungen und  $p$  deren Abscisse, ebenso  $A$  irgend einer der von den Mittelstützen ausgeübten Auflagerdrucke und  $a$  die Abscisse dieses Auflagerpunktes;  $M_x$  bedeute, abweichend von der Bezeichnung im vorigen § das statische Moment aller links vom Querschnitte  $x$  angreifenden äusseren Kräfte in Bezug auf die neutrale Achse dieses Querschnittes, dann ist

$$M_x = M_0 + \sum_0^x A(x-a) - \sum_0^x P(x-p).$$

Fig. 76.



Wird die Aufgabe gestellt, bei konstantem Querschnitte des Stabes die am Meisten gefährdete Stelle, d. i. zunächst jene Stelle zu finden, bei der  $p_{xx}$  den grössten Werth annimmt, so hat man den Ausdruck für  $M_x$  nach  $x$  zu differenziren und den Differential-Quotienten gleich Null zu setzen.

$$\frac{dM_x}{dx} = \sum_0^x A - \sum_0^x P = V_x,$$

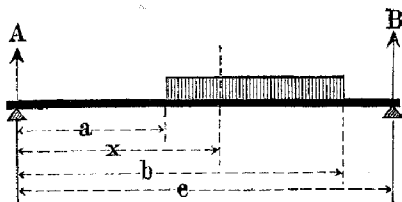
wenn wir unter  $V_x$  die sogen. Scheerkraft des Querschnittes, d. i. die algebraische Summe aller links von  $x$  auf den Stab einwirkenden vertikalen äusseren Kräfte verstehen.

Das Moment und damit  $p_{xx}$  wird also dort am Grössten, wo die Scheerkraft gleich Null ist, resp. ihr Vorzeichen wechselt. In der Mitte der Spannweiten kann  $V_x$  bei wachsender Abscisse nur kleiner werden, desshalb giebt es dort nur Maxima als Grenzwerte. Ändert dagegen  $V_x$  sein Vorzeichen bei einem Auflagerpunkt, so tritt an dieser Stelle ein Minimum, d. i. ein negatives Maximal-Moment ein.

Mit Hülfe dieser Regel, die sich auch für den Fall einer kontinuierlich vertheilten Belastung leicht nachweisen lässt, kann man auf sehr einfache Weise die durch Normalspannungen am Meisten gefährdeten Querschnitte eines cylindrischen Stabes ermitteln.

Als Beispiel einer solchen Ermittlung dieses sogen. gefährlichsten Querschnittes betrachten wir den von Navier in § 362 behandelten Fall eines auf zwei in gleicher Höhe liegenden Stützen frei aufruhenden Stabes, der auf einer gewissen Strecke  $MN$  seiner Spannweite eine gleichmässig vertheilte kontinuierliche Belastung  $q$  pro Längen-Einheit zu tragen hat.

Fig. 77.



Mit Rücksicht auf die in die Figur eingeschriebenen Bezeichnungen hat man

$$A = q \left\{ b - a - \frac{b^2 - a^2}{2l} \right\} \text{ und } B = q \frac{b^2 - a^2}{2l}.$$

Zunächst sieht man unmittelbar ein, dass das Maximal-Moment in irgend einem Querschnitte der Strecke  $MN$  eintreten wird. Der Ausdruck für das Moment  $M_x$  für irgend einen solchen Querschnitt  $x$  lautet

$$M_x = q \left\{ b - a - \frac{b^2 - a^2}{2l} \right\} x - q \frac{(x - a)^2}{2}$$

$$\frac{d M_x}{d x} = q \left\{ b - a - \frac{b^2 - a^2}{2l} \right\} - q (x - a) = V.$$

Setzt man diesen Werth = Null und lös't nach  $x$  auf, so ergibt sich als Abscisse des gefährlichsten Querschnittes

$$x = b - \frac{b^2 - a^2}{2l}.$$

Zu demselben Resultate wäre man gelangt, wenn man den Querschnitt  $x$  so bestimmt hätte, dass der links davon gelegene Theil der Belastung gleich dem Auflagerdrucke  $A$  geworden wäre. — Das Maximal-Moment erhält man durch Einsetzen des für  $x$  gefundenen Werthes in den Ausdruck für  $M$  zu

$$M_{max} = 2 q \left\{ (b^2 - a^2) \frac{l - b}{l} + \left( \frac{b^2 - a^2}{2l} \right)^2 \right\},$$

woraus sich  $p_{max}$  leicht bestimmen lässt.

In § 365 des Navier'schen Textes findet man für einen frei-aufliegenden cylindrischen Stab die Behauptung: „Der Punkt, in welchem die Neigung zum Bruche am grössten ist, liegt stets in der Vertikalen, welche durch den Schwerpunkt der Gewichte geht, mit denen der Stab belastet ist“. An der Hand der oben gegebenen Entwicklungen sieht man leicht ein, dass diese Behauptung im Allgemeinen falsch ist.

§ 39. Genauere Bestimmung der grössten in einem gebogenen Stabe vorkommenden Spannung.

Im vorigen § wurde vorausgesetzt, dass die gefährlichste in einem Stabe vorkommende Spannung eine zum Querschnitte senkrechte Normalspannung, d. i. eine

Spannung  $p_{xx}$  sei. Für die meisten praktischen Anwendungen ist diese Annahme aus Gründen, die weiter unten angedeutet werden sollen, zulässig. Nur dann, wenn der gebogene Stab einen doppel  $T$  förmigen oder ähnlichen Querschnitt besitzt, wird zuweilen eine genauere Untersuchung nothwendig.

Da aber grade diese Querschnittsform eine besondere praktische Wichtigkeit hat, wollen wir unter gewissen Voraussetzungen eine genauere Theorie für dieselbe angeben.

Wir denken uns den Träger in solcher Lage gegen das Coordinatensystem, dass seine vertikale Symmetrie-Ebene mit der  $XZ$ -, die horizontale Symmetrie-Ebene desselben mit der  $XY$ -Ebene und die  $YZ$ -Ebene mit dem Anfangs-Querschnitte zusammenfalle. Sämmtliche äusseren Kräfte wirken in vertikaler Richtung in der  $XZ$ -Ebene.

Von den in § 37 gemachten Voraussetzungen, dass für jeden Punkt

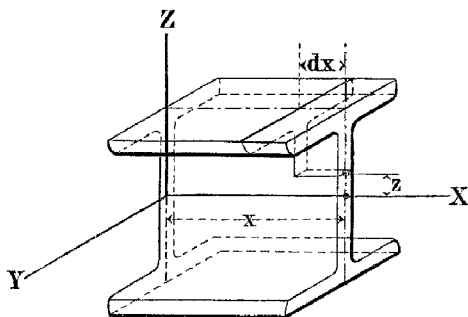
$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0 \quad \text{und} \quad p_{yz} = 0$$

darf man, um einigermaßen streng zu verfahren, hier eigentlich nur die erste zugeben. Wir nehmen aber an, dass trotzdem die auf Grund dieser Voraussetzungen abgeleitete Formel

$$p_{xx} = \frac{M}{J} z,$$

auch für unsern Fall zutreffend sei.

Fig. 78.



Diese Annahme ist zwar ziemlich willkürlich. Da aber die auf Grund derselben durchgeführten Rechnungen eine völlig genügende Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigen,



ist man berechtigt, dieselbe wenigstens als annähernd richtig anzusehen.

Wir denken uns durch die Punkte  $x$  und  $x + dx$  der  $X$ -Achse zwei Querschnitte und ausserdem eine zur  $XY$ -Ebene parallele Ebene gezogen, die jene Querschnitte in horizontalen Linien mit dem Abstände  $z$  von der  $XY$ -Ebene schneidet. Durch diese 3 Ebenen und die Oberfläche des Balkens wird eine unendlich dünne Scheibe begrenzt, für die wir die Gleichgewichtsbedingung gegen eine Verschiebung im Sinne der  $X$ -Achse aufstellen.

Auf die von den Querschnitten gebildeten Oberflächen der Scheibe wirken im Sinne der  $X$ -Achse die Kräfte  $\int p_{xx} dF$  und  $-\int (p_{xx} + dp_{xx}) dF$ , die Integration über den betreffenden Theil des Querschnittes ausgeführt gedacht. Die Summe beider Kräfte gibt

$$- dx \int \frac{dp_{xx}}{dx} dF$$

da  $dx$  als konstant zu betrachten.

Mit dieser Componente muss Gleichgewicht halten die Summe der im Sinne der  $X$ -Achse wirkenden Componenten der in der unteren Begrenzung der Scheibe übertragenen Kräfte, also, wenn mit  $b$  die Querschnittsbreite, gemessen in einer zur  $Y$ -Achse parallelen Linie mit den Abständen  $x$  und  $z$  verstanden wird

$$- dx \int \frac{dp_{xx}}{dx} dF + dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} p_{xz} dy = 0.$$

Löscht man den gemeinschaftlichen Faktor  $dx$  und führt für  $p_{xx}$  den angenommenen Werth ein, so wird daraus

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} p_{xz} dy = \frac{dM}{dx} \frac{1}{\gamma} \int z dF = \frac{V}{\gamma} S_z,$$

wenn mit  $S_z$  das statische Moment des oberhalb der Horizontalen  $z$  liegenden Querschnittstheiles bezogen auf die neutrale Achse des Querschnitts verstanden wird.

Jetzt führen wir die wichtige, die Richtigkeit des Resultates beschränkende Voraussetzung ein, dass  $p_{xz}$ , wenigstens an jener Stelle, die wir betrachten, also in der zur  $Y$ -Achse parallelen Linie mit den Coordinaten  $x$  und  $z$  unabhängig von  $Y$  sei. Dann ergibt sich leicht

$$p_{xz} = \frac{V \cdot S_z}{b \cdot \bar{y}}.$$

Innerhalb der Flanschen wird die gemachte Voraussetzung allerdings nicht zutreffen, wohl aber wird man sie für die Mittelrippe annehmen dürfen. Für die letztere gilt also das erlangte Resultat zunächst allein; für die Flanschen wird dadurch nur ein Mittelwerth der Spannung  $p_{xz}$  längs jener Horizontalen angegeben.

Man sieht übrigens leicht ein, dass die genauere Kenntniss der Vertheilung von  $p_{xz}$  längs der Querschnittsbreite in den Flanschen nur von untergeordneter Bedeutung ist, da beim Uebergange der Mittelrippe in den Flansch bei wachsendem  $z$   $p_{xz}$  ausserordentlich rasch abnimmt. Es wächst nämlich an jener Stelle  $b$  sehr rasch mit  $z$  und gleichzeitig nimmt  $S_z$  sehr rasch mit wachsendem  $z$  ab.

Am grössten wird  $p_{xz}$  in der neutralen Faser (in der  $XY$ -Ebene), da dort  $S_z$  den grössten und  $b$  den kleinsten vorkommenden Werth annimmt. Nicht sehr viel kleiner wird dagegen bei dem von uns vorausgesetzten Doppel T förmigen Profil die Spannung  $p_{xz}$  kurz vor dem Uebergange der Mittelrippe in den Flansch. Die Breite  $b$  ist dort nicht oder doch nur unwesentlich grösser als bei  $z=0$  und ebenso ist das statische Moment  $S_z$  nur wenig kleiner geworden.

Die Spannung  $p_{xz}$  bestimmt sich unter derselben Voraussetzung, dass sie unabhängig von  $y$  sei, leicht durch Betrachtung des Gleichgewichts unserer Scheibe gegen eine Verschiebung im Sinne der  $Z$ -Achse.

Bezeichnet man die Belastung des Balkens pro lfd. Meter mit  $q$  und abstrahirt von dem Eigengewicht, so hat man

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \int p_{xz} dy - \int dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (p_{xz} + dp_{xz}) dy + dx \int p_{xz} dy - q dx = 0$$

oder da

$$\int dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} p_{xz} dy - \int dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (p_{xz} + dp_{xz}) dy = -dx \int \frac{dp_{xz}}{dx} dF$$

$$\int p_{xz} dy = q + \frac{dV}{dx} \frac{1}{\mathcal{F}} \int \frac{S_z}{b} dF.$$

Der Werth, welcher auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen steht ist eine Funktion von  $z$  allein und man hat daher

$$\int \frac{S_z}{b} dF = \int dz \int \frac{S_z}{b} dy = \int S_z dz = \int dz \int dz \int z dy = \int dz \int b z dz.$$

Das letzte Integral lässt sich nicht weiter ausführen, wenn  $b$  nicht als Funktion von  $z$  gegeben ist. Ist das Profil des Balkens gegeben, so kann man leicht durch eine mechanische Quadratur den Werth dieses Integrales, den wir mit  $H_z$  bezeichnen wollen, als Funktion von  $z$  graphisch darstellen. Die Bestimmung von  $H_z$  macht nicht mehr Schwierigkeit als die Bestimmung von  $\mathcal{F}$ , mit welch' letzterem es von derselben Dimension ist.

Man findet jetzt für  $p_{xz}$  wenn man es unabhängig von  $y$  annimmt und berücksichtigt, dass  $\frac{dV}{dx} = -q$  ist

$$p_{xz} = q \frac{1 - \frac{H_z}{\mathcal{F}}}{b}$$

Mit Hülfe der für  $p_{xx}$ ,  $p_{yx}$  und  $p_{zz}$  aufgestellten Ausdrücke kann man jetzt leicht die in irgend einem Punkte des Stabes auftretenden Hauptspannungen bestimmen, wenn man noch die Voraussetzung macht, dass zwei der letzteren parallel zur  $XZ$ -Ebene gerichtet sind, also von der Wirkung der Spannungen  $p_{yy}$ ,  $p_{yz}$  und  $p_{xy}$  absieht, wie dies für die Mittelrippe zulässig erscheint.

Wir bezeichnen, wie im zweiten Abschnitte, mit  $p_n$  die Schärfe der auf ein Flächen-Element im Punkte  $xyz$ , dessen Normale mit den Achsen  $XYZ$  resp. die Winkel  $90^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ$  und  $\alpha$  bildet, wirkenden Spannung, ferner mit  $p_{nx}$  und  $p_{nz}$  die Componenten von  $p_n$  im Sinne der  $X$ - und  $Z$ -Achse, ebenso mit  $p_{nn}$  die Normal- und mit

$p_{nt}$  die Tangential-Componente von  $p_n$ . Es bestehen dann den in § 26 gegebenen Entwicklungen zufolge die Gleichungen

$$p_{zz} \cos \alpha + p_{xz} \sin \alpha + p_{nz} = 0$$

$$p_{xx} \sin \alpha + p_{zx} \cos \alpha + p_{nx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich für  $p_n$

$$p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{nz}^2} = \sqrt{p_{zz}^2 \cos^2 \alpha + p_{xz}^2 \sin^2 \alpha + p_{xz}^2 + \sin 2\alpha p_{xz} (p_{zz} + p_{xx})}.$$

Differenziert man diesen Werth von  $p_n$  nach  $\alpha$  und setzt den Differential-Quotienten  $= 0$ , so findet man als Bedingung für die Grenzwerte

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 p_{xz}}{p_{zz} - p_{xx}}$$

Die hieraus folgenden beiden Werthe von  $\alpha$  hat man in die Formel für  $p_n$  einzusetzen, um damit sofort den Ausdruck für die Hauptspannungen zu erhalten.

Man erleichtert sich diese Rechnung etwas, wenn man  $p_{zz}$  in den obigen Formeln vernachlässigt. Man begeht damit nur einen unbedeutenden Fehler, da in allen praktisch-wichtigen Fällen  $p_{zz}$  gegen  $p_{xx}$ , neben dem es als Summand auftritt, sehr klein zu sein pflegt. Mit Berücksichtigung dieser Vernachlässigung geht der Ausdruck für die beiden Grenzwerte der Spannung in Punkte  $xyz$  über in

$$p_{nn}^{max} = \sqrt{p_{xx}^2 + \frac{1}{2} p_{xz}^2 \pm \frac{1}{2} p_{xz} \sqrt{p_{xx}^2 + 4 p_{xz}^2}}.$$

Was die Tangential-Componente  $p_{nt}$  von  $p_n$  betrifft, so findet man für dieselbe leicht

$$p_{nt} = p_{xz} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (p_{zz} + p_{xx}).$$

Die beiden Grenzwerte derselben treten ein für  $\alpha = 45^\circ$ , resp.  $= 135^\circ$ . Man erhält demnach

$$p_{nt}^{max} = p_{xz} \pm \frac{p_{xx} + p_{zz}}{2}.$$

Wird in der Formel für  $p_{nn}^{max}$   $p_{xz} = 0$  gesetzt, so kommt  $p_{nn}^{max} = p_{xx}$  und ebenso wenn  $p_{xx} = 0$   $p_{nn}^{max} = p_{zz}$ .

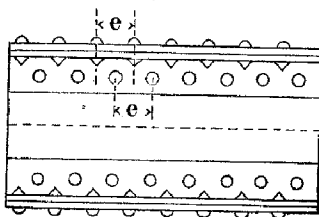
Es geht daraus hervor, dass  $p_{nn}^{max}$  nur an solchen

Stellen einen besonders grossen Werth, der vielleicht noch grösser als die grösste im Balken vorkommende Spannung  $p_{xx}$  ausfällt, erreichen kann, für die  $p_{xx}$  und  $p_{xz}$  beide gross ausfallen. Das ist zunächst nur bei solchen Profilen möglich, bei denen das Material vorzugsweise in Flanschen untergebracht ist, also bei Doppel T Trägern. In der Regel pflegt aber auch bei solchen Trägern das grösste  $p_{nn}^{max}$  das grösste  $p_{xz}$  nicht oder nur unerheblich zu übersteigen.

Es hat dies seinen Grund in dem Umstande, dass die grössten Werthe von  $p_{xx}$  in jenen Querschnitten auftreten, für die das Biegungs-Moment  $M$  ein Maximum ist, resp. in der Nähe dieser Querschnitte. Für jene Querschnitte ist aber, wie wir in § 38 zeigten  $V = 0$  oder in ihrer Nähe nur klein, also auch  $p_{xz} = 0$  resp. nur klein.

§ 40. Berechnung genieteter Blechbalken. Ist ein auf Biegung angestrenzter Balken von I förmigem Querschnitte durch Zusammennieten einer Mittelrippe mit Gurtungsplatten vermittelt Winkel-Eisen hergestellt, so müssen die Niete so berechnet werden, als wenn sie die ganzen Kräfte zu übertragen hätten, die an jener Stelle im Innern übertragen würden, wenn der Träger aus einem Stücke bestände. Allerdings wird auch wenigstens ein Theil dieser Kräfte durch die zwischen den Winkeln und

Fig. 79.



Platten durch die Nietung erzeugte Reibung aufgenommen, die aber bekanntlich und mit Recht bei der Berechnung der Niete nicht berücksichtigt zu werden pflegt.

Mit Hülfe der in dem vorigen § durchgeführten Untersuchungen kann man sehr leicht die Kraft berechnen, die ein Niet zu übertragen hat, der die Mittelrippe mit den Gurtungswinkeln verbindet. Bezeichnet man die Entfernung der Nietmittelpunkte von einander mit  $e$ , die vom Niet aufzunehmende Kraft mit  $P$ , so kann man setzen

$$P = e \frac{V \cdot S_z}{f}$$

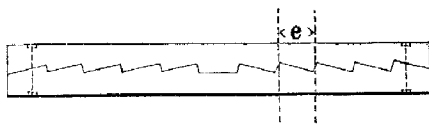
unter  $S_z$  das statische Moment der Querschnitte der Gurtungs-Winkel und Platten in Bezug auf die neutrale Achse verstanden. Diese Formel geht nämlich einfach aus der im vorigen § für  $p_{xz}$  gegebenen hervor, wenn man bedenkt, dass für die kurze Strecke  $e$  sich  $V$  wenig ändert. Vernachlässigt ist bei dieser Formel der Einfluss von  $p_{zz}$ , wie dies auch stets wird geschehen können.

Man kann hieraus leicht entweder  $e$  oder den erforderlichen Bolzendurchmesser berechnen, wenn man die zwischen dem Bolzendurchmesser und  $e$  bestehende Gleichung berücksichtigt. — Erwähnt sei noch, dass, wie aus der Gleichung für  $P$  hervorgeht, die Niete in der Nähe der Auflager im Allgemeinen am dichtesten aufeinander folgen müssen, während die Zwischenräume in der Mitte der Oeffnung erheblich grösser werden können.

§ 41. Berechnung verzahnter Balken. Die Berechnung der Zähne oder Dübel verzahnter oder verdübelter Balken kann fast genau so durchgeführt werden, wie die Berechnung der Niete im vorigen §.

Wie aus der in § 39 für  $p_{xz}$  aufgestellten Formel hervorgeht, ist  $p_{xz}$  in jedem Querschnitte am Grössten

Fig. 80.



für die Punkte der neutralen Achse. Legt man nun zwei Balken ohne innigere Verbindung aufeinander, so werden

sie zusammen noch einmal so viel zu tragen vermögen als jeder einzeln. Werden sie dagegen fest mit einander verbunden, so dass sie sich wie aus einem Stücke bestehend verhalten, dann trägt ein solcher Balken (wie aus der Formel für  $p_{xz}$  hervorgeht) das Vierfache der Last, die jeder einzelne zu tragen vermag.

Damit sich die Vereinigung beider Balken wie ein einziger Balken während der Durchbiegung verhalte, ist es nöthig, die Spannungen  $p_{xz}$  in der Trennungsfläche, welche sonst durch die Cohäsion des Materiales auf-

genommen werden, hier auf andere Weise zu übertragen. Dies geschieht aber durch die Anwendung von Zähnen oder Dübeln.

Wird der Druck auf einen Zahn resp. Dübel mit  $P$  und die Zahnlänge resp. die Entfernung der Dübel mit  $e$  bezeichnet, so hat man wie oben

$$P = e \frac{V \cdot S_z}{f}$$

hier lässt sich  $S_z$  noch etwas näher berechnen. Wird die Höhe des ganzen verzahnten Balkens mit  $h$ , die Breite desselben mit  $b$  und die Höhe der Zähne mit  $c$  bezeichnet, so hat man

$$S_z = b \left\{ \frac{h-c}{2} \right\} \frac{h+c}{4} = \frac{b}{8} (h^2 - c^2)$$

und daher

$$P = e \frac{b}{8} (h^2 - c^2) \frac{V}{f}$$

unter  $V$  den Mittelwerth für die Strecke  $e$  verstanden.

Wird noch der Druck auf die Flächen-Einheit des Zahnes mit  $k$  bezeichnet und die Fläche desselben  $= b \cdot c$  gesetzt, so ist

$$k = e \frac{h^2 - c^2}{8c} \frac{V}{f},$$

wofür man auch schreiben kann

$$K = \triangle M \frac{h^2 - c^2}{8fc}$$

unter  $\triangle M$  die Differenz der Biegungs-Momente zu Anfang und Ende der Strecke  $e$  verstanden.

## Vierter Abschnitt.

### Theorie des Fachwerks.

§ 42. Unter einem Fachwerk versteht man gewöhnlich eine Verbindung von Stäben, die gelenkartig mit einander derart verbunden sind, dass eine Form-Aenderung des Systems nur durch eine Form-Aenderung der einzelnen Constructionsglieder erfolgen kann. Bei einer solchen elastischen Form-Aenderung sollen sich die einzelnen Stäbe ohne Reibung um ihre Gelenk-Mittelpunkte drehen können. Ausserdem werden wir uns hier nur mit ebenem Fachwerk beschäftigen, d. h. voraussetzen, dass sämtliche Stab-Mittellinien wie sämtliche am System angreifenden Kräfte in derselben Ebene liegen.

Ein Fachwerk besteht demnach aus zweierlei Constructionselementen, nämlich geometrisch gesprochen aus Punkten den sogenannten Knotenpunkten, an denen sich Kräfte im Gleichgewicht halten und aus Linien, die jene Punkte nahezu starr (d. h. starr dann, wenn man von den als sehr klein voranzusetzenden elastischen Form-Aenderungen absieht) miteinander verbinden. Die ersteren werden konstruktiv verwirklicht durch die Gelenkbolzen, die letzteren durch Stäbe. Die besondere Form und Gestalt dieser Stäbe soll uns dabei vorläufig ganz gleichgültig sein, wenn wir sie nur als constructive Repräsentanten jener nahezu unveränderlichen Verbindungslinien der Knotenpunkte betrachten können.

In einem Knotenpunkte können entweder zwei oder mehr Stäbe mit einander verbunden sein. Wir theilen die Knotenpunkte hiernach in zwei- und in mehrgliedrige ein. Ebenso muss ein Stab an mindestens zwei, er kann aber auch an mehr Knotenpunkten befestigt sein. Wäre ein Stab nämlich nur an einem Knotenpunkte befestigt, so stände nichts im Wege, ihn um diesen frei zu drehen, was der Definition des Fachwerks widerspräche. Wir treffen hiernach die Eintheilung in zwei- und in mehrgelenkige Stäbe. Bei den mehrgelenkigen Stäben bleibt noch zu unterscheiden, ob sämtliche Gelenk-Mittelpunkte in derselben Graden liegen oder nicht. In ersterem Falle sollen die Stäbe kurzweg gradlinige genannt werden.



Die Haupt-Aufgabe der Theorie des Fachwerks ist die folgende:

Auf ein Fachwerk wirkt ein System äusserer Kräfte. Man soll die in Folge dessen zwischen den Knotenpunkten (d. i. den Gelenkbolzen) und den Stäben übertragenen Kräfte bestimmen.

Diese Haupt-Aufgabe lässt sich ganz allgemein auch für den Fall einer Bewegung behandeln. Wir wollen jedoch, da dieser einfachere Fall vorläufig der einzige ist, der unser Interesse beansprucht, voraussetzen, dass sich das System im Gleichgewicht befinde. Damit dies zutreffe muss die Resultirende aller am System angreifenden äusseren Kräfte = Null sein, was sich bekanntlich durch drei von einander unabhängige Gleichungen ausdrücken lässt.

Ein Fachwerk kann übrigens bei beliebig gegebenen äusseren Kräften leicht dadurch genöthigt werden, seine relative Lage gegen die Constructions-Ebene zu behalten, wenn man mindestens zwei Elemente desselben festhält. Es ist hinreichend, entweder mindestens zwei Punkte desselben festzuhalten oder einen Punkt festzuhalten und eine Grade desselben zu nöthigen, fortwährend mit einer gegebenen Graden der Constructions-Ebene zusammenzufallen oder schliesslich zwei Grade des Fachwerks zu nöthigen, fortwährend mit zwei festen Graden der Constructions-Ebene zusammenzufallen.

Ausser dieser mindestens nöthigen Zahl von festgehaltenen Punkten oder Graden können indessen noch andere festgehaltene Elemente vorhanden sein. Wir nennen die festgehaltenen Elemente die Auflager-Elemente des Fachwerks.

Bei der Lösung unserer allgemeinen Haupt-Aufgabe sind zwei wichtige Fälle zu unterscheiden. Entweder ist eine Lösung auf rein statischem Wege möglich, (wobei man nämlich die Constructionslieder als starre Körper betrachtet) oder man muss die Elasticitätsgesetze zu Hülfe nehmen. Im ersteren Falle heisst das Fachwerk ein statisch bestimmtes, im letzteren ein unbestimmtes.

Von allen möglichen Fachwerken sind bisher fast ausschliesslich solche angewendet worden, die nur aus

zweigelenkigen Stäben (und in Folge Dessen aus vorwiegend mehrgliedrigen Gelenken) bestehen. Es ist dies vielleicht zum Theil dem Mangel einer allgemeinen Theorie, hauptsächlich aber wohl dem Umstande zuzuschreiben, dass diese Constructions-Art, wie es den Anschein hat, in der That die günstigste ist. Doch würde es übereilt erscheinen, wenn man jetzt schon behaupten wollte, dass sich nicht auch ebenso günstige Fachwerke aus mehrgelenkigen Stäben konstruiren liessen.

Wir wenden uns jetzt zur Behandlung des aus durchweg zweigelenkigen Stäben bestehenden statisch bestimmten Fachwerks.

### Das statisch bestimmte Fachwerk aus zweigelenkigen Stäben.

§ 43. Zunächst sei vorausgesetzt, dass die äusseren Kräfte nur an den Knotenpunkten angreifen. Auch von dem Eigengewichte der Stäbe soll hier vorläufig abgesehen werden.

Es wirken in diesem Falle auf jeden Stab nur zwei Kräfte ein, die an den Knotenpunkten auf ihn übertragen werden. Diese beiden Kräfte müssen, wenn der Stab im Gleichgewicht sein soll, in derselben Graden, also in der Verbindungslinie der beiden Gelenk-Mittelpunkte wirken, von gleicher Grösse und entgegengesetzt gerichtet sein. Wir nennen diese beiden Kräfte, wenn sie einander zugekehrte Pfeile besitzen, die Druckspannung, im entgegengesetzten Falle die Zuspansung des Stabes. Unsere im vorigen § aufgestellte Haupt-Aufgabe reducirt sich demnach hier auf die Bestimmung sämtlicher Stabspannungen.

Die Anzahl der Knotenpunkte des Fachwerks sei  $n$ , die der Stäbe  $m$ . Für jeden Knotenpunkt lassen sich als Gleichgewichtsbedingungen der an demselben angreifenden Kräfte bekanntlich zwei von einander unabhängige Gleichungen, also im Ganzen  $2n$  Gleichungen aufstellen. Jeder Knotenpunkt und daher auch das ganze Fachwerk ist im Gleichgewicht, wenn diese zwei  $2n$  Gleichungen sämtlich erfüllt sind. Man erkennt daraus, dass die 3 allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche von den am System angreifenden äusseren Kräften erfüllt sein

müssen, in unseren  $2n$  Gleichungen bereits enthalten sind. Zieht man die letzteren von jenen ab, so bleiben  $2n - 3$  Gleichungen übrig.

Ist  $m = 2n - 3$ , so lassen sich sämtliche Stabspannungen auf rein statischem Wege ermitteln, d. h. das System ist ein statisch bestimmtes. Für  $m > 2n - 3$  ist das System ein unbestimmtes und für  $m < 2n - 3$  ein überbestimmtes oder labiles, das nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn die äusseren Kräfte derartig vertheilt sind, dass sich — gewissermassen zufällig — die übrigbleibenden Gleichungen ebenfalls erfüllen.

Die Aufgabe, die Bedingungen für die statische Bestimmtheit eines Systems zu ermitteln, lässt jedoch noch eine allgemeinere und weit fruchtbarere Behandlung zu. Wir wenden zu diesem Zwecke den festgehaltenen Elementen des Fachwerks unsere Aufmerksamkeit zu und wollen dabei der Einfachheit halber voraussetzen, dass nur Knotenpunkte (keine Stäbe) als Auflager-Elemente verwendet seien. Dieser Fall ist in der That der einzige von praktischer Bedeutung. Man kann allerdings auch Stäbe als Auflager-Elemente benützen (die dann genöthigt werden müssen, stets mit derselben festen Graden der Constructions-Ebene zusammenzufallen, aber längs derselben sich verschieben können), hat aber *n W* bisher noch keine praktische Anwendung davon gemacht. \*)

Wir nehmen an, es seien  $O$  Knotenpunkte als Auflager-Elemente verwendet. Bei einigen dieser  $O$  Auflager-Knotenpunkte kann noch eine besondere Auflager-Bedingung vorgeschrieben sein. Wir wollen nämlich annehmen, dass bei  $p$  dieser Auflagerknoten (wo  $p < O$ ) die Richtung des Auflagerdruckes (durch Anbringung eines Walzenlagers) resp. die Grösse einer Componente (durch eine künstliche Spannung) zum Voraus gegeben sei. Von den äusseren am Fachwerk angreifenden Kräften sind alsdann die  $O$  Auflagerdrücke nicht vollständig bekannt und zwar bleiben zu deren Kenntniss  $2O - p$  Unbekannte zu bestimmen. Dabei muss aber

jedenfalls  $2O - p \leq 3$  sein.

\*) Etwas Näheres über diesen Gegenstand findet man in des Verfassers: Föppl, Neue Träger-Systeme für eiserne Brücken. Leipzig 1878.

Mit den  $m$ -Stabspannungen zusammen hat man also  $m + 2O - p$  Unbekannte, zu deren Bestimmung bei einem statisch bestimmten Fachwerk die  $2n$  Gleichungen grade ausreichen müssen.

Man ist also stets im Stande, zwischen beliebig gegebenen Auflagerpunkten ein statisch bestimmtes Fachwerk zu konstruieren, da sich der Gleichung

$$2n = m + 2O - p$$

immer genügen lässt. Dabei ist in dem Begriffe

Fig. 81 a.

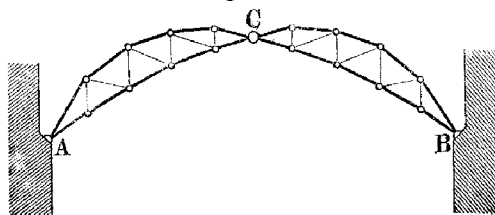
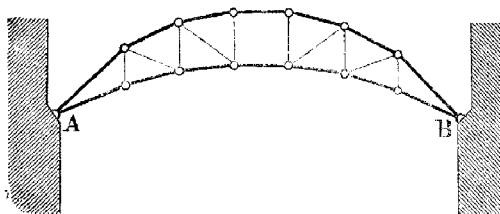


Fig. 81 b.



„statisch bestimmt“ eingeschlossen, dass sich auch sämtliche Auflagerkräfte auf rein statischem Wege berechnen lassen.

Die Möglichkeit der Construction statisch bestimmter Fachwerke bei beliebig gegebenen Auflager-

Dispositionen ist überdies noch eine unendlich mannigfaltige. Um ein kleines Beispiel zu geben, skizziren wir hier einen neuen statisch bestimmten Bogenträger, der uns durchaus nicht ungeeignet erscheint, den ebenfalls verzeichneten und längst bekannten „Bogenträger mit 3 Charnieren“ in manchen Fällen zu verdrängen. Man sieht übrigens unmittelbar ein, dass die Idee, welche diesem neuen Träger zu Grunde liegt, die mannigfaltigsten Modificationen zulässt. Um so mehr dürfen wir

hoffen, dass man denselben auch praktisch verwendbar finden wird. \*)

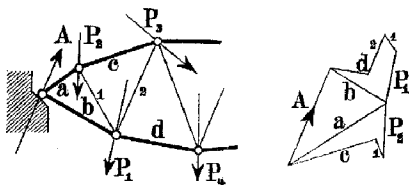
Die Bestimmung der Stabspannungen in dem statisch bestimmten Fachwerk bietet nach den vorausgegangenen Bemerkungen nicht die geringste Schwierigkeit. Man hat, um unsere Haupt-Aufgabe zu lösen, einfach jene  $2n$ -Gleichungen, die in Bezug auf alle Unbekannte linear sind, nach diesen aufzulösen. Indessen pflegt dieser direkte Weg ein sehr mühsamer und langwieriger zu sein. Man zieht es deshalb in den meisten Fällen vor, mit Hilfe irgend einer einfacheren Betrachtung zunächst die Auflager-Unbekannten zu bestimmen und darauf entweder nach der graphischen Methode oder durch Führen eines ideellen Schnittes, der die Construction in zwei Theile trennt, die Stabspannungen zu bestimmen.

Um den uns zur Verfügung stehenden Raum nicht zu überschreiten, müssen wir uns bei der Beschreibung dieser leicht verständlichen und allerwärts bekannten Methoden, die neuerdings ihren Weg sogar in die niederen technischen Lehr-Anstalten gefunden haben, kurz fassen. Namentlich setzen wir auch voraus, dass die Auflager-Unbekannten bereits bestimmt seien und es sich somit nur noch um die Ermittlung der Stab-Spannungen handle.

### I. Die graphische Methode.

Die in der Praxis vorkommenden Fachwerke sind gewöhnlich nach der nebenstehenden Skizze konstruirt, d. h. der Auflagerknoten pflegt ein zweigliedriges Gelenk zu sein, während die übrigen Knoten mehrgliedrig sind, derart, dass durch jeden Stab ein Schnitt geführt werden kann, der die Construction in zwei Theile trennt und ausser dem betrachteten Stabe nur noch zwei

Fig. 82.



zwei Theile trennt und ausser dem betrachteten Stabe nur noch zwei

\*) Wir behalten uns vor, über diesen hier zum ersten Male veröffentlichten „Bogenträger mit 6 Charnieren“ an anderem Orte eingehender zu berichten.  
Der Verfasser.

andere trifft. Die Figur des Stabsystems entsteht hier durch ein einfaches Aneinanderlegen von Dreiecken.

$A$  sei der bekannte Auflagerdruck,  $P_1 P_2 \dots$  die bekannten Belastungen. Man fängt dann mit dem Auflagerknoten an und bestimmt die beiden an ihm angreifenden unbekannten Stabspannungen so, dass sie Gleichgewicht mit  $A$  halten. Dies ist bekanntlich der Fall, wenn sich aus sämtlichen am Punkte angreifenden Kräften ein geschlossenes Polygon konstruiren lässt. Man konstruirt also nebenan in parallel verschobener Lage ein Dreieck, dessen eine Seite nach irgend einem Kräfte-Maassstabe  $= A$  (nach Richtung und Grösse) gemacht wird. Dann stellen die beiden anderen Seiten, die parallel den beiden Stäben des Auflagerknotens gezogen werden, die Spannungen dieser Stäbe dar. Hierauf geht man zu dem nächsten oberen Knoten über, an dem jetzt nur noch zwei unbekannte Kräfte wirken, die sich also durch Construction des Kräftepolygons bestimmen lassen, dann zum nächsten unteren Knoten u. s. w.

Wir haben in der Figur nur ein Stück des Fachwerks angegeben, das sich in dieser Weise beliebig fortgesetzt denken lässt. Zu den ersten Knoten haben wir die zugehörigen Kräftepolygone angedeutet. Die letzteren pflegt man mit ihren gleichen Seiten aneinander zu legen und nennt die dadurch gebildete Figur den Kräfteplan.

Erwähnt sei noch, dass die hier unter II. angegebene analytische Methode ebenfalls eine elegante graphische Behandlung zulässt.

Eine eingehende Erörterung der graphischen Methoden und namentlich auch der interessanten Beziehungen zwischen dem Stabsystem und dem Kräfteplan findet man bei Culmann.\*)

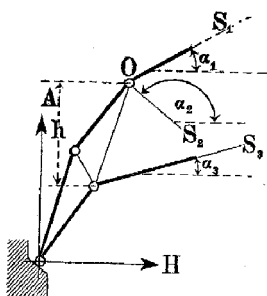
## II. Die analytische Methode.

Um die Spannung irgend eines Stabes zu bestimmen, legt man einen Schnitt durch die Construction, der ausser dem betrachteten nur noch zwei andere Stäbe trifft. Die Möglichkeit der Führung eines solchen Schnittes ist keine nothwendige Eigenschaft eines statisch bestimmten Fachwerks; wir bemerkten aber bereits, dass sie bei den üblichsten Ausführungsformen vorhanden zu sein pflegt und setzen sie desshalb hier voraus.

\*) Culmann, graphische Statik. Zweite Auflage, erster Band. Zürich 1875.

Navier's Baumechanik.

Fig. 83.



Zerlegt man den Auflagerdruck in die Componenten  $A$  und  $H$  und nennt die vertikale Scheerkraft für den gezogenen Schnitt  $V$  und das Moment der links vom Schnitt angreifenden Kräfte in Bezug auf den Punkt  $O$  (anstatt dessen man übrigens ebenso gut irgend einen anderen Punkt hätte nehmen können)  $M$ , so hat man mit Bezug auf die in die Figur eingeschriebenen Bezeichnungen

die 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 + H = 0$$

$$S_1 \sin \alpha_1 - S_2 \sin \alpha_2 + S_3 \sin \alpha_3 + V = 0$$

$$M - S_3 h \cos \alpha_3 = 0,$$

aus denen sich die 3 Spannungen  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  ohne Weiteres berechnen lassen. Dabei sind alle 3 Spannungen als Zugspannungen vorausgesetzt. Ein negatives Resultat würde somit eine Druckspannung bedeuten.

### III. Die Rittersche Methode.

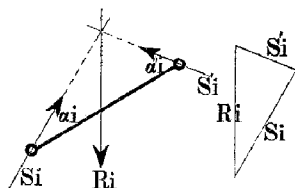
Ein sehr praktisches Verfahren zur Bestimmung der Stabspannungen besitzt man in der von Ritter angegebenen Momenten-Methode, die auf einer Combination des Rechnens mit dem Construiren beruht. Man legt wie vorhin einen Schnitt durch die Construction, der nur drei Stäbe trifft. Um die Spannung eines dieser Stäbe zu bestimmen, verlängert man die Richtungslinien der beiden anderen bis zu ihrem Schnittpunkte, der der Momentenpunkt jenes ersten Stabes genannt wird. Dann stellt man die Momentengleichung in Bezug auf diesen Punkt auf und greift hierzu die Hebel-Arme einfach auf der Zeichnung ab. Da in dieser Momentengleichung nur noch eine unbekannte Kraft vorkommt, lässt sich dieselbe daraus leicht bestimmen.

Man wird übrigens bemerken, dass in der zu II. gehörigen Fig. 83  $O$  der Momentenpunkt von  $S_3$  ist.

§ 44. Im vorigen § wurde angenommen, dass die äusseren Kräfte nur an den Knotenpunkten des Fachwerks angreifen sollten. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die statische Bestimmtheit eines nach den Angaben des vorigen § konstruirten Fachwerks auch dann noch besteht, wenn die Lasten in beliebiger Weise an den Stäben selbst angreifen. Es wird dadurch nur die Zahl der Unbekannten und um ebensoviel die Anzahl der aufzulösenden Gleichungen vermehrt.

Wir betrachten irgend einen Stab des Fachwerks, der die Ordnungsnummer  $i$  tragen möge. Die äusseren Kräfte, die abgesehen von den beiden Gelenkdrücken auf ihn wirken, denken wir uns zu ihrer Resultirenden  $R_i$  zusammengefasst. Die beiden Gelenkdrücke sollen mit  $S_i$  und  $S'_i$  und die Winkel, die sie mit der Stab-Achse (d. i. die Verbindungslinie der beiden Gelenk-Mittelpunkte) bilden mit  $\alpha_i$  und  $\alpha'_i$  bezeichnet werden. Damit

Fig. 84.



Gleichgewicht herrsche, müssen sich die drei Kräfte  $R_i$ ,  $S_i$  und  $S'_i$  in einem Punkte schneiden und ausserdem müssen sie aneinandergereiht ein geschlossenes Kräftepolygon bilden. Aus der ersten Bedingung lässt sich aber leicht eine und aus der zweiten lassen sich leicht zwei Gleichungen formuliren, in denen, da  $R_i$  als der Grösse, Lage und Richtung nach bekannt anzusehen ist, vier Unbekannte vorkommen. Es können also drei der Unbekannten in einer derselben ausgedrückt werden. Damit lässt sich aber das ganze System der  $(4m+2v-p)$  Unbekannten auf ein System von  $(m+2v-p)$  Unbekannten reduciren, zu deren Bestimmung beim statisch bestimmten System die  $2n$  Gleichungen, welche das Gleichgewicht der Knotenpunkte ausdrücken, grade hinreichen müssen. Damit ist aber bewiesen, dass auf die statische Bestimmtheit eines Fachwerks die Vertheilung der Lasten in der einen oder anderen Weise keinen Einfluss hat.

Die Ermittlung der  $2m$  Gelenkdrücke und ihrer Richtungswinkel kann entweder nach der soeben ange-



deuteten direkten Methode oder auch auf einfachere Weise nach Methoden erfolgen, die den im vorigen § mitgetheilten analog sind.

Da der hier vorausgesetzte Fall einer direkten Belastung der Stäbe eines Fachwerks immerhin eine nicht allzuseltene Anwendung findet, während eine bequeme Berechnungsweise bisher nicht veröffentlicht worden zu sein scheint, soll im nachfolgenden § eine solche angegeben werden. Zur Begründung derselben bedürfen wir eines Lehrsatzes, der für die ganze Fachwerktheorie von fundamentaler Bedeutung ist und der zunächst bewiesen werden soll.

§ 45. **Lehrsatz.** Wirkt ein Lasten-System  $\Pi_1$  auf ein statisch bestimmtes Fachwerk und ruft dasselbe in irgend einem Stabe mit der Ordnungsnummer  $i$  die Gelenkdrücke  $S_i$  und  $S'_i$  hervor und würde ferner ein zweites beliebiges Lasten-System  $\Pi_2$  für sich allein die Gelenkdrücke  $T_i$  und  $T'_i$  in dem betrachteten Stabe zur Folge haben, so sind die Gelenkdrücke  $U_i$  und  $U'_i$ , welche entstehen, wenn beide Lasten-Systeme gleichzeitig auf das Fachwerk wirken, die geometrischen Summen oder Resultirenden der Drücke  $S_i$  und  $T_i$  resp.  $S'_i$  und  $T'_i$ .

Der Satz lässt sich zunächst sehr einfach für den besonders wichtigen Fall beweisen, dass die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen. Dann sind je zwei durch den oberen Index von einander unterschiedene Gelenkdrücke einander gleich und entgegengesetzt gerichtet. Den Inbegriff beider Gelenkdrücke nannten wir die Spannung des Stabes, welche für jeden Stab die einzige Unbekannte bildete. In § 43 wurde die Aufgabe der Bestimmung der Stabspannungen bei einem gegebenen Lastensystem behandelt. Wir fanden dort, dass sich zur Bestimmung der Stabspannungen und Auflager-Unbekannten  $2n$  Gleichungen aufstellen lassen. Diese Gleichungen sind in Bezug auf die Unbekannten, wie auf die Componenten der Lasten sämmtlich linear. Es müssen desshalb auch die Lösungen derselben, d. s. die Stabspannungen und die Componenten der Auflagerkräfte lineare Funktionen der Lasten-Componenten sein.

Die allgemeine Form des Ausdrucks für eine Stabspannung ist also

$$S_i = a_i + \sum_k b_{ki} A_k + \sum_k c_{ki} B_k$$

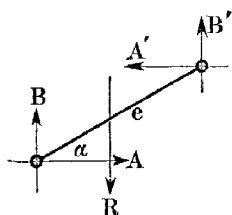
unter  $A_k$  und  $B_k$  die horizontale resp. vertikale Componente der am Knotenpunkt mit der Ordnungsnummer  $k$  angreifenden Last, unter  $a_i$  eine von der Ordnungsnummer  $i$  des betrachteten Stabes und unter  $b_{ki}$  und  $c_{ki}$  von den Ordnungsnummern des Knotenpunktes und des betrachteten Stabes abhängige Coefficienten verstanden, die für jedes Lasten-System constant sind. Das Zeichen  $\sum_k$  ist dabei „Summe nach  $k$ “ zu lesen.

Die Constante  $a_i$  in obiger Formel muss aber nothwendiger Weise = Null sein, da das System unserer  $2n$  Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten homogen wird, wenn alle äusseren Kräfte zu Null werden.

Damit ist der Satz zunächst für den ersten Fall bewiesen. Man sieht nämlich leicht ein, dass sich  $A_k$  und  $B_k$  in je zwei Theile zerlegen lassen, so dass  $A_k = A'_k + A''_k$  und  $B_k = B'_k + B''_k$ , wodurch die Formel für  $S_i$  in einen viergliedrigen Ausdruck zerfällt, von dem das erste und dritte Glied zusammen den Ausdruck für die von dem Lasten-System, dessen Componenten  $A'_k$  und  $B'_k$  sind, hervorgerufene Spannung  $S'_i$  bilden, während das zweite und vierte Glied zusammen  $S''_i$  ergeben. Man hat also  $S_i = S'_i + S''_i$ .

Es übersieht sich nun leicht, wie man den Beweis des Satzes auf ganz ähnliche Weise auch für den allgemeineren Fall durchführen kann, dass die Lasten direkt

Fig. 85.



an den einzelnen Stäben angreifen. Wir betrachten zu diesem Zwecke das Gleichgewicht irgend eines Stabes und denken uns die Gelenkdrücke desselben in ihre horizontalen und vertikalen Componenten zerlegt. Die Resultirende  $R$  aus den übrigen am Stabe angreifenden Kräften, wollen wir uns der Einfachheit halber senkrecht gerichtet denken, obwohl sich der Beweis

für jede beliebige Richtung genau ebenso durchführen liesse. Der Hebel-Arm von  $R$  in Bezug auf einen der

beiden Knotenpunkte sei  $r$ ; die aufwärts resp. nach rechts gerichteten Kräfte sollen positiv genommen werden, dann muss sein

$$B + B_1 - R = 0$$

$$A + A_1 = 0$$

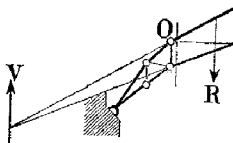
$$- B_1 l \cos \alpha + A_1 t \sin \alpha + R r = 0, \text{ woraus}$$

$$A_1 = -A; B_1 = -A t g \alpha + \frac{R r}{l \cos \alpha}; B = R \frac{l \cos \alpha - r}{l \cos \alpha} + A t g \alpha.$$

Mit Hülfe dieser Substitutionen lässt sich das System der  $2n$  Knotenpunktgleichungen nach den Auflager-Unbekannten und den Unbekannten  $A$  auflösen. Jedes  $A$  ergibt sich dann als eine lineare Funktion der Grössen  $R_k, R_k \cdot r_k$  und der Componenten der Knotenpunktbelastungen. Werden letztere mit  $P_i$  und  $Q_i$  bezeichnet und denkt man sich hierauf, das Fachwerk sei mit einem neuen Lastensystem, das für sich allein darauf einwirke, behaftet, so erhält man die neuen Grössen  $A$  durch die Substitutionen  $P_i = P_i^1; Q_i = Q_i^1, R_k = R_k^1, R_k \cdot r_k = R_k^1 \cdot r_k^1$  in dem Ausdruck für  $A$ . Wirken dagegen beide Lastensysteme gleichzeitig ein und bezeichnen wir diesen letzteren Belastungsfall mit dem Index 2, so wird  $P_i^2 = P_i + P_i^1, Q_i^2 = Q_i + Q_i^1, R_k^2 = R_k + R_k^1, R_k^2 \cdot r_k^2 = R_k \cdot r_k + R_k^1 \cdot r_k^1$ . Substituiert man diese letzteren Ausdrücke in die Gleichung für  $A$ , so kommt aber dasselbe heraus, als wenn man die beiden erstgefundenen Werthe von  $A$  addirte. Es folgt also  $A^2 = A + A^1$  und daher auch  $B^2 = B + B^1, A_1^2 = A_1 + A_1^1; B_1^2 = B_1 + B_1^1$ , was zu beweisen war.

§ 46. Mit Hülfe des soeben bewiesenen Satzes soll nun eine bequeme Methode zur Lösung der Haupt-Aufgabe bei einem statisch bestimmten Fachwerk mit beliebig gegebener Belastung angegeben werden. Wir setzen hierbei wieder voraus, dass die Auflager-Unbekannten bereits ermittelt sind und dass es möglich ist, einen Schnitt durch die Construction zu legen, der den betrachteten Stab und ausserdem nur noch zwei andere trifft.

Fig. 86.



Zunächst bestimmen wir die Gelenkdrücke der Gurtungsstäbe, d. i. jener Stäbe, die die äussere Begrenzung der Figur bilden. Die Resultirende aus den Belastungen

resp. nach  
werden,

oraus

$r + Atgz.$

ystem der

er-Unbe-

Jedes  $\Delta$

Größen

enpunkts-

zeichnet

mit einem

einwirke,

durch die

$R_k \cdot r_k =$

en beide

ir diesen

$R_k + R_k,$

an diese

o kommt

n erstge-

$= A + A'$

$= B_1 + B'_1,$

tztes soll

-Aufgabe

beliebig

r setzen

ekannten

st, einen

betrach-

dem nur

wir die

gsstäbe,

äussere

en. Die

astungen

des betrachteten Gurtungsstabes sei  $R$ . Wir denken uns zunächst, an dem Lastensystem des Fachwerks fehle die Kraft  $R$ , dann fallen die Richtungen der Gelenkdrücke des betrachteten Stabes mit der Stabrichtung zusammen. Hierauf sei der mehrfach erwähnte Schnitt durch die Construction gelegt und zwar unendlich nahe an den Knotenpunkten vorbei. Die Resultirende aller äusseren Kräfte auf der linken Seite des Schnittes sei  $V$ , die Stabspannung des betrachteten Stabes unter der gemachten Voraussetzung  $= S_1$ . Dann muss die Resultirende aus den beiden Gelenkdrücken der mitdurchschnittenen Stäbe Gleichgewichte halten mit den Kräften  $V$  und  $S_1$ , also durch den Schnittpunkt von  $S_1$  mit  $V$  gehen. Ausserdem muss sie aber auch durch den Knotenpunkt  $O$  gehen, in dem sich die beiden mitdurchschnittenen Stäbe treffen. Es lässt sich danach leicht  $S_1$  sowie jene Resultirende bestimmen. — Nun hat man nur noch anzunehmen, die Last  $R$  sei die einzige, welche auf das Fachwerk einwirkt und den in diesem Falle hervorgerufenen Gelenkdruck  $S_2$  zu ermitteln. Dies gelingt durch eine Zerlegung der Kraft  $S_2$  in eine horizontale und vertikale Componente, die man als Unbekannte ansieht und durch die man die Componenten des andern Gelenkdruckes des Stabes ausdrückt. Hierauf stellt man für linke und rechte Hälfte des durchschnittenen Fachwerks die Momentengleichungen in Bezug auf  $O$  auf, aus denen sich die Componenten von  $S_2$  und damit  $S_2$  selbst ergeben. —

Den bei der gegebenen Belastung in Wirklichkeit übertragenen Gelenkdruck  $S$  findet man alsdann durch Zusammensetzung der Kräfte  $S_1$  und  $S_2$ . Die Gelenkdrücke der Füllungslieder ergeben sich sofort, wenn jene der Gurtungsstäbe bekannt sind. Bei praktisch vorliegenden Fällen wird man übrigens finden, dass sich die hier angegebenen Rechnungen und Constructionen rascher und bequemer ausführen lassen, als man nach der umständlichen Beschreibung erwarten sollte.

§ 47. Nach Lösung unserer Hauptaufgabe, also nach der Ermittlung der Gelenkdrücke bleibt noch zur vollständigen Berechnung die Frage zu beantworten, wie gross die in einem Stabe hervorgerufenen Spannungsschärfen ausfallen. Wir nehmen zu diesem Zwecke an,

die Schwerpunkts-Achse des Stabes falle mit der Verbindungslinie der Gelenk-Mittelpunkte zusammen. Wenn wir zunächst den Fall betrachten, dass die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen, so hat man  $s = \frac{S}{F}$ , da der Stab hier auf Zug oder Druck allein angestrengt wird und die Resultirende der Normalspannungen des Querschnittes durch den Schwerpunkt gehen muss. Es bedeutet dabei  $S$  die Spannung und  $F$  die Querschnittsfläche des Stabes,  $s$  die Spannungsschärfe.

Etwas umständlicher, obwohl nach den Formeln des vorigen Abschnittes ebenfalls ohne Schwierigkeit auszuführen, ist die Bestimmung der Spannungsschärfen, wenn die Lasten direkt am Stabe angreifen. Man denkt sich dann den Stab durch einen Querschnitt in zwei Theile getrennt und stellt das Moment  $M$  der an einem Theile wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die neutrale Achse und ebenso die algebraische Summe  $N$  der Normalcomponenten dieser äusseren Kräfte auf. Diese Werthe sind in die in § 37 angegebene Formel

$$p_{xx} = \frac{R_x}{F} + \frac{M_y}{\mathcal{I}_y} z + \frac{M_z}{\mathcal{I}_z} \cdot y$$

einzusetzen, die dadurch übergeht in

$$s = \frac{N}{F} + \frac{M}{\mathcal{I}} \cdot a$$

unter  $\mathcal{I}$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Achse und unter  $a$  die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Achse verstanden. Natürlich muss man zu dieser Bestimmung jenen Querschnitt wählen, für den  $s$  den grössten Werth erhält. Von der Wirkung der Tangentialcomponenten der äusseren Kräfte kann man hierbei absehen.

§ 48. Die gefährlichste Belastung. Die Fachwerke werden hauptsächlich beim Bau von grossen Dachbindern und von Brückenträgern über grössere Spannweiten angewendet. Wenn nun auch bei den Dachbindern das zu tragende Lasten-System ein nur wenig wechselndes ist, so muss bei den Brückenfachwerken auf die Möglichkeit ganz verschiedenartiger Belastungen Rücksicht genommen werden. Man wird sich also nicht damit begnügen dürfen, für eine bestimmte Art der Belastung nach den Regeln der vorigen §§ die Rechnung durchzuführen und danach die Dimensionen

der Ver-  
Wenn  
sten nur  
 $= \frac{S}{F}$   
estrengt  
gen des  
uss. Es  
schnitts-

neln des  
auszu-  
n, wenn  
kt sich  
Theile  
Theile  
neutrale  
N der  
Diese

neutrale  
Faser  
muss  
wählen,  
Wirkung  
kann

Fach-  
grossen  
rössere  
ei den  
n nur  
enfach-  
er Be-  
d sich  
timmte  
§§ die  
sionen

der Stäbe zu bestimmen, sondern man muss die grösstmögliche Spannung, welche durch einen als möglich vorausgesetzten Belastungsfall hervorgerufen werden kann, ermitteln und dafür Sorge tragen, dass diese innerhalb der zulässigen Grenzen bleibe. Der Kürze halber soll bei der Behandlung dieser Aufgabe vorausgesetzt werden, dass die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen.

Zur Lösung der Aufgabe muss natürlich angegeben werden, welche Arten der Belastung überhaupt vorkommen können resp. als möglich angesehen werden sollen. Am Einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn für jeden Knotenpunkt angegeben wird, die Last sei fortwährend senkrecht gerichtet, könne sich aber innerhalb gewisser gegebener Grenzen bewegen. Die Minimalgrenze der Knotenpunkts-Belastung wird hier durch das auf denselben entfallende Eigengewicht der Construction bestimmt, die Maximalgrenze durch die Summe dieses Eigengewichts und des grösstmöglichen Druckes, der von der zufälligen Belastung auf den Knotenpunkt ausgeübt werden kann.

Wir denken uns das Fachwerk nur mit einer einzigen Last  $P_k$  beschwert, die am Knotenpunkte  $k$  angreift und suchen die Spannung  $S_i$  auf, die in dem betrachteten Stabe  $i$  durch  $P_k$  hervorgerufen wird. Dabei ist uns jedoch die Grösse von  $S_i$  vollständig gleichgültig; wir achten nur darauf, ob  $S_i$  eine Zug- oder eine Druckspannung ist. Hierauf versetzen wir die Last  $P$  der Reihe nach an alle übrigen Knotenpunkte und ermitteln jedesmal das Vorzeichen der entsprechenden Spannung  $S_i$ . Wir können danach in Bezug auf den Stab  $i$  die Knotenpunkte in solche eintheilen, deren Belastung einen Zug und in solche, deren Belastung einen Druck in  $i$  hervorbringt. Aus dem in § 45 bewiesenen Satze geht hervor, dass eine möglichst grosse Belastung der ersteren und gleichzeitig möglichst geringe Belastung der letzteren Knotenpunkte die Maximal-Zugspannung des betrachteten Stabes hervorruft, während die Maximal-Druckspannung umgekehrt dann eintritt, wenn die Knotenpunkte der ersten Kategorie möglichst wenig und die der zweiten möglichst viel belastet sind.

Die Unterscheidung, ob ein Knotenpunkt für einen gewissen Stab zur ersten oder zweiten Kategorie gehört,

lässt sich in den meisten Fällen sehr leicht treffen. Wir legen den schon oft erwähnten Schnitt durch die Construction und suchen den Momentenpunkt des betreffenden Stabes auf. Die Last  $P_k$  muss dann an einer der beiden Hälften angreifen, in die wir das Fachwerk getrennt haben. An der anderen Hälfte, deren Gleichgewicht betrachtet wird, greifen dann nur ein Auflagerdruck (eventuell auch dergleichen mehrere) und die drei Stabspannungen an. In Bezug auf den Momentenpunkt des betrachteten Stabes muss also das Moment der Stabspannung gleich und entgegengesetzt gerichtet sein dem Momente des Auflagerdrucks. Da man die Richtung des Auflagerdrucks jedenfalls ohne Schwierigkeit angeben kann, ergibt sich aus dieser Bedingung ohne Weiteres das Vorzeichen der Stabspannung.

Bei einem sog. Balkenfachwerk — d. i. ein Fachwerk, das zwei Auflagerknoten besitzt, von denen sich der eine auf einer horizontalen Linie verschieben kann, dessen Auflagerdrücke also stets senkrecht gerichtet sein müssen — überzeugt man sich leicht, dass für Stäbe, deren Momentenpunkte innerhalb der Vertikalen durch die Auflagerknoten liegen, sämtliche Knotenpunkte zu derselben Kategorie gehören, während anderen Falles alle Knotenpunkte, die links von dem gezogenen Schnitte liegen, zu der einen, die rechts liegenden zu der anderen Kategorie gehören. Ein solcher Schnitt, der die Knotenpunkte verschiedener Kategorien in Bezug auf einen betrachteten Stab von einander scheidet, wird die Belastungsscheide des Stabes genannt. Bei anders aufgelagerten Fachwerken kann es solcher Belastungsscheiden mehrere für denselben Stab geben.

Es ist selbstverständlich, dass man nach der soeben beschriebenen Methode die Grenzspannungen aller Stäbe zu ermitteln hat. Auf Grund dieser Spannungen erfolgt die Bestimmung der Dimensionen, über die im 6. Abschnitte Näheres angegeben ist.

Belastung durch einen Eisenbahnzug. Bei der Berechnung der Eisenbahnbrücken stellt man sich gewöhnlich die Aufgabe, die grössten Spannungen zu bestimmen, die in den einzelnen Stäben während des Passirens eines Zuges von bestimmter als ungünstigste angenommener Zusammensetzung hervorgerufen werden.

Man lässt zu diesem Zwecke den Zug von der einen Seite anfahren und ermittelt, bei welcher besonderen Stellung desselben die grösste Spannung in einem gewissen Stabe hervorgerufen wird. Ist das Fachwerk, wie gewöhnlich, symmetrisch gestaltet, so ist es nicht nöthig, den Zug noch von der andern Seite anfahren zu lassen und die hierbei hervorgerufenen Grenzspannungen des betrachteten Stabes zu ermitteln. Man sucht nämlich einfacher die in dem zu dem betrachteten symmetrisch liegenden Stabe hervorgerufenen Grenzspannungen während des Passirens des Zuges in der ersten angenommenen Richtung auf, die denen des ersten Stabes bei der umgekehrten Zugrichtung gleich sind.

Die Raddrücke des Eisenbahnzuges wirken nicht direkt auf die Fachwerkstäbe, sondern auf eine besondere Fahrbahn-Construction, welche die Lasten nur an den Knotenpunkten auf das Fachwerk überträgt. Indessen berechnen sich die Auflagerdrücke der Fachwerksträger in genau derselben Weise, als wenn die Lasten direkt an diesen angriffen. Ebenso ist, wenn man einen Schnitt durch die Construction unendlich nahe an 2 Knotenpunkten vorbeilegt, das Moment  $M$  der äusseren Kräfte in Bezug auf die Knotenpunkte genau ebenso gross, als wenn die Lasten direkt an den Fachwerkstäben angebracht wären. Anders verhält es sich mit der Vertikalkraft  $V$ . Diese wird kleiner resp. negativer, als wenn die Lasten direkt an den Stäben angreifen würden. Der Unterschied wird hervorgebracht und ist gleich dem Auflagerdruck, den die Quereconstruction in Folge der in dem betreffenden Felde vorhandenen Lasten auf den dem Schnitte zunächst liegenden Knotenpunkt ausübt.

Wir sind hiernach berechtigt, in der Folge die Momente und Vertikalkräfte für den gezogenen Schnitt so zu berechnen, als wenn die Lasten direkt an den Stäben des Fachwerkes angreifen würden, haben aber dabei an der Vertikalkraft  $V$  die angegebene Correktion zu machen. Es möge noch bemerkt werden, dass diese Correktion auf die Bestimmung der ungünstigsten Laststellung von sehr geringem Einfluss ist und daher bei dieser Bestimmung in der Regel vernachlässigt wird. Immerhin möge sie hier berücksichtigt werden.

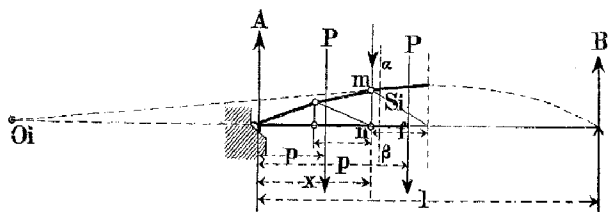
Am verwickeltesten gestaltet sich die Aufgabe, die



ungünstigste Stellung der Last zu ermitteln, für die Füllungstheile, viel einfacher für die Gurtungsstäbe. Es soll deshalb diese Aufgabe hier nur für die Füllungstheile und zwar unter der Voraussetzung eines Balkenfachwerks behandelt werden.

Wir beziehen uns auf Fig. 87 und nehmen an, die Grenz-Spannung  $S_i$  des Stabes  $i$  sei zu ermitteln und

Fig. 87.



zu diesem Zwecke zunächst festzustellen, bei welcher Stellung des Eisenbahnzuges diese Grenzspannung auftrete. Wir legen den Schnitt  $\alpha \beta$  durch die Construction und stellen uns der Einfachheit halber vor, derselbe ginge unendlich nahe an den Knotenpunkten  $m$  und  $n$  vorbei.  $O_i$  sei der Momentenpunkt des Stabes  $i$ .  $P$  stelle uns irgend eine beliebige Kraft des Lastensystems und  $p$  deren Entfernung von  $A$  vor. Ueber die Stellung des Lastensystems (nämlich des Eisenbahnzuges, ohne Rücksicht auf das besonders zu betrachtende Eigengewicht der Construction) soll vorläufig gar keine Voraussetzung gemacht werden. Ferner sei  $\mathfrak{A}$  der Druck, den die Fahrbahn-Construction des durchschnittenen Faches auf einen der Knotenpunkte  $m$  oder  $n$  ausübt.

Es ergeben sich die Gleichungen

$$A = \sum_0^l P - \frac{1}{l} \sum_0^l P p$$

$$\mathfrak{A} = \sum_x^{x+f} P + \frac{x}{f} \sum_x^{x+f} P - \frac{1}{f} \sum_x^{x+f} P p$$

$$V = A - \sum_0^x P - \mathfrak{A} = \sum_x^{x+f} P - \frac{1}{l} \sum_0^l P p + \frac{1}{f} \sum_x^{x+f} P p - \frac{x}{f} \sum_x^{x+f} P$$

Bezüglich des für  $V$  gewonnenen Ausdrucks machen wir auf die wichtige Eigenschaft desselben aufmerksam, dass er sich bei stetig wachsendem  $p$ , also bei einem Weiterrollen des Zuges, ebenfalls stetig ändert, ganz gleichgültig, ob ein neues Rad auf die Brücke kommt oder dieselbe verlässt oder ob ein Rad den Querschnitt  $x$  passiert.

Der Raumersparniss halber begnügen wir uns damit, diesen Satz ausgesprochen zu haben und überlassen den leicht zu führenden Beweis desselben unsern Lesern.

Für das Moment  $M$  der äusseren Kräfte, bezogen auf einen Punkt, der in der Vertikalen mit der Abcisse  $x$  liegt, also z. B. in Bezug auf  $m$  ergibt sich

$$M = A \cdot x - \sum_0^x P(x-p) = x \sum_x^l P - \frac{x}{l} \sum_0^l Pp + \sum_0^x Pp.$$

welcher Werth, wie man leicht einsieht, sich während der Fortbewegung des Zuges ebenfalls stetig ändert.

Bezeichnet aber  $v$  den Abstand der Resultirenden  $V$  aller am linken Trägertheile angreifenden äusseren Kräfte vom Punkte  $m$  und ferner  $M_i$  das Moment dieser äusseren Kräfte oder, was dasselbe ist, der Resultirenden  $V$  in Bezug auf den Momentenpunkt  $O_i$  des Stabes  $i$ , so hat man

$$M = V \cdot v$$

$$M_i = V(v - z) = M - V \cdot z.$$

Da  $z$  den bekannten Abstand des Momentenpunktes  $O_i$  von der durch  $m$  gelegten Vertikalen bedeutet, so lässt sich hiernach und nach dem Vorigen  $M_i$  in den Belastungen ausdrücken.

Wir nehmen jetzt an, der ganze Zug bewege sich um das unendlich kleine Stück  $dp$  weiter, so dass also jedes  $p$  um das konstante  $dp$  zunimmt. Da, wie oben bemerkt,  $V$  und  $M$  sich während der Fortbewegung des Zuges unter allen Umständen stetig ändern, erhält man allgemein das zugehörige

$$dV = -dp \frac{1}{l} \sum_0^l P + dp \frac{1}{f} \sum_x^{x+f} P$$

$$dM = dp \left( \sum_0^x P - \frac{x}{l} \sum_0^l P \right)$$

und daher

$$dM_i = dp \left\{ \Sigma_0^x P + \frac{z-x}{l} \Sigma_0^l P - \frac{z}{f} \Sigma_x^{x+f} P \right\} = dp \cdot \theta.$$

Man hat jetzt die einfache Regel, den Zug so lange weiter nach rechts zu schieben als  $\theta$  positiv ist.  $M_i$  wird zu einem Grenzwerthe für  $\theta = 0$ , resp. für einen Zeichenwechsel von  $\theta$ .  $\theta$  wächst nicht mehr stetig während des Weiterschiebens des Zuges, sondern sprungweise wenn ein Rad den Querschnitt  $x$  oder  $x + f$  passirt oder ein neues Rad auf die Brücke kommt oder dieselbe verlässt. Ist  $z$  positiv, d. i. so wie es die Figur angibt nach links hin gelegen und grösser als  $x$ , so ist  $dM_i$  stets positiv, wenn das durchschnittene Fach gar nicht oder zu gering belastet ist. Es kann also ein Zeichenwechsel von  $\theta$  nur durch eine Zunahme oder Abnahme der Belastung des Faches oder dadurch eintreten, dass ein Rad die Brücke verlässt, oder auf dieselbe tritt.

Bezeichnet man noch  $\Sigma_0^x P$ , d. i. die Belastung links vom Schnitt mit  $L$ ;  $\frac{\Sigma_0^l P}{l}$ , d. i. die durchschnittliche Belastung des ganzen Trägers mit  $\gamma$  und schliesslich  $\frac{1}{f} \Sigma_x^{x+f} P$ , d. i. die durchschnittliche Belastung des durchschnittenen Faches mit  $\varphi$ , so ergibt sich für  $\theta$  der übersichtlicher gestaltete Werth

$$\theta = L + \gamma(z - x) - \varphi \cdot z.$$

Das wirkliche Aufsuchen jener Stellung der Last, bei der  $\theta$  sein Zeichen wechselt, geschieht am raschesten und einfachsten auf dem Wege des Probirens. Man lässt den Zug so lange weiter rollen, bis man einen Wechsel des Vorzeichens vermuthen kann und sucht nach dem jedesmaligen Uebertritt eines Rades in oder aus einem der drei Abschnitte zwischen  $O$  und  $x$ ,  $x$  und  $x + f$ ,  $x + f$  und  $l$  den zugehörigen Werth von  $\theta$  auf. Man zeichnet zu diesem Zwecke das ganze Lastensystem auf und verbindet dasselbe durch ein Seilpolygon. Anstatt nun den Zug weiter vorzuschieben, was viel Mühe verursachen würde, schiebt man die Brücke, die hier durch eine einzige Linie repräsentirt wird, weiter

zurück, was am bequemsten durch Verschieben eines Papierstreifens von entsprechender Länge ausgeführt wird.

Nachdem auf die hier beschriebene Weise die ungünstigste Stellung der Last ermittelt ist, kann man die zugehörige Grenzspannung entweder nach der Ritter'schen Methode durch Aufsuchen des Momentes  $M_i$  nach der oben angegebenen Formel oder mit Hülfe der graphischen Darstellung der Momente und vertikalen Schwerkräfte und Division dieses Werthes mit dem Hebel-Arme des Stabes oder nach irgend einer anderen Methode leicht bestimmen.

Man sieht übrigens ein, dass auf dem hier für das Balkenfachwerk eingeschlagenen Wege auch für jedes beliebige andere statisch bestimmte Fachwerk ein Kriterium für die ungünstigste Stellung der Last mit Bezug auf einen bestimmten Stab ohne Schwierigkeit aufgefunden werden kann.

§ 49. Ausführungsformen des statisch bestimmten Fachwerks. Wir dürfen das statisch bestimmte Fachwerk nicht verlassen, ohne die wichtigsten Ausführungsformen desselben, wenn auch nur in gedrängter Kürze zu besprechen.

Fig. 88 bis 90 zeigen die gebräuchlichsten Balken-Dachbinder. Die Momentenpunkte liegen alle innerhalb der Auflager-Vertikalen, die Grenzspannungen treten deshalb bei maximaler Belastung sämtlicher Knotenpunkte ein. Kein Stab ist entgegengesetzten Spannungen ausgesetzt.

Fig. 91 bis 94 zeigen die vier üblichsten Ausführungsformen des Brücken-Balkenfachwerks auf 2 Stützen, den Parallel-, den Parabel, den Schwedler'schen und den Pauli'schen Träger. Die Momentenpunkte der Gurtungsstäbe liegen bei diesen Trägern sämtlich innerhalb, jene der Füllungstheile sämtlich ausserhalb der Auflager-Vertikalen. Die Grenzspannungen der Gurtungsstäbe treten daher bei möglichst grosser totaler Belastung der Träger ein und sind stets einerlei Vorzeichens. Dagegen werden die Grenzspannungen der Füllungsstäbe durch theilweise Belastungen der Träger hervorgebracht und können entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Die vertikalen Füllungsglieder, die sogenannten Vertikalständer oder auch schlechtweg die Vertikalen sind bei den auf den

Fig. 88.



Fig. 89.

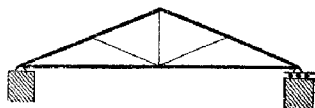


Fig. 90.



Fig. 91.



Fig. 92.



Fig. 93.

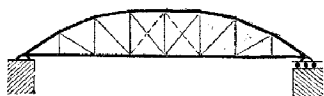


Fig. 94.

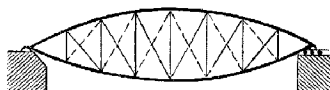


Fig. 95.

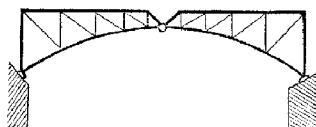


Fig. 96.

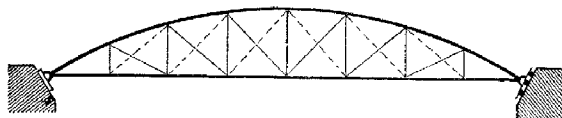
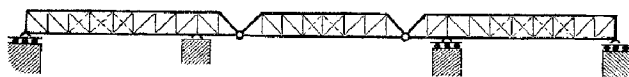


Fig. 97.



Figuren angenommenen Anordnungen vorzugsweise Druckglieder und müssen daher auf Knickfestigkeit berechnet werden. Findet man dagegen, dass der Dia-

gonalstab eines Faches Grenzspannungen entgegengesetzten Vorzeichens besitzt, also mit Rücksicht auf den möglichen Druck ebenfalls auf Knickfestigkeit berechnet werden müsste, so pflegt man ihn der Material-Ersparniss halber trotzdem nur flach, also ohne Widerstandsfähigkeit gegen Druck zu konstruiren, dafür aber eine sogenannte Gegendiagonale, die im Falle einer Belastung, welche die Haupt-Diagonale in Druckspannung versetzen würde, für diese eintritt einzuführen. Die Gegendiagonalen sind in den Figuren punktirt angedeutet. Man kann leicht zeigen, dass durch Einführung derselben die statische Bestimmtheit des Systems im Allgemeinen nicht geändert wird.

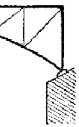
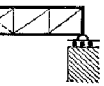
Ueber die Constructions-Motive, die den betrachteten 4 Trägern zu Grunde liegen, lässt sich folgendes sagen:

1) Der Parallelträger ist vorzugsweise wegen seiner einfachen und bequemen Herstellung, namentlich aber auch wegen der Möglichkeit einer soliden Windverstrebung und einer Anlehnung an Portale im Gebrauch.

2) Dem Parabelträger liegt die Definition zu Grunde, dass bei einer gleichmässigen Belastung desselben die Füllungsglieder ganz ohne Spannung sind. Die Maximalspannungen der Gurtungen fallen nahezu konstant über die ganze Trägerlänge aus, was als grosser Vorzug zu betrachten ist.

3) Der Schwedler'sche Träger wird nach der Bedingung konstruirt, dass die Diagonalen nur Zug aushalten sollen und zwar soll die untere Grenzspannung für dieselben grade zu Null werden. Wollte man diese Bedingungen streng durchführen, so würde die obere Gurtung in der Mitte nach unten eingeknickt hergestellt werden müssen, was ungünstigen Einfluss auf die Spannungen der dort vorhandenen Gurtungsstäbe ausüben würde. Man sieht deshalb in der Mitte von der gestellten Bedingung ab und ordnet dort Gegendiagonalen an. Setzt man bei der Berechnung eine gleichmässig vertheilte mobile Belastung voraus, so liegen die oberen Knotenpunkte auf Hyperbeln.

4) Der Pauli'sche Träger ist so gestaltet, dass die Maximalspannungen der Gurtungsstäbe über die ganze Trägerlänge genau konstant sind.



weise  
igkeit  
Dia-

Bei den Trägern 2) und 3) wurde angenommen, dass die untere Gurtung als Horizontale durch die Auflagerpunkte konstruirt sei, welche Anordnung wegen der bequemen Befestigung der Fahrbahntafel die fast allein übliche ist. Indessen wäre Dies vom theoretischen Gesichtspunkte aus keineswegs nöthig gewesen.

Fig. 95 zeigt die üblichste Ausführungsform des Bogenträgers mit 3 Gelenken. Es ist hier mit Bezug auf die in § 43 gebrauchten Bezeichnungen  $o = 2$ ,  $p = 0$ ,  $2n = m + 4$ . Die untere Gurtung wird entweder als Parabel oder Kreis konstruirt, welche beide Linien bei der geringen Pfeilhöhe übrigens wenig von einander abweichen. Die Anspruchnahme der oberen Gurtung ist eine wechselnde, weil die Momentenpunkte ihrer Stäbe innerhalb der Druckfläche (d. i. der geometrische Ort aller Punkte, durch die Drucklinien möglich sind) liegen. Bei dieser Construction kommt es häufig vor, dass eine direkte Belastung auf den Stäben der oberen Gurtung ruht und sind dann zu deren Berechnung die Regeln des § 46 zu beachten.

In Fig. 96 ist der dem Verfasser patentirte und a. O. näher beschriebene Träger mit schiefer Lagerung dargestellt, der sich nur durch die Construction des beweglichen Auflagers von den gewöhnlichen Balkenfachwerken unterscheidet.

Schliesslich ist noch in Fig. 97 eine schon öfter zur Ausführung gebrachte Construction eines statisch bestimmten Fachwerks mit mehr als zwei Auflager-Elementen, der von Gerber erfundene kontinuierliche Träger mit Mittelgelenken dargestellt. Es möge hier beiläufig erwähnt werden, dass man übrigens auch statisch bestimmte kontinuierliche Balkenfachwerke ohne Mittelgelenke construiren kann, z. B. nach der Idee, die bei der Aufstellung des Bogenträgers mit 6 Charnieren in Fig. 81 massgebend war.

§ 50. Mehrfache Fachwerke und Schlussbemerkungen. Es kommen statisch bestimmte Fachwerke vor, die sich nicht wie bisher in der Regel vorausgesetzt durch einen Schnitt derart in zwei Theile zerlegen lassen, dass nur drei Stäbe davon getroffen werden. Man nennt dieselben zum Unterschiede von den bisher besprochenen gewöhnlich mehrfache. Hauptsächlich

werden sie für grössere Spannweiten verwendet um mehr und näher aufeinander folgende Stützpunkte für die Fahrbahn-Construction zu gewinnen. Wir begnügen uns hier mit einer einfachen Erwähnung derselben und verweisen im Uebrigen auf das schöne Winkler'sche Werk über Brückenbau\*), in dem man auch eine ausführlichere Behandlung der Aufgaben der vorigen §§ findet. Um Irrthümer zu vermeiden machen wir übrigens darauf aufmerksam, dass die dort benutzten Bezeichnungen von den unsrigen zum Theil abweichen.

Die im Vorigen entwickelte Theorie des statisch bestimmten Fachwerks ging von einer strengen Definition des letzteren aus, auf Grund deren sich die einzelnen Regeln und Rechnungen mit mathematischer Sicherheit ergeben. Bei der praktischen Verwendung der Fachwerke zum Bau von Dach- oder Brückenträgern sind indessen diese Voraussetzungen nur näherungsweise erfüllt, wesshalb die gefundenen Resultate der Rechnung ebenfalls nur als Näherungs-Resultate anzusehen sind. Die wichtigste Abweichung der Praxis von den Voraussetzungen der Theorie ist die Nichterfüllung der Forderung einer gelenkartigen Verbindung der Knotenpunkte. Abgesehen von kleineren Dachkonstructionen werden bei der in Europa üblichen Ausführungsweise die Knotenpunkte steif hergestellt, d. h. die Stäbe werden genöthigt, an ihren Verbindungsstellen fortwährend dieselben Winkel miteinander zu bilden. In Folge Dessen tritt bei einer elastischen Form-Aenderung auch dann eine Verbiegung der Stäbe ein, wenn nur die Knotenpunkte belastet sind.

Man kann übrigens eine genauere Theorie einer derartigen Verbindung ebenfalls ohne principielle Schwierigkeit durchführen. Statisch bestimmt ist ein solches System freilich nicht mehr. Es möge hier nur bemerkt werden, dass die Anspruchnahme des Materials sich nach den Rechnungen, die man auf Grund der Voraussetzung steifer Knotenpunkte durchführt, nicht sehr wesentlich höher stellt als die unter der Voraussetzung gelenkartiger Knoten berechnete, wenn die Trägheits-Momente der einzelnen Stäbe unbedeutend sind. Man pflegt desshalb bei der Berechnung der Brücken von

\*) Winkler, Vorträge über Brückenbau. Wien 1875.



diesem Umstande abzusehen und sich darauf zu verlassen, dass die hierdurch vergrösserte Anspruchnahme immer noch hinter der eigentlich zulässigen zurückbleibe.

Macht man die Voraussetzung, dass sich die Spannung der Stäbe gleichmässig über den Querschnitt vertheilt, (welche Voraussetzung nach dem soeben Gesagten indessen nicht streng erfüllt sein wird) so geht die Resultirende dieser Spannungen durch den Schwerpunkt des Querschnitts und man hat daher bei der Construction zu beachten, dass sich die Schwerpunktslinien der Stäbe eines Knotenpunktes in demselben Punkte treffen müssen.

### **Das statisch unbestimmte Fachwerk aus zweigelenkigen Stäben, die keiner direkten Belastung ausgesetzt sind.**

§ 51. Wir setzen auch bei der Behandlung des statisch unbestimmten Fachwerks voraus, das nur Knotenpunkte als Auflager-Elemente verwendet sind. Wir bezeichnen wie früher mit  $o$  die Anzahl der Auflager-Knoten und nehmen an, dass bei  $p$  derselben noch eine besondere Auflagerbedingung (durch Anbringung eines Rollenlagers) vorgeschrieben sei. Die Anzahl der Unbekannten beträgt wieder  $m + 2o - p$ , das hier grösser als  $2n$  ist, wenn  $m$  und  $n$  die frühere Bedeutung haben.

Werden die Coordinaten irgend eines Knotenpunktes  $k$  in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der festen Constructionsebene mit  $x_k$  und  $y_k$  und die Coordinaten-Änderungen dieses Knotenpunktes bei der elastischen Deformation, die in Folge der Einwirkung irgend eines Lastensystems eintritt, mit  $u_k$  und  $v_k$  bezeichnet, so hat man für die Längen eines Stabes, der zwei Knotenpunkte  $k$  und  $\lambda$  verbindet, vor und nach der Deformation die Ausdrücke

$$l^2 = (x_k - x_\lambda)^2 + (y_k - y_\lambda)^2$$

$$(l + \Delta l)^2 = (x_k + u_k - x_\lambda - u_\lambda)^2 + (y_k + v_k - y_\lambda - v_\lambda)^2.$$

Da die Knotenpunktsverrückungen wie die Längenänderungen der Stäbe als sehr klein im Vergleich zu den anfänglichen Coordinaten und den ursprünglichen Längen anzusehen sind, kann man ohne nennenswerthen Fehler die Quadrate derselben gegen die Produkte aus den ersten Potenzen und den Anfangswerthen vernach-

lässigen. In Folge dieser Vernachlässigung erhält man aus den obigen Gleichungen durch Ausführung der Quadrirung und Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung für  $\Delta l$  den einfachen Ausdruck

$$\Delta l = \frac{(x_k - x_l)(u_k - u_l) + (y_k - y_l)(v_k - v_l)}{l}.$$

Die Spannung  $S$  des betrachteten Stabes findet man aus der Längen-Aenderung  $\Delta l$  mit Hülfe der Beziehung  $S = E \frac{\Delta l}{l}$ . Man erkennt hiernach die Möglichkeit, sämt-

liche Stabspannungen in den bis jetzt noch unbekannten Knotenpunktsverrückungen anzugeben. Die Anzahl der Unbekannten des Systems ist dadurch reducirt auf  $2(n - o)$  Coordinaten-Aenderungen der freien Knotenpunkte, auf  $p$  Unbekannte, die sich auf die Lage der Auflagerknoten mit Auflagerbedingungen nach der Deformation beziehen und auf die  $2o - p$  Auflager-Unbekannten. Im Ganzen sind also noch  $2n$  Unbekannte vorhanden, zu deren Bestimmung die  $2n$  Gleichungen, welche das Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte angeben, grade hinreichen.

Die Aufgabe der Bestimmung der Stabspannungen lässt also unter der Voraussetzung, dass die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen, für das Fachwerk aus zweigelenkigen Stäben stets eine verhältnissmässig einfache Lösung zu, ganz gleichgültig, wie viele und welche Auflagerungen vorhanden sind.

Zur Begründung dieser Behauptung muss bemerkt werden, dass ein Fachwerk, das mit dem Widerlager dadurch verbunden ist, dass ein Stab desselben unwandelbar festgehalten wird, oder ein sog. eingespanntes Fachwerk ganz so zu behandeln ist, als ein Fachwerk, dessen Auflager-Elemente Knotenpunkte sind. Man hat nämlich in diesem Falle die durch jenen Stab verbundenen beiden Knotenpunkte als feste Auflager-Knoten anzusehen. Die Aufgabe, ein eingespanntes Bogenfachwerk auf zwei Widerlagern zu berechnen, ist demnach identisch mit der Aufgabe der Berechnung eines Trägers auf 4 Stützpunkten.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass man den in § 45 für das statisch bestimmte Fachwerk bewiesenen Lehrsatz, dass sich die durch verschiedene Lasten-Systeme hervorgebrachten Stabspannungen einfach addiren, wenn jene Lasten-Systeme gleichzeitig auf das Fachwerk einwirken, auch auf den Fall des statisch unbestimmten Fachwerks übertragen kann. Man bemerkt nämlich, dass die Stabspannungen nach den oben gegebenen Formeln lineare Funktionen der Verschiebungen  $u, v$  sind. Das System der  $2n$  Gleichgewichtsbedingungen ist in Folge Dessen linear in Bezug auf die Unbekannten wie in Bezug auf die Componenten der Belastungen. Durch Auflösen des Systems nach den Unbekannten ergeben sich diese und daher auch die Spannungen  $S$  als lineare Funktionen der Last-Componenten, woraus der Satz folgt.

Der allgemeine Ausdruck für die Spannung  $S_i$  eines Stabes  $i$  ist hier wie in § 45 von der Form

$$S_i = a_i + \sum^k b_{ki} A_k + \sum^k c_{ki} B_k.$$

Es ist aber von grösster Wichtigkeit, zu beachten, dass hier nicht wie dort geschlossen werden kann, dass die Constante  $a_i = \text{Null}$  sei. Der oben für  $S$  aufgestellte Ausdruck  $S = \frac{\Delta l}{l} \cdot E$  gibt nämlich offenbar nur die Zusatzspannung an, die in Folge der eingetretenen Deformation in jedem Stabe hervorgerufen wurde. Es kann aber recht wohl und wird auch im Allgemeinen in dem völlig unbelasteten und gewichtslos gedachten Fachwerk ein System von Anfangsspannungen geben, das für sich im Gleichgewicht ist und zu dessen Bestimmung uns jeder Anhaltspunkt fehlt. Bei der praktischen Ausführung statisch unbestimmter Fachwerke wird ein solches System von Anfangsspannungen durch eine ungenaue Ablängung der einzelnen Theile hervorgerufen. Der Kürze halber sollen die Constanten  $a_i$  die Eigenspannungen des Fachwerks heissen.

Das System der Eigenspannungen ist zwar von der Belastung unabhängig, trotzdem aber nicht konstant. Es variirt nämlich mit der Temperatur, bei deren Aenderung die Stäbe bestrebt sind, ihre Längen zu verändern. Die Aenderungen der Eigenspannungen in Folge einer bekannten Veränderung der Temperatur lassen sich recht

wohl in ganz ähnlicher Weise ermitteln, wie die durch eine Belastung hervorgerufenen Spannungen.

Gewöhnlich erlaubt man sich die Voraussetzung, das System der Eigenspannungen sei bei einer bestimmten mittleren Temperatur gleich Null und berechnet die in Folge eines als grösstmöglichen vorausgesetzten Temperatur-Intervalls hervorgerufenen Zusatzspannungen, die dann schlechtweg die Temperaturspannungen genannt werden. Wir werden auf die Ermittlung der Temperaturspannungen unten zurückkommen und bemerken, dass dieselbe von grosser Wichtigkeit ist, weil diese Spannungen häufig sehr bedeutend ausfallen.

Es muss noch erwähnt werden, dass das hier über die Constante  $\alpha_i$  der Spannung  $S_i$  Gesagte auch für die Auflager-Unbekannten im Allgemeinen gültig ist. Es kann (muss aber nicht) in dem Ausdrucke für eine Auflager-Unbekannte ebenfalls ein von der Belastung unabhängiges, mit der Temperatur aber veränderliches Addional-Glied vorkommen.

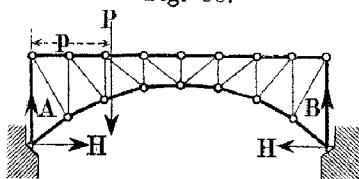
§ 52. In ähnlicher Weise, wie man beim statisch bestimmten Fachwerk die Auflösung der Knotenpunktsgleichungen durch bequemere Methoden zu ersetzen suchte, war man auch hier bestrebt, eine einfachere und leichter durchzuführende Methode der Berechnung aufzufinden. Gewöhnlich ist das Fachwerk derartig konstruirt, dass man ebenfalls einen Schnitt durch die Construction legen kann, der ausser dem betrachteten nur noch zwei andere Stäbe trifft. Es handelt sich dann vorzugsweise um die Ermittlung der Auflager-Unbekannten, nach deren Aufindung man die Stabspannungen genau so, wie es im § 43 für das statisch bestimmte Fachwerk beschrieben wurde, ermitteln kann.

Eine elegante Methode, die dort zunächst auf das Bogenfachwerk zwischen zwei Stützpunkten angewendet ist, hat Mohr in der Zeitschrift des Architekten- und Ing.-Vereins zu Hannover 1873 beschrieben. Bezüglich des Details dieser Berechnungs-Methode verweisen wir auf die angegebene Quelle, wollen aber nicht unterlassen, die Haupt-Gesichtspunkte derselben in Kürze darzustellen.

Fig. 98 zeigt das vorausgesetzte Fachwerk. Es ist hier  $o = 2$ ,  $p = 0$ ,  $2n = m + 3 = (m + 2o - p) - 1$ . Eine einzige Last  $P$  mit der Abscisse  $p$  wirke auf das

Fachwerk, (d. h. zunächst auf die Fahrbahn-Construction, die ihrerseits dieselbe auf die Endknotenpunkte des betreffenden Faches überträgt). Man stellt sich die Aufgabe, die durch  $P$  hervorgerufenen Auflagerdrücke zu berechnen. Die Auflagerknoten sind in derselben Horizontalen angenommen und man

Fig. 98.



kann daher durch Aufstellen der Momentengleichung für einen Auflagerpunkt leicht die vertikale Componente der im anderen Auflagerknoten übertragenen Auflager-Reaction angeben. Die Horizontal-Componente  $H$  muss für beide Auflagerpunkte gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sein. Auf ihre Bestimmung kommt es zunächst an.

Die Spannung jedes Stabes lässt sich bei dem angenommenen Belastungsfall auf sehr einfache Weise durch einen Ausdruck darstellen, in dem nur  $H$  als unbekannte Grösse vorkommt. Wir denken uns diesen Ausdruck und vermittelst desselben die durch die Belastung mit  $P$  hervorgerufene Längen-Aenderung für jeden einzelnen Stab aufgestellt. Dann nehmen wir an, es verändere zunächst nur der Stab I. seine Länge um das gefundene Maass und berechnen die dadurch hervorgerufene Vergrösserung der Spannweite unter der Voraussetzung, dass das Fachwerk nicht befestigt sei, sondern ohne alle Spannung platt auf dem Boden liege. Man übersieht sofort, dass sich für jeden Stab ein Ausdruck aufstellen lässt, der angibt, um wie viel die Spannweite des Fachwerks sich verändern würde, wenn der grade betrachtete Stab seine Länge um das früher berechnete Maass für sich allein veränderte. Die algebraische Summe aller dieser Spannweiten-Aenderungen, in denen ebenfalls nur  $H$  als Unbekannte und zwar in der ersten Potenz auftritt, muss aber offenbar = Null sein. Man hat damit eine Gleichung gefunden, durch deren Auflösung sich  $H$  ohne Weiteres ergibt.

Bei gleichem  $p$  ergibt sich  $H$  proportional dem Gewichte  $P$ , dagegen ist  $H$  eine Funktion höheren Grades von  $p$ . Das Verhältniss  $\frac{H}{P}$  stellt man graphisch dar als

Funktion von  $p$  und hat damit die Aufgabe soweit gelöst, dass zur weiteren Behandlung derselben keine Anwendung der Elasticitätsgesetze mehr nöthig ist.

Die Ermittlung des durch eine kontinuierlich vertheilte Belastung  $q$  zwischen den Abcissen  $a$  und  $b$  hervorgerufenen Horizontalschubs, der mit  $Q$  bezeichnet sei, findet man durch die Ausführung des Integrales

$$Q = \int_a^b q \frac{H}{P} dx.$$

Ist die Belastung eine gleichmässige, also  $q$  unabhängig von  $x$ , so wird

$$Q = q \int_a^b \frac{H}{P} dx.$$

Das letztere Integral stellt aber offenbar den zwischen den Abcissen  $a$  und  $b$  liegenden Theil der Fläche vor, die die Curve  $\frac{H}{P}$  mit der  $X$ -Achse einschliesst.

Wir halten diese Andeutungen für hinreichend zur Erklärung des Principes der Berechnung und event. auch zur Anleitung der Ausführung derselben für Geübtere und wenden uns nur noch zur Bestimmung der Temperatur-Spannungen.

§ 53. Die Temperatur-Spannungen, deren Ermittlung wir ebenfalls nur an dem Beispiele des in Fig. 98 dargestellten Bogenträgers auf zwei Stützpunkten erklären wollen, lassen sich gleichfalls auf rein statischem Wege sofort bestimmen, wenn man im Stande ist, den durch einen Temperatur-Unterschied hervorgebrachten Zuwachs des Horizontalschubs  $H$  anzugeben.

Nach einer gleichmässigen Temperatur-Veränderung aller Stäbe des Fachwerks würde die geometrische Figur desselben seiner ursprünglichen Figur genau ähnlich geblieben sein, wenn es ohne Hinderniss eine andere Gestalt anzunehmen vermöchte. Rechnet man den Ausdehnungs-Coefficienten des Schmied-Eisens für  $1^\circ C$  zu

$\frac{1}{80000}$ , so würde sich bei einer Temperatur-Erhöhung von  $a^\circ$  jeder Stab um  $\frac{a}{80000}$  seiner Länge verlängert haben.

Die nach der Temperatur-Veränderung von den Stab-Mittellinien gebildete Figur würde also der ursprüng-

lichen ähnlich geblieben sein, weil je 2 Dreiecke wegen des konstanten Verhältnisses der Seiten einander ähnlich wären. Die Vergrößerung der Spannweite  $l$  würde demnach  $l \frac{a}{80000}$  betragen, welcher Werth sich bei gegebenem  $l$  und einer Voraussetzung über das grösstmögliche  $a$  leicht ausrechnen lässt.

Man hat jetzt einfach jenen Werth von  $\triangle H$  zu berechnen, der die durch die Temperatur-Differenz hervorgerufene Spannweiten-Aenderung  $\triangle l$  wieder aufzuheben vermag. Zu diesem Zwecke stellt man genau so wie im vorigen § den Ausdruck für die durch  $\triangle H$  in jedem Stabe hervorgerufene Spannung und die durch dieselbe hervorgerufenen Längen-Aenderung auf und ermittelt wie viel die Spannweite sich in Folge der Längen-Aenderung jedes einzelnen Stabes verändern würde. Die algebraische Summe aller dieser Spannweiten-Aenderungen setzt man  $= -\triangle l$  und löst diese Gleichung nach der einzigen in ihr vorkommenden Unbekannten  $\triangle H$  auf.

Aus dem Gange der Rechnung, bei der man sich wieder die Verwechslung der Knotenpunkts-Coordinaten während der Deformation mit den ursprünglichen Coordinaten erlaubt, ergibt sich, dass  $\triangle H$  und daher sämtliche Temperaturspannungen dem Temperatur-Unterschiede  $a$  proportional sind.

Gewöhnlich nimmt man an, dass bei der Temperatur, bei der der Träger montirt wurde, der Temperatur-Horizontalschub = Null sei und dass eine gleich grosse Erniedrigung wie Erhöhung der Temperatur von im Mittel  $40^{\circ} C$  zu fürchten sei. Man erhält dann einen positiven und einen gleich grossen negativen maximalen Temperatur-Horizontalschub, der einer Spannweiten-Aenderung von  $+$  oder  $- \frac{1}{20000}$  der Spannweite entspricht. Die durch diese Grenzwerte hervorgerufenen Eigenspannungen sind den Grenzwerten der durch die Belastung hervorgerufenen Stabspannungen zuzuschlagen und die Stab-Dimensionen nach den gebildeten Summen zu bestimmen.

§ 54. Das statisch bestimmte Fachwerk aus nur zweigelenkigen Knotenpunkten mit Verwendung mehrgliedriger Stäbe. Für viele unserer Leser

wegen ähnlich würde gege- ügliche werden einige Andeutungen über die Theorie derartiger Con- structionen von Interesse sein, da es u. W. bisher an einer Arbeit, die diesen Gegenstand auch nur flüchtig berührt hätte, gänzlich fehlte. Aus eben diesem Grunde ist man aber einstweilen durchaus nicht berechtigt, gegen diese Constructions a priori das Verdammungs-Urtheil auszusprechen.

Wir setzen  $m$  Stäbe voraus, die zum Theil zweigelenkig, theils mehrgelenkig sein können und sich in  $n$  Knoten- punkten gelenkartig paarweise verbinden. Die freien Knotenpunkte sind alle zweigliedrig, die Auflagerpunkte können jedoch auch eingliedrig sein. Wir nehmen  $o$  Auflagerpunkte, darunter  $q$  eingliedrige an und setzen bei  $p$  der  $o$  Auflagerknoten das Vorhandensein einer besondern Auflagerbedingung voraus. Ausserdem sei vorläufig angenommen, dass die Lasten nur an den Stäben selbst, nicht an den Knotenpunkten angreifen. Die Gelenkdrücke zweier sich an einem freien Knotenpunkte vereinigenden Stäbe, auf deren Bestimmung bei gegebener Belastung es ankommt, sind dann einander gleich und entgegengesetzt gerichtet.

Die Zahl der Unbekannten beträgt in diesem Falle: 1)  $2(n - o)$  Unbekannte, die sich auf die Grösse und Bichtung der Gelenkdrücke an den freien Knoten beziehen; 2)  $4(o - q)$  Unbekannte von den Gelenkdrücken der Stäbe an den zweigliedrigen Auflagerknoten; 3)  $2o - p$  Auf- lager-Unbekannte; zusammen  $2n + 4(o - q) - p$  Unbekannte. Zu deren Bestimmung hat man für jeden Stab 3 Gleichgewichtsbedingungen und deren 2 für jeden zweigliedrigen Auflager-Knoten, also zusammen  $3m + 2(o - q)$  Gleichungen. Für das statisch bestimmte Fachwerk muss also die Gleichung bestehen

$$2n + 4(o - q) - p = 3m + 2(o - q) \text{ oder} \\ 3m = 2(n + o - q) - p.$$

Da sich dieser Gleichung bei gegebenem  $o$ ,  $q$  und  $p$  stets genügen lässt, kann man auch und zwar auf unend- lich mannigfaltige Art ein derartiges statisch bestimmtes Fachwerk zwischen gegebenen Auflagerpunkten konstru- iren. Man hat zu diesem Zwecke einfach die oben aufgestellte diophantische Gleichung nach  $m$  und  $n$



aufzulösen. Bezeichnet man der Kürze halber das bekannte  $2 (o - q) - p$  mit  $a$  und mit  $g$  irgend eine ganze positive Zahl, so wird

$$m = 2g + a; n = 3g + a$$

$a$  kann positiv oder negativ sein; immerhin sind jedoch stets unendlich viele ganze positive Lösungen für  $m$  und  $n$  möglich.

Es lässt sich leicht zeigen, dass ein hiernach konstruiertes Fachwerk auch dann noch statisch bestimmt ist, wenn die Lasten an den Knotenpunkten angreifen.

Um nicht zu weitläufig zu werden, unterlassen wir es hier, bestimmte konkrete Beispiele vorzuführen, die vorläufig doch nur ein theoretisches Interesse hätten und ohnedies von jedem Leser mit Leichtigkeit aufgestellt werden können. Jedenfalls werden wir bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Es ist selbstverständlich, dass man bei einer erweiterten Theorie des Fachwerks nicht nöthig hat, in einer ähnlich exklusiven Weise, wie man bisher nur die Fachwerke aus zwei Stäben behandelte, jetzt die reinen zweigliedrigen Fachwerke (Fachwerke aus zweigliedrigen Knotenpunkten) zu betrachten. Diese beiden Constructionen sind nur als Grenzfälle und als allgemeiner Fall ist ein Fachwerk anzusehen, das sowohl mehrgliedrige Knotenpunkte als mehrgelenkige Stäbe enthält.

Man wird aber grade zwischen diesen beiden Grenzfällen eine gewisse Verwandtschaft bemerken, eine Verwandtschaft, die die grösste Aehnlichkeit mit der reciproken Verwandtschaft geometrischer Gebilde zeigt. Wir möchten deshalb diese beiden Constructionen ebenfalls reciproke Constructionen nennen.

## Fünfter Abschnitt.

### Die Theorie der Tonnengewölbe.

§ 55. Im dritten Abschnitte seines vorliegenden Werkes hat Navier die wichtigsten Grundsätze dargelegt, auf denen jede Gewölbetheorie aufgebaut werden muss. Er untersuchte, ob ein gegebenes Gewölbe bei gegebener Belastung überhaupt halten kann. Wenn dies der Fall ist, schliesst er, darf man versichert sein, dass es im Gleichgewicht bleibt. Einen Beweis dieser Behauptung hat er allerdings nicht gegeben. Ein strenger Beweis dieser Voraussetzung wurde bisher überhaupt nicht gebracht; ein solcher müsste auf ziemlich willkürliche Annahmen über die Elasticität der Bausteine gestützt werden und wäre dann wegen des schlechten Zutreffens der Voraussetzungen bei einem praktischen Falle kein strenger Beweis mehr. — Trotzdem steht, wie wir zeigen werden, die Theorie im Wesentlichen auch heute noch auf dem Standpunkte Navier's. Sie vermag denselben jetzt allerdings etwas besser zu motiviren, aber die wirkliche Berechtigung desselben beruht doch auch jetzt noch auf den zahllosen Bestätigungen desselben durch die Erfahrung.

Immerhin hat die Gewölbetheorie seit Navier die wichtigsten und bedeutungsvollsten Fortschritte gemacht. Man kann diese Fortschritte in zwei Classen eintheilen, von denen die erste sich auf die Behandlung des Problems im Allgemeinen und die Discussion gewisser über das Gleichgewicht der Gewölbe gemachter Hypothesen bezieht, während die andern mehr formaler Natur sind und eine bequomere und übersichtlichere Ausführung der anzustellenden Rechnungen gestatten.

Man möchte annehmen, dass es am zweckmässigsten wäre, zuerst die neueren Theorien, die das Princip der Behandlung des Problems betreffen, darzustellen und erst nach diesen die für die praktische Durchführung der Rechnungen bequomen Methoden anzugeben. Wir ziehen jedoch hier den umgekehrten Weg vor, weil es bei der Auseinandersetzung der praktischen Berechnung, der man heute fast ausnahmslos den Vorzug gibt (nämlich der graphischen) möglich wird, die ganze Aufgabe der Gewölbetheorie schärfer und präziser aufzufassen.

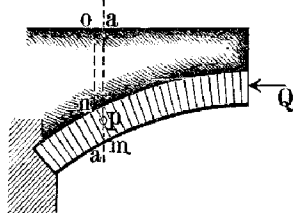


Soll das ganze Gewölbe im Gleichgewicht sein, so muss das für die Fuge  $mn$  Gesagte bei jeder einzelnen Fuge zutreffen. Die Frage, ob letzteres der Fall sei, lässt sich am einfachsten dadurch entscheiden, dass man von der Fuge  $mn$  zur Fuge  $m'n'$  übergeht und die Resultirende  $R'$  aus dem bereits gefundenen Mitteldruck  $R$  und dem zwischen  $omn$   $m'n'o$  liegenden Gewichte  $p$  bildet. Man kann in dieser Weise durch Weitergehen von Fuge zu Fuge (indem man mit der Scheitelfuge anfängt) sehr rasch für jede Fuge den Angriffspunkt  $r$ , sowie Grösse und Richtung des Mitteldruckes  $R$  ermitteln. Der polygonale Zug, der alle Angriffspunkte  $r$  oder die sog. Druck-Mittelpunkte verbindet, wird die Drucklinie genannt. Die Drucklinie geht in eine Curve über, wenn man sich die Wölbsteinstärke unendlich klein vorstellt.

Andere Schriftsteller nannten den geometrischen Ort der Punkte  $r$  die Stützzlinie und Culmann versteht z. B. (vergl. Culmann graphische Statik, 1. Auflage) unter der Drucklinie den geometrischen Ort der Schnittpunkte zweier aufeinanderfolgender Resultirenden  $R$ . Wir werden indessen sehen, dass die letztere Linie nur von untergeordneter Bedeutung ist und behalten für den geometrischen Ort der Punkte  $r$  die üblichste Bezeichnung „Drucklinie“ bei.

Anstatt die Schnitte  $mno$  zu legen, kann man übrigens auch einen senkrechten Schnitt  $aa$  sich geführt

Fig. 100.



denken und für diesen den Mitteldruck und Druck-Mittelpunkt aufsuchen. Man hat zu diesem Zwecke einfach das als bekannt anzusehende  $Q$  mit dem Gewichte des zwischen  $aa$  und dem Scheitelschnitte liegenden Gewölbtheiles zur Resultirenden zusammenzusetzen. Für die senkrechten Schnitte  $aa$  lässt sich nämlich die

Construction der Drucklinie viel bequemer ausführen. Ist man im Stande, für jeden senkrechten Schnitt die Grösse  $R$  und den Punkt  $r$  anzugeben, so kann man dieselben auch auf sehr einfache Weise für die Fuge  $mn$

finden. Man ziehe nämlich  $aa$  durch einen Punkt  $p$  der Fuge  $mn$  und setze das senkrecht abwärts gerichtete Gewicht des Theiles  $oanp$  mit dem senkrecht aufwärts gerichtet zu nehmenden Gewicht von  $amp$  zusammen. Die Resultirende beider vereinige man mit dem Mitteldrucke  $R$  von  $aa$  und man erhält damit Grösse, Lage und Richtung des Mitteldruckes der Fuge  $mn$ .

Die Drucklinie, die man unter der Voraussetzung senkrechter Schnitte erhält, ist hiernach wohl zu unterscheiden von jener, die den Schnitten  $mno$  entspricht. Beide Linien berühren sich im Scheitel und im weiteren Verlaufe verläuft die letztere allenthalben über der ersteren. Indessen pflegt bei den üblichen Ausführungsformen der Unterschied nicht sehr bedeutend zu sein und man erlaubt sich der Einfachheit halber die Ungenauigkeit, beide mit einander zu verwechseln. Bei verhältnissmässig grossen Gewölbestärken und sehr schief liegenden Fugen ist diese Vernachlässigung indessen nicht zulässig. Immerhin sei sie hier zunächst adoptirt.

Die praktische Ausführung der Construction der Drucklinie für ein gegebenes  $Q$  geschieht dadurch, dass man die eine Gewölbhälfte durch Führung senkrechter Schnitte in eine Anzahl Lamellen von gleicher Breite theilt und das Gewicht jeder Lamelle durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft ersetzt. Hat man die Belastung des Gewölbes auf eine gleichwerthige Uebermauerung von dem specifischen Gewichte des Wölbmaterials reducirt, so sind diese Kräfte einfach den Lamellenflächen proportional und werden bei der Construction der Kräftepolygone durch Linien dargestellt, die den mittleren Lamellenhöhen proportional sind. Hierauf setzt man der Reihe nach  $Q$  zunächst mit dem ersten Lamellen-Gewichte, die Resultirende daraus mit dem zweiten Lamellen-Gewichte u. s. w. zusammen und ermittelt die Schnittpunkte der betreffenden Resultirenden mit den entsprechenden senkrechten Schnittlinien. Die so gefundenen Druck-Mittelpunkte verbindet man hierauf durch eine stetige Curve, die die  $Q$  entsprechende Drucklinie ist. Die Kräftedreiecke für die Zusammensetzung jedes Mitteldruckes mit dem folgenden Lamellen-Gewichte legt man mit den gleichen Seiten aneinander und erhält dadurch einen Kräfteplan, der aus einer senkrechten Linie besteht,

Punkt  $p$   
 ichtete  
 aufwärts  
 sammen.  
 a Mittel-  
 e, Lage

ssetzung  
 u unter-  
 tspricht.  
 weiteren  
 ersteren.  
 men der  
 nd man  
 auigkeit,  
 smässig  
 n Fugen  
 g. Im-

ion der  
 h, dass  
 krechter  
 r Breite  
 eine im  
 an die  
 Ueber-  
 materials  
 nflächen  
 on der  
 mittleren  
 an der  
 ewichte,  
 ewichte  
 kte der  
 ehenden  
 Druck-  
 stetige  
 t. Die  
 Mittel-  
 gt man  
 ladurch  
 besteht,

auf der alle Lamellen-Gewichte der Reihenfolge nach abgetragen sind und einem Punkte, dem sogenannten Pole, von dem nach den Trennungspunkten je zweier Lamellen-gewichte auf jener Vertikalen Linien gezogen sind, die die Mitteldrücke der Grösse und Richtung nach darstellen. Die Entfernung des Poles von der Vertikalen, die sog. Poldistanz stellt den angenommenen Horizontalschub  $Q$  dar.

Man sieht leicht ein, dass in unserem Falle (nämlich bei der Annahme vertikaler Schnittlinien und senkrechter Belastung) die Richtung des Mitteldruckes in jedem Schnitte zusammenfällt mit der Richtung der in dem betreffenden Druckmittelpunkte an die Drucklinie gelegten Tangente. Legt man in Fig. 100 den Schnitt  $aa$  so, dass  $oapn = apm$  wird, so läuft die Richtung des Mitteldruckes für den Schnitt  $aa$  mit der Richtung des Fugendruckes für  $mn$  parallel. Man kann also leicht aus der Neigung der Drucklinientangenten gegen die Fugen erkennen, ob die Gefahr eines Gleitens längs dieser Fugen vorhanden ist. Andererseits erkennt man, dass die Gefahr eines Einsturzes durch Drehung der Wölbsteine um ihre Kanten nicht vorhanden ist, wenn die Drucklinie ganz innerhalb des Gewölbe-Querschnitts verläuft. Schliesslich kann man aber noch mit Hilfe der von Navier in § 330 u. ff. angenommenen, für die Praxis hinreichend genauen Hypothese über die Vertheilung des Mittel-Druckes in der Fuge die in jeder Fuge auftretende grösste Pressung bestimmen, da die Grösse jedes Mitteldruckes unmittelbar aus dem Kräfteplane entnommen werden kann und der Angriffspunkt desselben durch die Drucklinie gegeben ist.

Man sieht also ein, dass man nach Construction der zum Horizontalschube  $Q$  gehörigen Drucklinie auf sehr einfache und bequeme Art bestimmen kann, ob das Gewölbe unter der Voraussetzung dieses Horizontalschubes im Gleichgewicht sein würde.

Unter allen Fugen des Gewölbes werden einige sein, in denen sich die Drucklinie den Kanten mehr nähert als in den anderen. An diesen Kanten wird die Pressung des Materials einen Maximalwerth annehmen und der Bruch des Gewölbes würde bei nicht genügender Materialfestigkeit mit der Zerdrückung der Steine an jenen

Stellen beginnen. Diese Fugen werden bekanntlich die Bruchfugen genannt und werden auch von Navier erwähnt.

Nehmen wir jetzt die Lage des Angriffspunktes und die Grösse von  $Q$  veränderlich an, so wird zu jeder neuen Annahme eine neue Drucklinie gehören. Unter diesen Drucklinien wird es solche geben, die einen Einsturz des Gewölbes herbeiführen würden und solche, bei deren Existenz das Gewölbe im Gleichgewichte bleibt. Damit überhaupt die Möglichkeit vorhanden sei, dass das Gewölbe im Gleichgewichte bleibe, muss natürlich mindestens eine Drucklinie der letzteren Art möglich sein. Die Frage, welche von allen möglichen Drucklinien nun als die wirklich existirende anzusehen sei, werden wir später beantworten.

Denken wir uns der Horizontalschub  $Q$  verändere seine Grösse, der Angriffspunkt desselben in der Scheitelfuge behalte aber seine frühere Lage bei. Bei einem Wachsen von  $Q$  wird die demselben entsprechende Drucklinie flacher und sämtliche Druck-Mittelpunkte  $r$  verschieben sich nach oben, nähern sich also der äusseren Wöblinie. Bei einer weiteren Zunahme wird die Drucklinie sich allmählich in den Bruchfugen den oberen Kanten so weit nähern, dass ein Weiterrücken den Bruch des Gewölbes zur Folge hätte. Man kann auf diese Weise den grössten Horizontalschub bestimmen, der in dem angenommenen Punkte der Scheitelfuge angreifen kann, ohne das Gleichgewicht des Gewölbes zu beeinträchtigen. In gleicher Weise lässt sich auch eine untere Grenze für  $Q$  bestimmen.

Andererseits möge jetzt  $Q$  fortwährend dieselbe Grösse beibehalten, während sich der Angriffspunkt desselben längs des Scheitelsechnittes verschiebe. Die Drucklinie wird dadurch in ihrer Gestalt nicht verändert, sondern nur aufwärts oder abwärts parallel verschoben. Man wird auch hier leicht eine obere und untere Grenze angeben können, zwischen denen der Angriffspunkt des gewählten  $Q$  liegen muss, wenn Gleichgewicht bestehen soll.

Der Vollständigkeit halber muss hierzu noch bemerkt werden, dass es im ersten Falle, wenn wir nämlich den Angriffspunkt als fest und  $Q$  als veränderlich annehmen, keineswegs nöthig ist, dass sich zu jedem Angriffspunkte

überhaupt irgend ein Horizontalschub  $Q$  angeben lässt, unter dessen Wirkung das Gewölbe im Gleichgewichte bleibt. Ebenso ist es keineswegs nöthig, dass zu jeder Grösse des Horizontalschubs überhaupt irgend ein Angriffspunkt gehöre, so dass Gleichgewicht herrsche. Im ersten Falle erkennt man daraus, dass durch den betreffenden Punkt, im zweiten Falle, dass mit dem betreffenden Horizontalschube keine Gleichgewichts-Drucklinie möglich ist.

Aus den angestellten Betrachtungen ergibt sich das folgende bemerkenswerthe Resultat. Nehmen wir an, durch einen Punkt  $A$  der Scheitelfuge sei eine Schaar von Gleichgewichts-Drucklinien möglich, deren Horizontalschub zwischen den Grenzen  $Q_{min}$  und  $Q_{max}$  liege. Bezeichnen dann  $A'$  den etwas höher liegenden Nachbarpunkt von  $A$  und  $Q'_{min}$  resp.  $Q'_{max}$  die Grenzwerte des Horizontalschubs für den Punkt  $A'$ , so ist stets  $Q'_{min} < Q_{min}$  und  $Q'_{max} < Q_{max}$ .

Nennen wir der Kürze halber Gleichgewichts-Drucklinien oder mögliche Drucklinien solche, bei deren Existenz das Gewölbe im Gleichgewichte ist, so erkennt man, dass der kleinste Horizontalschub einer möglichen Drucklinie entspricht, die durch einen möglichst hoch gelegenen Punkt der Scheitelfuge geht, während umgekehrt der grösste Horizontalschub jener der möglichen Drucklinien entspricht, die durch den tiefsten Punkt der Scheitelfuge geht.

Man kann sich die Aufgabe stellen den geometrischen Ort aller Punkte aufzusuchen, durch die überhaupt mögliche Drucklinien gelegt werden können. Sämmtliche derartige Punkte liegen innerhalb eines von zwei Linien begrenzten Flächenstückes, das die Druckfläche genannt werden möge. Die Grenzlinien dieser Fläche sollen die Druckgrenzlinien heissen. Dieselben liegen selbstverständlich beide innerhalb des Gewölbe-Querschnittes.

Navier zeigte, dass das Oeffnen der Fugen an einer Kante bereits beginne, wenn der Druck-Mittelpunkt ausserhalb des inneren Fugendrittels liegt. Nimmt man, wie dies vielfach geschieht, an, dass ein Beginnen des Klaffens der Fugen als unzulässig, also gewissermassen als Beginn des Einsturzes anzusehen sei, so sind nach

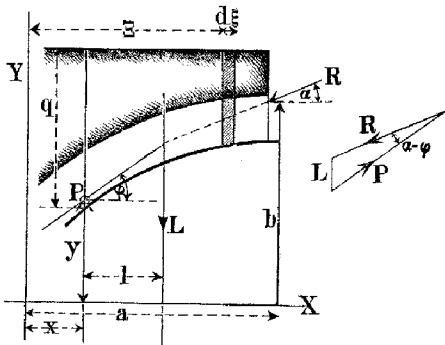


unserer Bezeichnung nur solche Drucklinien als mögliche anzusehen, deren Punkte sämtlich innerhalb der mittleren Fugendrittel liegen. Die Druckgrenzlinien verlaufen dann ebenfalls innerhalb der Verbindungslinien der Fugendrittel, die sie an den Bruchfugen berühren. Man sieht leicht ein, dass die Druckfläche ein vorzügliches Mittel bieten kann, die Stabilität eines Gewölbes zu charakterisiren und behalten uns vor, a. a. O. darauf zurückzukommen.

§ 57. Unsymmetrisch gestaltete und belastete Gewölbe. Auch jetzt setzen wir noch voraus, dass nur senkrechte, sonst aber beliebig vertheilte Belastungen auf das Gewölbe einwirken sollen. Offenbar lässt sich die Drucklinie eines solchen Gewölbes ohne Weiteres nach denselben Regeln wie im vorigen § konstruiren, wenn für irgend einen Schnitt Grösse, Richtung und Lage des Mitteldrucks bekannt sind.

Die Gleichung der Drucklinie lässt sich hier ebenfalls ohne Schwierigkeit angeben. Wir denken uns (in Fig 101) irgend einen vertikalen Schnitt mit der Abscisse  $a$  durch das Gewölbe geführt, nennen den dort herrschenden

Fig. 101.



Mitteldruck  $R$ , den Neigungswinkel von  $R$  gegen die Abscissen-Achse  $\alpha$  und die Ordinate des Druck-Mittelpunktes  $b$ .

Ausserdem führen wir irgend einen zweiten vertikalen Schnitt mit der Abscisse  $x$ . In Bezug auf den

Druck-Mittelpunkt des Schnittes  $x$ , dessen Ordinate  $y$  genannt sei, muss das Moment des zwischen  $x$  und  $a$  liegenden Gewölbetheiles  $L$  gleich und entgegengesetzt gerichtet sein dem Momente von  $R$ , das wir uns in eine

vertikale und horizontale Componente zerlegt denken. Die letztere, d. i. der Horizontalschub des Gewölbes sei  $Q$  genannt. Das Moment des zwischen  $x$  und  $a$  liegenden Gewölbetheiles erhält man durch Ausführung des Integrales

$$\int_x^a q d\xi (\xi - x). \text{ Man hat daher die Gleichung}$$

$$R \sin \alpha (a - x) - R \cos \alpha (b - y) + \int_x^a q (\xi - x) d\xi = 0$$

$$y = b - \frac{\int_x^a q \xi d\xi - x \int_x^a q d\xi + R \sin \alpha (a - x)}{R \cos \alpha}$$

Durch zweimalige Differentiation nach  $x$  erhält man hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int_x^a q d\xi}{R \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \text{ und}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{q}{R \cos \alpha} = - \frac{q}{Q}.$$

Letztere Gleichung ist die allgemeine Differential-Gleichung der Drucklinie.

Mit Hülfe der gegebenen Gleichungen lässt sich das Gleichgewicht der Gewölbe auf analytischem Wege behandeln, wenn  $q$  als Funktion von  $x$  gegeben ist. Die Gleichung der Drucklinie lässt sich alsdann schreiben

$$y = - \frac{1}{Q} \int dx \int dx q + C_1 x + C_2.$$

In dieser Gleichung kommen drei von der Belastung und Form des Gewölbes unabhängige Constanten  $Q$ ,  $C_1$  und  $C_2$  vor. Zu deren Bestimmung erhält man je eine lineare Gleichung, wenn über Grösse, Richtung oder Angriffspunkt des Mitteldruckes irgend eines Schnittes  $x$  eine Voraussetzung gemacht wird. Eine dieser Annahmen muss sich jedoch auf die Lage irgend eines Druck-Mittelpunktes beziehen. Es kann demnach stets eine und nur eine einzige Drucklinie angegeben werden, wenn drei derartige Stücke gegeben sind. So kann man beispielsweise stets durch 3 gegebene Punkte eine Drucklinie legen.

Unter allen Drucklinien, die den beliebigen Annahmen über die Werthe von  $Q$ ,  $C_1$  und  $C_2$  entsprechen, muss, wenn das Gewölbe überhaupt die Möglichkeit haben

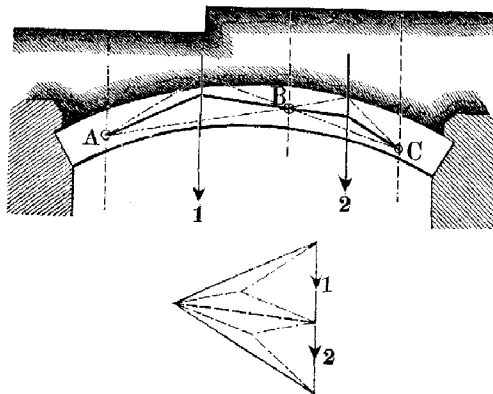
soll, zu halten, natürlich wieder mindestens eine Gleichgewichts-Drucklinie vorhanden sein. Auch hier lässt sich der geometrische Ort aller Punkte angeben, durch die Gleichgewichts-Drucklinien gezogen werden können. Es lässt sich von vornherein annehmen, dass die Stabilität eines Gewölbes um so grösser sein wird, je mehr Möglichkeiten ihm geboten sind, im Gleichgewicht zu bleiben, je breiter also die Druckfläche ausfällt. Ein Gewölbe, dessen Druckfläche sich an einzelnen Punkten sehr verengt, wird als nicht sehr stabil und überhaupt als eine ungünstige Construction anzusehen sein.

Ueber die Ausführung der häufig gestellten Aufgabe, durch drei gegebene Punkte eine Drucklinie zu legen, müssen wir uns hier mit kurzen Andeutungen begnügen. Eine sehr elementare Anleitung dazu können unsere Leser, denen diese nicht genügen sollten, in des Verfassers: „Die graphische Lösung technischer Aufgaben“ (Leipzig 1877) finden.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe sucht man zunächst Grösse und Richtung des durch einen der gegebenen Punkte gehenden Mitteldruckes zu bestimmen. Nach dessen Auffindung kann die Construction leicht in der früher angegebenen Weise erfolgen.

Wir legen durch die 3 gegebenen Punkte *A*, *B* und *C* (Fig. 102) senkrechte Schnitte und fassen die Gewichte

Fig. 102.



der beiden durch diese begrenzten Gewölbe-theile zu den Resultirenden 1 und 2 zusammen.

Hierauf nimmt man an, der Gewölbe-theil 2 sei gewichtslos und kontruiert dies

Gleich-  
lässt sich  
durch die  
en. Es  
Stabilität  
hr Mög-  
bleiben,  
Gewölbe,  
en sehr  
aupt als

en Auf-  
linie zu  
ngen be-  
können  
, in des  
er Auf-

ht man  
der ge-  
timmen.  
leicht in

,  $B$  und  
Gewichte  
beiden  
ch diese  
renzten  
wölbe-  
le zu  
Resul-  
nden 1  
2 zu-  
men.

ierauf  
mt man  
der Ge-  
lbetheil  
sei ge-  
chtslos  
kon-  
rt dies

unter dieser Voraussetzung auftretenden Mitteldrücke in  $A$  und  $C$ . Der letztere muss dabei in der Verbindungslinie  $BC$  liegen. In gleicher Weise construirt man die durch die Belastung des Gewölbethelles 2, während 1 gewichtslos ist, hervorgerufenen Fugendrücke. Sind 1 und 2 gleichzeitig belastet, so sind die dadurch hervorgerufenen Mitteldrücke die Resultirenden aus jenen Partial-Drücken und die Construction kann hiernach in einfacher Weise erfolgen. Einen Beweis kann man leicht durch Aufstellen der Momentengleichung für  $B$  erbringen.

§ 58. Zu den oben gegebenen Auseinandersetzungen über die Drucklinie und ihre Construction, haben wir noch Einiges hinzuzufügen für den Fall, dass die Belastungsart des Gewölbes eine andere als die bisher vorausgesetzte ist. Ist das Gewölbe mit einer Erd-Hinterschüttung versehen, so wird der Druck auf den Gewölberücken keineswegs an allen Stellen vertikal gerichtet sein. In den Schnitten  $no$  der Figur 99 wird in diesem Falle ein Erddruck übertragen und die Belastung des Gewölbes zwischen den Schnitten  $nom$  und  $n'o'm'$  wird aus der Resultirenden des Eigengewichtes von  $onmm'n'o'$  und der geometrischen Summe der auf die Flächen  $on$  und  $o'n'$  wirkenden Erddrücke gebildet. Da die letzteren sich nur annähernd berechnen lassen, hat es keinen Zweck durch genaue Rechnungsführung einen Ausdruck für die Belastung des Gewölberückens an jeder Stelle aufzustellen. Der Horizontalschub ist in diesem Falle im Scheitel am grössten und nimmt nach den Widerlagern hin allmählich ab. Die Drucklinie wird dadurch in ihrem unteren Verlaufe etwas nach unten hin abgelenkt. Bei nicht zu hoher Ueberschüttung und flacher Gewölbeform ist diese Ablenkung nur unbedeutend.

Wäre der Reibungs-Winkel der Erde = Null, so würde der Druck allenthalben normal zum Gewölberücken gerichtet sein. Diese Annahme macht man zuweilen bei Gewölben unter einer hohen Ueberschüttung. Jedenfalls wird der Druck zwischen der vertikalen und der normalen Richtung liegen.

Auf die Construction der Drucklinie übt diese andere Art der Belastung, wenn sie nur als gegeben anzusehen ist, natürlich keinen Einfluss.

Zuweilen wird verlangt, dass nicht nur eine ganz bestimmte (permanente) sondern jede überhaupt jemals mögliche Belastungs-Art bei der Berechnung des Gewölbes in Betracht zu ziehen sei. Indessen pflegt diese zufällige Belastung in der Regel sehr klein gegen die permanente Last zu sein. Man kann indessen die Aufgabe dadurch behandeln, dass man eine Anzahl von Belastungsfällen untersucht, zwischen die die sonst noch möglichen Belastungsarten interpolirt werden können. Jedem bestimmten Belastungsfalle entspricht dann eine bestimmte Druckfläche. Als Druckfläche des Gewölbes mit veränderlicher Belastung ist jenes Flächenstück anzusehen, das von den Enveloppen sämtlicher den einzelnen Belastungsfällen entsprechenden Druckgrenzlinien eingeschlossen wird. Für die Beurtheilung der Stabilität des Gewölbes ist jedoch die ungünstigste Separat-Druckfläche massgebend.

Dass die Drucklinie eines Gewölbes auch in die Widerlager resp. Pfeiler fortgesetzt werden kann, ist selbstverständlich und bedarf keiner nähern Auseinandersetzung.

Schliesslich möge hier noch eine kurze Erklärung Platz finden, wie man mit Hülfe der von Navier über die Vertheilung des Mitteldruckes über die Fuge aufgestellten Hypothese die grösste Kantenpressung ermitteln kann.

Man zerlegt zu diesem Zwecke den Mitteldruck in eine normale und eine Tangential-Componente und vernachlässigt letztere. Dann denke man sich in jedem Punkte der Fuge eine zur Fugenrichtung senkrechte Linie gezogen und auf dieser in irgend einem Maassstabe die in dem betreffenden Fugenpunkte herrschende Spannung aufgetragen. Man erhält dadurch eine Fläche, die im Querschnitt durch eine Linie repräsentirt wird und die die Pressungsfläche genannt wird. Der Raum zwischen der Fuge, der Pressungsfläche und den durch die Fugenkanten gelegten zur Fugenrichtung senkrechten Ebenen wird der Pressungsraum genannt. Der Schwerpunkt dieses Pressungsraumes muss auf der Normalcomponente des Mitteldruckes, die mit  $N$  bezeichnet sei, liegen. Bezüglich der Gestalt der Pressungsfläche, die übrigens von örtlichen Umständen, wie der Bearbeitung der

Lagerfugen, der Vertheilung des Mörtels u. dergl. wesentlich abhängig ist, sei mit Navier die Annahme gemacht, dass sie eine zum Gewölbe-Querschnitt senkrechte Ebene sei. Liegt der Druck-Mittelpunkt im mittleren Fugendrittel, so wird der Pressungsraum im Querschnitte durch ein Trapez dargestellt. Wird die Fugenlänge mit  $l$ , die Entfernung des Druck-Mittelpunktes von der Fugen-Mitte mit  $e$ , die grösste Kantenpressung mit  $s$  bezeichnet und  $N$  auf die Längen-Einheit der Gewölbelänge bezogen, so hat man demzufolge

$$s = N \frac{6e + l}{l^2}.$$

Für  $e = \frac{l}{6}$  geht das Trapez in ein Dreieck über und man erhält  $s = \frac{2N}{3}$ . Wird  $e$  grösser, so würde die vorstehende Formel ebenfalls noch Gültigkeit behalten, wenn man annehmen dürfte, dass in der Fuge eine Zugspannung übertragen werden könnte. Da man auf eine solche jedoch nicht rechnen darf, erhält man für diesen Fall

$$s = \frac{2}{3} \frac{N}{\frac{l}{2} - e}.$$

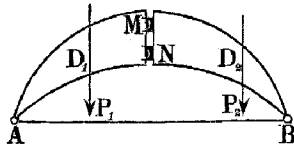
Für  $e = \frac{l}{2}$  geht die Formel in  $s = \infty$  über, wie es sein muss.

§ 59. Das Princip des kleinsten Widerstandes. Wir gehen jetzt zur Besprechung der wichtigsten Hypothesen über, die in Bezug auf die unter allen möglichen Drucklinien wirklich auftretende gemacht wurden. Eine der interessantesten ist das von Mosceley und Scheffler aufgestellte Princip des kleinsten Widerstandes. Wir werden jedoch zeigen, dass bei der Aufstellung desselben von einer irrigen Ansicht ausgegangen wurde und erwähnen dasselbe nur der Vollständigkeit halber und weil auch jetzt noch vielfach davon Gebrauch gemacht zu werden scheint.

Die dieser Theorie zu Grunde liegende Idee lässt sich am einfachsten auf folgende Weise erklären. Wir denken uns zwei starre dreieckartige Figuren  $D_1$   $D_2$ , an denen verschiedene senkrechte Lasten angreifen, die wir uns zu den Resultirenden  $P_1$  resp.  $P_2$  zusammengesetzt denken. Jede der Figuren  $D_1$  und  $D_2$  sei an

einem Punkte  $A$  resp.  $B$  fest aufgelagert und ausserdem seien beide dadurch im Scheitel gegeneinander gestützt, dass

Fig. 103.



sie sich in zwei Punkten  $M$  und  $N$  berühren. Der Klarheit halber möge man sich vorstellen die Figur  $D_1$  besitze in  $M$  und  $N$  zwei Zapfen, die von zwei Gabeln der Figur  $D_2$  umfasst werden. Die beiden Figuren können sich dann

nur dadurch von einander trennen, dass sich die in  $M$  und  $N$  berührenden Punkte im ersten Augenblicke senkrecht zur Linie  $MN$ , die wir der Kürze halber auch die Scheitelfuge nennen wollen, von einander entfernen. Es sei die Aufgabe gestellt, den Horizontalschub einer derartigen Construction (deren Analogie mit einem Gewölbe man nicht verkennen wird) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke denke man sich die beiden Punkte  $A$  und  $B$  durch eine starre, gewichtslose Stange verbunden und die Auflagerpunkte in  $A$  und  $B$  derartig construirt, dass sie nur in senkrechter Richtung widerstehen können. Der sonst auf die Punkte  $A$  und  $B$  ausgeübte Horizontalschub wird jetzt durch die Stange  $AB$  aufgenommen. Dieser Horizontalschub wird aber nicht von den Querschnitts- Dimensionen jener Stange abhängen. Unter allen möglichen Horizontalschüben, die die Construction ausüben kann, ist jener der kleinste, welcher der durch den Punkt  $M$  geführten Drucklinie entspricht. Macht man die Querschnitts- Dimensionen der Stange  $AB$  so klein, dass sie selbst dem möglichst kleinsten Horizontalschube nicht zu widerstehen vermag, so wird offenbar der Einsturz erfolgen. Wählt man aber die Stange  $AB$  so, dass sie grade noch dem kleinsten Schube zu widerstehen vermag, so wird behauptet, dass Gleichgewicht vorhanden sei. Denn bei dem Beginnen des Zerreißens der Stange würde diese solche Kräfte auf  $A$  und  $B$  ausüben, die mit den Lasten Gleichgewicht hielten. Daraus wird dann geschlossen, dass der Horizontalschub überhaupt immer jenen kleinsten Werth besitzen müsse.

Man wird diesen Auseinandersetzungen vielleicht gerne beipflichten, wenn man absolute Starrheit der

Constructionstheile voraussetzen darf. Wäre nur die Stange  $AB$  elastisch, so würde die Annahme ohne Zweifel genau zutreffen. Setzen wir dagegen voraus, dass nur  $D_1$  und  $D_2$  aus elastischem Materiale beständen, so würde der Sachverhalt ein ganz anderer werden. Wenn die Stange  $AB$  dann nur dem kleinsten Horizontalschube oder auch einem nur wenig grösseren widerstehen könnte, so müsste sie unbedingt brechen. Denken wir uns nämlich, zunächst trete der kleinste Horizontalschub auf, so würde die ihm entsprechende Drucklinie durch den Punkt  $M$  gehen. Die Folge davon wäre ein Compression des Materials bei  $M$ , eine Verkürzung der Längen  $AM$  und  $BM$  und ein unbedeutendes Sinken des Punktes  $M$ . Dieser Vorgang wird aber nur dadurch möglich, dass sich  $AN$  und  $BN$  ebenfalls verkürzen, dass also auch ein Druck in  $N$  übertragen wird. Sobald in  $M$  und  $N$  gleichzeitig Druck übertragen wird, geht die Resultirende aus beiden Drücken durch irgend einen Punkt der Verbindungslinie  $MN$ . Dieser Punkt ist ein Punkt der jetzt wirklich auftretenden Drucklinie und der Horizontalschub dieser letzteren somit grösser, als jener kleinste Horizontalschub.

Der von der Construction in Wirklichkeit ausgeübte Horizontalschub lässt sich demnach nur mit Hilfe einer Betrachtung der elastischen Deformationen auffinden. Setzt man auch die Stange  $AB$  elastisch voraus, so wird dadurch die Drucklinie wieder weiter nach oben gerückt und der Horizontalschub entsprechend kleiner.

Zum eingehenden Studium des „Princips des kleinsten Widerstandes“ verweisen wir auf das bekannte Werk von Scheffler\*).

Es möge schliesslich noch erwähnt werden, dass man bei der Zugrundelegung des Principes des kleinsten Widerstandes zu dem Schlusse geräth, dass die Kanten in den Bruchfugen eine unendlich grosse Pressung erleiden müssen. Von da ab verfolgt aber Scheffler genau denselben Gedanken, der bei der Begründung der im folgenden § dargelegten Theorie massgebend war. Er schliesst, dass wegen der Pressbarkeit der Steine die Drucklinie weiter ab in das Gewölbe-Innere rücken werde

\*) Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.



und so ein anderer Gleichgewichtszustand als jener ideelle zu Stande käme. Dass er dabei das Abrücken der Drucklinie nur bis höchstens auf  $\frac{1}{4}$  der Fugenlänge zugehen will, erscheint ziemlich willkürlich. Wenn man zugeben will, dass ein Gewölbe nothwendig das Bestreben haben müsse, den durch die Drucklinie des kleinsten Schubes charakterisirten Gleichgewichtszustand anzunehmen, muss man allerdings folgern, dass bei einem sehr starren Wölbmaterialie die wirklich herrschende Drucklinie nur wenig von jener ideellen abweichen werde. Man muss aber beachten, dass sich der besondere Gleichgewichtszustand eines Gewölbes sofort nach der Ausrüstung resp. schon während derselben ausbildet. Zu jener Zeit ist aber der Mörtel noch nicht hinreichend erhärtet, um einen erheblichen Druck übertragen zu können. Die Erscheinung des Setzens der Gewölbe nach der Ausrüstung beweist deutlich, dass ein erhebliches Verdrängen und Comprimiren des Mörtels stattfindet. Mit Rücksicht hierauf erscheint die oben erwähnte Annahme Schefflers ganz unhaltbar. Betrachtet man den noch nicht vollständig erhärteten Mörtel als eine zähe Maasse, die nicht plötzlich, sondern allmählich dem grösseren Drucke weicht, um an minder gedrückte oder druckfreie Stellen überzugehen, so kommt man vielmehr zu dem Schlusse, dass sich die Drucklinie während des fortschreitenden Setzens immer mehr der Fugen-Mitte zu nähern sucht. Auf Grund dieser Ansicht ist die im folgenden § beschriebene Theorie der günstigsten Drucklinie aufgebaut. Allerdings werden dem wirklich verwendeten Mörtel solche ideelle Eigenschaften nur näherungsweise zukommen, wesshalb auch eine darauf gegründete Theorie nur eine Näherungstheorie sein kann. Namentlich wird der Grad der Erhärtung des Mörtels beim Ausrüsten auf die Genauigkeit derselben von Einfluss sein.

Im Allgemeinen verlangt eine nach den Schefflerschen Annahmen durchgeführte Berechnung etwas grössere Gewölbestärken, als sie durch die Theorie der günstigsten Drucklinie ermittelt werden, wenn man in beiden Fällen dieselben Material-Inanspruchnahmen anwendet. Würde man dagegen auf Grund zu machender Beobachtungen, die in letzter Instanz doch stets zu entscheiden haben

werden, für jede der beiden Theorien eine besondere zulässige Anspruchsname eines bestimmten Materiales aufstellen, so wären sie wohl recht gut hinsichtlich der praktischen Rechnungs-Resultate in Einklang zu bringen.

§ 60. Die günstigste Drucklinie. Die Theorie der günstigsten Drucklinie wurde u. W. zuerst von Culmann klar formulirt und mit überzeugenden Gründen nachgewiesen. Dieselbe Ansicht über den Gleichgewichtszustand der Gewölbe scheint übrigens schon vor ihm ziemlich allgemein verbreitet gewesen zu sein. Wenn z. B. Navier behauptet, ein Gewölbe, dem überhaupt nur die Möglichkeit geboten sei, sich im Gleichgewicht zu halten, werde sicherlich nicht einstürzen, so sagt er damit genau dasselbe, was die Theorie der günstigsten Drucklinie zu beweisen sucht.

Wir deuteten schon im vorigen § an, dass die Frage des Gleichgewichtszustandes der Gewölbe nur durch die Betrachtung der Form-Änderungen und Bewegungen, die die einzelnen Gewölbetheile unter dem Einfluss der Belastung erleiden, gelöst werden könne. Man kann zur Behandlung dieses Problems das Gewölbe als einen homogenen elastischen Bogen betrachten und mit Hilfe der Elasticitätsgesetze die Rechnung durchführen. Dabei gelangt man in der That zu ganz ähnlichen Schlüssen, wie sie sich auf Grund der hier dargelegten einfacheren Betrachtung ergeben. (Vergl. Culmann graphische Statik, 2. Aufl. 1. Band).

Wir sehen das Gewölbe nicht aus einem homogenen elastischen Materiale bestehend an, sondern setzen voraus, dass dasselbe aus einzelnen, wenig elastischen Wölbsteinen bestehe, zwischen deren Lager-Fugen irgend eine zähe (oder auch elastische) Schicht eingeschaltet sei, deren Hauptzweck es ist, die Unebenheiten der Lagerfugen auszugleichen und eine möglichst gleichmässige Druck-Uebertragung zu vermitteln. Darin besteht in der That die Haupt-Aufgabe der Mörtelschicht, die darum auch wohl sehr bezeichnend „das Mörtelbett“ genannt wird. Nur bei untergeordneten Constructionen sollte der Mörtel als „Bindemittel“ verwendet werden, d. h. die Fugen zur Uebertragung einer Zugspannung befähigen. Wie sich ein bekannter Lehrer der Baukunst einmal sehr drastisch ausdrückte, „soll der Architekt kein

Buchbinder sein“. Der Ingenieur soll es aber noch weniger sein. Die bei manchen Bauwerken anstatt des Mörtels zwischen die Fugen gelegten Bleiplatten an besonders stark gedrückten Stellen erfüllen ganz denselben Zweck.

Nehmen wir nun an, ein Gewölbe, das bereits mit seiner vollen Belastung versehen sei, werde ausgerüstet. Während des Ausrüstens wird der von den Lehrbögen auf die Gewölbeleibung übertragene senkrecht aufwärts gerichtete Druck allmählich kleiner als die an jener Stelle befindliche Belastung und es fängt sich eine Drucklinie auszubilden an, die zunächst der Differenz der Gewölbebelastung und des senkrecht aufwärts gerichteten Druckes des Lehrgerüsts entspricht. Bei einem richtigen Ausrüsten soll in jedem Augenblicke diese Differenz an jeder Stelle nahezu proportional der dort befindlichen Belastung sein. Nach Vollendung der Ausrüstung wird irgend eine bestimmte Drucklinie existiren, die sich vielleicht an einzelnen Stellen den Kanten in bedenklichem Grade nähert. Dass sie bei einem stabilen Gewölbe bereits aus dem Gewölbe-Querschnitt herausgetreten sei, lässt sich nicht annehmen. Würde sie nämlich an einigen Stellen eine der beiden Wöblinien schneiden, oder auch nur berühren, so würde dort ein unendlich grosser Druck erzeugt, der den Mörtel komprimirte und nach innen verdrängte. Dadurch würden aber auch die inneren Fugentheile in Berührung kommen und zu einer Druck-Übertragung genöthigt werden. Man sieht also, dass, wenn eine solche Drucklinie vermöge der besonderen Form des Gewölbe-Querschnitts überhaupt möglich ist, sich durch die Vorgänge des erstmaligen Setzens beim Ausrüsten eine solche ausbilden wird, die allenthalben im Gewölbe-Querschnitt verläuft.

Das Setzen des Gewölbes dauert aber erfahrungsmässig noch längere Zeit nach dem Ausrüsten fort. Während desselben erfährt die Drucklinie fortwährend Veränderungen; sie ist in steter Bewegung begriffen. Man wird sehr irren, wenn man annimmt, dass diese Bewegungen überhaupt jemals aufhören. Jede, wenn auch geringe Veränderung der Belastung und namentlich jede Veränderung der Temperatur wird eine geringe Veränderung des Gleichgewichtszustandes hervorbringen.

Immerhin werden wir annehmen dürfen, dass diese Veränderungen im Allgemeinen im Vergleich zu jenen, die während des Setzens stattfinden, unbedeutende sind.

Es wird sich nun fragen, welche besondere Gestalt die Drucklinie während der Vorgänge des Setzens sich anzunehmen bestreben wird. Dass bei den von uns vorausgesetzten Eigenschaften des Wölbmaterials ein Gesetz existiren wird, nach dem die Bewegungen der Drucklinie erfolgen und dass gewissermassen eine ideelle Drucklinie anzugeben sein wird, der sich die vorhandene, abgesehen von Neben-Umständen fortwährend zu nähern sucht, sieht man unmittelbar ein. Zunächst erkennt man, dass die Drucklinie während des Setzens in den Bruchfugen immer weiter von den Bruchkanten abrücken wird. Diesem Vorgange kann auf zweierlei Art Einhalt geboten werden. Entweder dadurch, dass der Mörtel an den Bruchkanten allmählich vollständig verdrängt wurde und die nackten Steine sich berühren, was wir indessen vorläufig nicht als möglich berücksichtigen wollen. Oder dadurch, dass die Drucklinie nunmehr an einer anderen Bruchfuge durch ein weiteres Vorrücken des ersterwähnten Punktes ins Gewölbe-Innere sich einer Kante so nähert, dass die dort entstehende Pressung ebenso gross ist, oder noch grösser würde, als die Kantenpressung in der ersten Bruchfuge.

Man erkennt daraus, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Drucklinie während des Setzens sich immer mehr jener Drucklinie zu nähern sucht, für die die Maximalkantenpressungen in den Bruchfugen einander gleich werden. Durch eine einfache Ueberlegung überzeugt man sich leicht, dass diese Drucklinie zugleich jene ist, für welche die Maximal-Kantenpressung den kleinsten Werth annimmt. Da das Material beim Auftreten dieser Drucklinie die geringste Anstrengung erfährt, wird sie die günstigste genannt.

Je weniger der Mörtel als verdrängbar angesehen werden darf, um so unvollkommener wird die Annäherung der sich ausbildenden Drucklinie an die günstigste sein. Am unvollkommensten wird diese Annäherung dann sein, wenn sich die Steine direkt berühren und keine elastische oder zähe Masse zwischen die Fugen eingeschaltet ist.

Allein auch in diesem Falle wird bei einem stabilen Gewölbe eine Regulirung der Drucklinie erfolgen, wenn diese an einigen Stellen eine die Materialfestigkeit übersteigende Pressung hervorruft; und zwar wird diese Regulirung eine Annäherung an die günstigste Drucklinie hervorrufen, so lange, bis die grösste vorkommende Pressung grade gleich der Materialfestigkeit geworden ist. Die zuerst auftretende Drucklinie hängt hier wie auch bei dem mit Mörtelfugen versehenen Gewölbe wesentlich von Neben-Umständen ab. Solche sind namentlich die nicht ganz genaue Bearbeitung der Lagerflächen der Wölbsteine, das mehr oder minder starke Eintreiben des Schlusssteines, das Nachgeben des Lehrgerüsts während des Einwölbens u. dgl. m.

Das Aufsuchen der günstigsten Drucklinie eines Gewölbes bei gegebener Belastung geschieht am Einfachsten auf dem Wege des Probirens. Gewöhnlich verzeichnet man zunächst eine durch die Mitten der Scheitel- und der Kämpferfugen gehende Drucklinie und sucht die Bruchfugen derselben auf. Hierauf rückt man in den Bruchfugen die Druck-Mittelpunkte so weit von den Kanten ab, dass man annehmen darf, die Materialpressung würde bei diesen Lagen der Angriffspunkte in den Bruchkanten gleich gross werden und konstruirt durch die so bestimmten Punkte eine neue Drucklinie. Wenn nöthig, kann man mit dieser wieder dieselbe Korrektur vornehmen. In der Regel wird man aber nach einer einmaligen Korrektur bereits eine für praktische Zwecke hinreichend genau mit der günstigsten zusammenfallende Drucklinie erhalten haben.

Es ist selbstverständlich, dass man, um der unvollkommenen Annäherung der wirklich auftretenden Drucklinie an die günstigste Rechnung zu tragen, die zulässige Pressung des Materials bei der Berechnung des Gewölbes etwas geringer annehmen wird, als dies bei anderen Constructionen, die eine schärfere Berechnung gestatten, zu geschehen pflegt.

§ 61. Den oben dargelegten Auseinandersetzungen bleibt noch Einiges hinzuzufügen für den Fall, dass ein Gewölbe, in dem sich bereits ein der permanenten Last entsprechender Gleichgewichtszustand endgültig ausgebildet hat, plötzlich mit einer neuen unregelmässig vertheilten

en Gewölbe  
venn diese  
ersteigende  
ulirung eine  
orrufen, so  
ung grade  
Die zuerst  
ei dem mit  
von Neben-  
nicht ganz  
Wölbesteine,  
lusssteines,  
Einwölbens

linie eines  
Einfachsten  
verzeichnet  
heitel- und  
sucht die  
an in den  
von den  
ialpressung  
te in den  
ruirt durch  
ie. Wenn  
e Korrektur  
nach einer  
eiche Zwecke  
nenfallende

der unvoll-  
n Drucklinie  
e zulässige  
es Gewölbes  
ei anderen  
gestatten,

ersetzungen  
ll, dass ein  
enten Last  
ausgebildet  
vertheilten

Last beschwert wird, wie dies z. B. beim Ueberfahren eines Eisenbahnzuges über eine gewölbte Brücke geschieht. Es wäre gänzlich unmotivirt, wenn man annehmen wollte, dass dann auch in jedem einzelnen Zeitpunkte die der betreffenden Laststellung entsprechende günstigste Drucklinie auftreten würde. Viel natürlicher erscheint es, anzunehmen, dass während des raschen Fortschreitens der Last bis zur Brücken-Mitte die Drucklinie sich in der jenseitig gelegenen Brückenhälfte nur wenig ändere, so dass also lediglich eine Herabdrückung des diesseits gelegenen Drucklinienzweiges stattfinden und die in der inneren Wöblinie gelegenen Bruchkanten eine vermehrte Anspruchnahme erfahren würden.

Die Untersuchung der in letzterem Falle eintretenden grössten Material-Anstrengung ist hauptsächlich bei Gewölben von Wichtigkeit, deren permanente Last die grösste mobile Belastung nicht bedeutend überwiegt. Als ungünstigste Laststellung ist hier die möglichst grosse Belastung der einen Brückenhälfte anzusehen.

Wie uns scheint, hat man bisher nicht überall das nöthige Gewicht auf diesen ungünstigsten Belastungsfall gelegt.

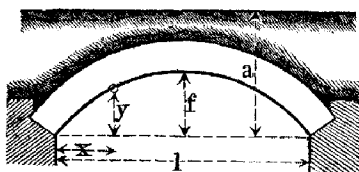
§ 62. Die günstigsten Gewölbe-Formen. Seit man sich über das Gleichgewicht der Gewölbe befriedigendere Rechenschaft zu geben wusste, suchte man auch die besonders wichtige Frage zu lösen, welche besondere Gestalt des Gewölbes für einen bestimmten konkreten Fall die vortheilhafteste sei. Unter der vortheilhaftesten Gewölbeform hat man dabei jene zu verstehen, deren Querschnitt bei einer festgesetzten zulässigen Anspruchnahme des Materiales ein Minimum wird. Man sieht leicht ein, dass diese Forderung nur von einem solchen Gewölbe erfüllt wird, dessen günstigste Drucklinie mit seiner Mittellinie zusammenfällt. Denn bei jeder anderen Gewölbeform liesse sich ohne Beeinträchtigung der Sicherheit in jenen Fugen, die nicht Bruchfugen sind, die Gewölbestärke vermindern. Für solche Gewölbeformen kann also der Querschnitt nicht, wie verlangt wurde, ein Minimum werden.

Wie man hiernach bei gegebener Sicherheit den kleinsten Material-Aufwand für ein Gewölbe nöthig hat, dessen Mittellinie mit der günstigsten Drucklinie zu-

sammenfällt, so wird andererseits für ein solches Gewölbe bei gegebenem Material-Aufwande die Sicherheit zu einem Maximum.

Die Projektirung eines solchen Gewölbes geschieht

Fig. 104.



ganz ähnlich wie die Construction der günstigsten Drucklinie auf dem Wege des Probirens. Die beiden Kämpferpunkte und die Pfeilhöhe sind dabei als gegeben anzusehen. Ist die Belastungsfläche

oben horizontal abgeglichen und sieht man die Mittellinie des Gewölbe-Querschnittes und die innere Wöblinie als kongruente Curven an, die in senkrechter Richtung parallel gegeneinander verschoben sind, so lässt sich die Gleichung der inneren Wöblinie des vorteilhaftesten Gewölbe-Querschnittes leicht in der folgenden Weise analytisch ermitteln. Man stelle die Bedingung auf, dass eine Drucklinie möglich sei, die mit der inneren Wöblinie zusammenfalle; dann gibt es der Voraussetzung zufolge auch eine solche, die mit der Mittellinie zusammenfällt.

Die Differenzial-Gleichung dieser Drucklinie lautet nach § 55  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{Q}$ , worin  $q = (a - y)$  zu setzen ist; also  $Q \frac{d^2y}{dx^2} = -a + y$ . Diese Gleichung lässt leicht dadurch integrieren, dass man  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy^1}{dy} \cdot y^1$  setzt, wenn  $y^1$  für  $\frac{dy}{dx}$  gesetzt wird. Durch Ausführung der Integration erhält man

$$y = a + C_1 e^{\frac{x}{\sqrt{Q}}} - C_2 e^{-\frac{x}{\sqrt{Q}}}$$

als Gleichung der inneren Wöblinie. Die Constanten  $Q$ ,  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen sich durch die Bedingung, dass die Curve durch den Scheitelpunkt und durch die beiden Kämpferpunkte gehen soll. Man hat also die Gleichungen

$$\text{für } x = 0, \text{ für } x = \frac{l}{2} \text{ und für } x = l$$

$$0 = a + C_1 - C_2$$

$$f = a + C_1 e^{\frac{l}{2\sqrt{Q}}} - C_2 e^{-\frac{l}{2\sqrt{Q}}}$$

$$0 = a + C_1 e^{\frac{l}{\sqrt{Q}}} - C_2 e^{-\frac{l}{\sqrt{Q}}}$$

Bezeichnet man der Kürze halber  $e^{\frac{l}{\sqrt{Q}}}$  mit  $\rho$ , so wird aus der ersten und dritten Gleichung

$$C_1 = -\frac{a}{\rho+1}; \quad C_2 = a \frac{\rho}{\rho+1}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die zweite Gleichung wird  $f = a \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{Q}}{\rho+1} \right\}$ .

Durch Auflösen nach  $\sqrt{Q}$  erhält man

$$\sqrt{Q} = \frac{a \pm \sqrt{2af - f^2}}{a - f}.$$

Der Werth von  $Q$  ergibt sich hierauf durch Einsetzen des Werthes von  $\rho$  in  $e^{\frac{l}{\sqrt{Q}}} = \rho$ , also  $Q = \left( \frac{l}{l_g \rho} \right)^2$ .

Wegen der Zweideutigkeit des Ausdruckes für  $\sqrt{Q}$  könnte man annehmen, dass zwei Lösungen der Aufgabe möglich wären. Nimmt man aber in dem Ausdrucke für  $\sqrt{Q}$  einmal das obere und dann das untere Wurzelvorzeichen und multiplicirt die beiden entstehenden Werthe miteinander, so kommt die Einheit heraus. Dasselbe gilt demnach auch von den beiden für  $\rho$  entstehenden Werthen. Die Logarithmen beider Werthe sind demnach einander gleich und haben nur verschiedenes Vorzeichen. Bei der Quadrirung erhält man daher für  $Q$  jedesmal denselben Werth. Ebenso überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung der Curve sich nicht ändert, wenn man an die Stelle von  $\rho$  den reciproken Werth von  $\rho$  setzt. Das zweite Glied der Funktion geht dadurch einfach in das dritte über und umgekehrt.

Für den Horizontalschub eines nach der günstigsten Wölblinie gestalteten Gewölbes, dessen Belastungsfläche oben horizontal abgeglichen ist, hat man demnach den eindeutigen Ausdruck

$$Q = \frac{l^2}{4 [l_g (a + \sqrt{2af - f^2}) - l_g (a - f)]^2},$$



der sich, wenn man die Belastungshöhe im Scheitel  $a - f$  mit  $\delta$  bezeichnet, auch schreiben lässt

$$Q = \frac{l^2}{4 [\log (a + \sqrt{a^2 - \delta^2}) - \log \delta]^2}.$$

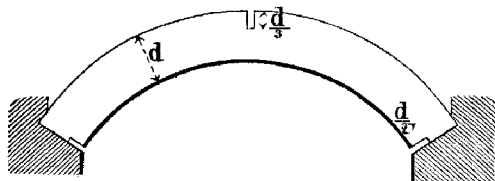
Die Logarithmen in diesem Ausdrucke sind natürliche, d. h. auf die Basis  $e = 2,718 \dots$  bezogen. Für Brigg'sche Logarithmen wird

$$Q = \frac{0,04715 l^2}{[\log (a + \sqrt{a^2 - \delta^2}) - \log \delta]^2}.$$

Man erhält hiernach  $Q$  ausgedrückt in einer Fläche. Um dasselbe in Kilogrammen zu bekommen, hat man einfach noch mit der Länge des Gewölbes und mit dem specifischen Gewichte der Belastung zu multipliciren.

§ 63. Zum Schlusse haben wir noch des von einigen Seiten gemachten Vorschlags zu erwähnen, bei der Herstellung des Gewölbes die unteren Drittel der Kämpferfugen, sowie das obere Drittel der Scheitelfuge offen zu lassen (vergl. Fig. 105) und dieselben erst einige Zeit

Fig. 105.



nach dem Ausrüsten mit Cement auszugießen. Dieser Vorschlag erscheint namentlich für den Fall sehr beachtenswerth, wenn das Gewölbe später noch eine Hinterschüttung oder eine sonstige Belastung bekommen soll, die die vorhandene Drucklinie nöthigt, sich mehr zu krümmen. Bei der Berechnung eines in dieser Weise auszuführenden Gewölbes muss natürlich darauf Rücksicht genommen werden, dass eine zulässige Drucklinie möglich sein muss, welche die leer bleibenden Fugentheile ohne Druck lässt.

Wenn man der Selbstregulirung des Gewölbes während des Setzens auf diese Weise zu Hülfe kommen will, wirft sich die Frage auf, an welchen Stellen und wo am

Scheitel

Rücken, wo an der Leibung man die Fugen am richtigsten offen lässt. Diese Frage ist im Allgemeinen dahin zu beantworten, dass die Bruchfugen auf der Seite der Bruchkanten und zwar so tief als möglich offen zu lassen sind.

atürliche,  
rigger'sche

Bei einem nach der günstigsten Drucklinie gestalteten Gewölbe erscheint diese Massregel ebenfalls ganz zweckmässig. Bei einem solchen ist es gleichgültig, welche Fugen offen bleiben.

Fläche.  
hat man  
mit dem  
eiren.

n einigen  
der Her-  
Kämpfer-  
offen zu  
nige Zeit

Dieser  
achtens-  
schüttung  
die die  
räumen.  
führenden  
nommen  
in muss,  
ek lässt.  
während  
en will,  
wo am

## Sechster Abschnitt.

### Dimensionen-Berechnung der Eisen- und Stahl- Constructionen.

§ 64. Im ersten Abschnitte dieses Werkes findet man ein von Navier zusammengestelltes sehr reichhaltiges Material zur Beurtheilung des Widerstandes fester Körper gegen eine Deformation. Bei der Durchsicht desselben mochte man glauben, dass spätere Untersuchungen daran nur wenig zu ändern vermögen würden. Bis vor zwei Decennien schien diese Frage ein für alle Male erledigt zu sein. Seitdem haben aber Dank den Untersuchungen Wöhlers die Ansichten über die Festigkeits-Eigenschaften der Bau-Materialien eine wesentliche Umgestaltung erfahren.

Man hat sich namentlich überzeugt, dass die früher üblichen Annahmen über die Umstände, die den Bruch unserer Constructions-Materialien herbeizuführen vermögen, durchaus unzutreffende und unvollständige waren. Die auf diese gestützten Berechnungen sind daher ebenfalls irrthümliche und nur den angewendeten vermeintlich sehr hohen Sicherheitsgraden ist es zu danken, dass die Unrichtigkeit der Berechnung nicht häufiger durch den Bruch der Constructionen documentirt wurde.

Man kann auch jetzt noch keineswegs behaupten, dass man über den Widerstand der Materialien gegen bleibende Deformationen für alle Fälle genau unterrichtet sei; jedenfalls haben wir aber davon jetzt eine weit genauere und eingehendere Kenntniss als vordem. Allerdings beziehen sich die bis jetzt in dieser Hinsicht angestellten Versuche auch nur auf die verschiedenen Eisensorten. Da aber grade die Eisen-Constructionen eine vergleichsweise sehr scharfe Berechnung der inneren Kräfte gestatten, ist die Kenntniss der Festigkeits-Eigenschaften dieser Materialien von besonderer Wichtigkeit.

Die bis jetzt gewonnenen Resultate lassen sich in wenigen Sätzen aussprechen, die durch einige Tabellen über die Zahlenwerthe illustriert, die ganze Grundlage der neueren Ansichten über die Festigkeits-Eigenschaften der Materialien bilden. Eine Aufgabe der sich hieran knüpfenden Theorie ist es, die Tabellen über die Versuchsergebnisse zur Aufstellung eines allgemeinen gültigen Annäherungsgesetzes zu benützen. In letzterer Hinsicht sind schon verschiedene Vorschläge gemacht worden. Wenn dieselben als eine endgültige Lösung der Frage auch bisher nicht anzusehen sind, so geben sie doch für die Praxis sehr wichtige und schätzenswerthe Anhaltspunkte ab. In der jüngsten Zeit fanden sie denn auch eine stets wachsende Anerkennung und Verbreitung und der Zeitpunkt dürfte nicht mehr ferne sein, an dem die allgemeine Anwendung auch gesetzlich vorgeschrieben wird.

Eine erschöpfende Darlegung dieses Gegenstandes kann hier nicht in unserer Aufgabe liegen. Noch weniger beabsichtigen wir, zu den vorhandenen Theorien etwas Neues hinzuzufügen. Wir werden uns vielmehr mit einigen kurzen Andeutungen begnügen, die hinreichend sind, um als Grundlage beim Construiren und Entwerfen benützt werden zu können.

§ 65. Aus den von Wöhler angestellten Versuchen ergab sich das folgende Gesetz:

Der Bruch des Materiales kann dadurch herbeigeführt werden, dass eine Beanspruchung, die es bei einmaliger Einwirkung nicht zu zerstören vermag, sich häufig wiederholt.

Je geringer die sich wiederholende Beanspruchung ist, desto mehr Wiederholungen sind zur Zerstörung erforderlich. Indessen lässt sich eine gewisse Grenze angeben, unter der eine Beanspruchung bei beliebig häufiger Wiederholung keinen Bruch mehr herbeizuführen vermag.

Nach den Vorschlägen von Weyrauch resp. Launhardt nennt man die Beanspruchung, welche bei einmaliger Einwirkung den Bruch herbeiführt, die Tragfestigkeit, jene Maximal-Beanspruchung, die das Material in Abwechslung mit dem spannungslosen Zustande beliebig oft zu ertragen vermag, die Ursprungs-

festigkeit und schliesslich jene grösste Beanspruchung, die von dem Material in Abwechslung mit einer konstanten Minimalspannung beliebig oft ertragen wird, die Arbeitsfestigkeit.

Die Ursprungs- und die Tragfestigkeit sind bei jedem Materiale von vornherein angebbare konstante Grössen, die als gegeben anzusehen sind. Die Arbeitsfestigkeit dagegen ist von der Grösse der kleinsten Beanspruchung abhängig, die stets noch im Materiale zurückbleibt und muss für jeden Fall besonders berechnet werden. Ihre Ermittlung ist die nächste Aufgabe der Theorie.

Bei früheren Versuchen ermittelte man stets nur die Tragfestigkeit des Materiales für die verschiedenen Beanspruchungsarten (Zug, Druck und Schub). Ueber die Grösse derselben geben die von Navier angegebenen Tabellen für alle Bau-Materialien genügenden Aufschluss. Die Ursprungsfestigkeit des Schmied-Eisens ergibt sich nach den Wöhler'schen Versuchen zu 2190 bis 2920 Kil. pro □cm. Brauchbarer als diese Zahlen ist die Angabe des Verhältnisses zwischen der Ursprungs- und der Tragfestigkeit einer Eisensorte. Winkler findet mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, dass für Schmied-Eisen die Ursprungsfestigkeit im Mittel  $= 0,55$  der Tragfestigkeit zu setzen sei. Für Gussstahl ergibt sich diese Verhältnisszahl zu 0,44.

Ueber die Ursprungsfestigkeit für Druck- und Schub-Beanspruchung ist man bis jetzt noch nicht näher unterrichtet, da es an bezüglichen Versuchen fehlt. Man ist desshalb einstweilen darauf angewiesen, über diese Beanspruchungen dieselben Verhältnisszahlen anzunehmen, wie sie sich für die Beanspruchung auf Zug ergeben.

§ 66. Ermittlung der Arbeitsfestigkeit. Die Beanspruchung des betrachteten Materiales möge zwischen den Grenzen  $k_{min}$  und  $k_{max}$  schwanken. Vermag das Material diese Beanspruchungen in beliebig häufiger Wiederholung grade noch auszuhalten, so bilden sie beide zusammen die Arbeitsfestigkeit des Materiales, denn eine Veränderung von  $k_{max}$  sowohl als  $k_{min}$  allein vermag den Bruch bei genügend häufiger Wiederholung des Spannungswechsels herbeizuführen. Man pflegt indessen nur  $k_{max}$  diesen Namen beizulegen.

uchung,  
er kon-  
wird, die

ei jedem  
Grössen,  
estigkeit  
uchung  
eibt und  
n. Ihre

ets nur  
iedenen  
Ueber  
gebenen  
schluss.  
ibt sich  
20 Kil.  
Angabe  
er Trag-  
t Hülfe  
chmied-  
55 der  
bt sich

Schub-  
r unter-  
Man ist  
diese  
nehmen,  
eben.

t. Die  
zwischen  
ag das  
äufiger  
e beide  
n eine  
vermag  
ag des  
dessen

Aus den Versuchen geht zunächst hervor, dass für den Fall der Arbeitsfestigkeit  $k_{max}$  grösser wird, wenn  $k_{min}$  sich vergrössert. Für den Grenzfall  $k_{min} = k_{max}$  nehmen beide ihren grössten Werth, nämlich jenen der Tragfestigkeit des Materiales an. Die Abhängigkeit der Werthe von  $k_{max}$  und  $k_{min}$  lässt sich durch eine Vergleichung der Versuchsergebnisse erkennen. Der Bequemlichkeit halber suchte man einen algebraischen Ausdruck dieses Abhängigkeitsverhältnisses aufzustellen, der eine genügende Uebereinstimmung mit den Versuchsreihen zeigt.

Für den Fall der Arbeitsfestigkeit (d. i. für den Grenzfall, dass  $k_{min}$  und  $k_{max}$  in beliebiger Wiederholung grade noch ertragen worden, während eine einseitige Vergrösserung von  $k_{max}$  resp. eine einseitige Verkleinerung von  $k_{min}$  bei genügender Wiederholung den Bruch herbeiführen würde), sei  $k_{min}$  mit  $C$  und  $k_{max}$  mit  $A$  bezeichnet. Es ist  $A$  als Funktion von  $C$  darzustellen und zwar so, dass sich eine genügende Uebereinstimmung mit den Versuchen zeigt. Diese Aufgabe wurde von verschiedenen Autoren in verschiedener Weise zu lösen gesucht.

Winkler macht die einfachste Annahme und setzt

$$A = U + \alpha C$$

worin  $\alpha$  und  $U$  Constanten bedeuten, die nur vom Materiale abhängen. Die Constante  $U$  ist nichts anderes als die Ursprungsfestigkeit. Um gute Uebereinstimmung mit den Versuchen zu erhalten, setzt Winkler für Schmied-Eisen  $U = 0.55 T$ , wenn mit  $T$  die Tragfestigkeit bezeichnet wird und  $\alpha = 0.45$ ; für Gussstahl  $U = 0.44 T$ ,  $\alpha = 0.56$ . Damit wird

$$\text{für Schmiedeseisen } A = 0.55 T + 0.45 C$$

$$\text{für Gussstahl } A = 0.44 T + 0.56 C.$$

Diese Formeln gelten zunächst nur für Zug-Beanspruchung. Doch können sie auch noch für negatives  $C$  (wenn nämlich  $C$  Druckspannung ist) verwendet werden, vorausgesetzt, dass der Absolutwerth von  $C$  kleiner als der Werth von  $A$  bleibt. Ist die dem Absolutwerth nach grösste Grenzspannung ein Druck, so nimmt Winkler die Formeln an

$$\text{für Schmied-Eisen } A = 0.60 T + 0.40 C.$$

$$\text{für Gussstahl } A = 0.37 T + 0.63 C$$

worin  $T$  die Tragfestigkeit für Druck bedeutet.  $C$  ist zunächst ebenfalls als Druck vorausgesetzt, kann aber auch einen Zug bedeuten, wenn es nicht grösser wird als  $A$ . Im letzteren Falle ist natürlich  $C$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen einzuführen.

Für Beanspruchung auf Schub glaubt Winkler als Annäherung setzen zu dürfen

$$\text{für Schmied-Eisen } A = 0.55 T + 0.45 C$$

$$\text{für Gussstahl } A = 0.44 T + 0.56 C$$

legt aber diesen Formeln selbst keinen grossen Werth bei.

Launhardt sieht die Arbeitsfestigkeit als Funktion der Spannungs-Differenz  $\Delta$  an und setzt  $A = \alpha \Delta$ , wenn  $\Delta = A - C$ . Den Coefficienten  $\alpha$  wählt er so, dass die Formel für die Grenzfälle, nämlich für  $\Delta = 0$  und für  $\Delta = U$  richtig bleibt und setzt  $\alpha = \frac{T-U}{T-A}$  also

$$A = \frac{T-U}{T-A} (A - C) \text{ oder nach } A \text{ aufgelöst}$$

$$A = \frac{U}{2} + \sqrt{\frac{U^2}{4} + C(T - U)}.$$

Um gute Uebereinstimmung mit den Versuchen zu erhalten, hat man zu setzen

$$\text{für Schmied-Eisen } U = \frac{6}{11} T = 0.545 T$$

$$\text{für Gussstahl } U = \frac{5}{11} T = 0.454 T.$$

Mit diesen Werthen geht die Formel für  $A$  über in die beiden

$$\text{für Schmied-Eisen } A = U \left(1 + \frac{5}{6} \varepsilon\right)$$

$$\text{für Gussstahl } A = U \left(1 + \frac{6}{5} \varepsilon\right)$$

wenn  $\varepsilon$  das Verhältniss der beiden Grenzspannungen bezeichnet. Um die Einwirkung von Stössen zu berücksichtigen, empfiehlt Launhardt noch, den Coefficienten von  $\varepsilon$  in der Formel für Schmied-Eisen  $= \frac{1}{2}$  und in der Formel für Gussstahl  $= \frac{3}{4}$  zu setzen.

Die Launhardt'sche Formel gilt nur für den Fall, dass  $A$  und  $C$  beide gleichzeitig entweder Zug- oder Druck sind. Für den Fall entgegengesetzter Anspruchnahme empfiehlt er, nach dem Vorgange amerikanischer Constructeure, den Stab unter Zugrundelegung der Summe der Absolutwerthe beider Grenzspannungen auf einfache Tragfestigkeit zu berechnen.

Weyrauch suchte eine der Launhardt'schen analoge Formel für den Fall wechselnder Anspruchnahme in entgegengesetztem Sinne aufzustellen. Da es bis jetzt an entsprechenden Versuchen fehlt, erscheint jedoch die Wahl derselben ziemlich willkürlich und bedarf noch der Bestätigung. — Werden die beiden Grenzspannungen, zwischen denen die Anspruchnahme wechselt, auch in diesem Falle mit  $C$  und  $A$  bezeichnet, wobei  $A$  den grösseren Werth und entgegengesetztes Vorzeichen als  $C$  haben soll, so setzt Weyrauch

$$A = U \left\{ 1 + \frac{S-U}{U} \frac{C}{A} \right\}$$

wenn  $S$  die sog. Schwingungsfestigkeit, d. i. die Arbeitsfestigkeit für den Fall bedeutet, dass die beiden Grenzspannungen gleich und entgegengesetzten Vorzeichens sind. In die Formel sind nur die Absolutwerthe, nicht die Vorzeichen der Spannungen einzuführen. Weyrauch setzt voraus, dass es für den Fall der Arbeitsfestigkeit gleichgültig ist, welche der beiden Spannungen  $C$  und  $A$  Zug und welche Druck ist. (Dieselbe Voraussetzung macht übrigens auch Winkler).

Nach  $A$  aufgelöst, gibt die Formel von Weyrauch

$$A = \frac{U}{2} + \sqrt{\frac{U^2}{4} + (S - U) C}.$$

Die Schwingungsfestigkeit wird man, wie die Ursprungsfestigkeit, für jede Materialgattung einfach proportional der Tragfestigkeit setzen können. Aus den von Winkler aufgestellten Formeln ergibt sich für Schmied-Eisen  $S = 0.38 T$ , für Gussstahl  $S = 0.28 T$ , worin  $T$  die Tragfestigkeit für Zug bedeutet. Weyrauch setzt, um sicher zu gehen,  $U = 0.5 T$  und  $S = \frac{1}{5} U$  oder abgerundet  $S = \frac{1}{2} U = 0.25 T$  für Schmied-Eisen, also sehr viel weniger als Winkler. Für Stahl setzt Weyrauch (nach zur Sicherheit gemachten Abrundungen)  $U = 0.55 T$  und  $S = 0.30 T$ .

Gerber sieht die Spannungs-Differenz  $A - C = \Delta$  als Funktion von  $C$  an und denkt sich die Curve konstruirt, deren Abscissen  $C$  und deren Ordinaten  $\Delta$  darstellen.  $\Delta$  wird dabei stets positiv in Rechnung gebracht. Diese Linie muss die Abscissen-Achse in 2 Punkten schneiden, nämlich wenn  $C =$  der positiven



resp. negativen Tragfestigkeit wird. Es liegt desshalb nahe, eine Curve 2ten Grades und am einfachsten eine Parabel vorauszusetzen. Mit Hülfe verschiedener Voraussetzungen und mit Rücksicht auf eine gute Uebereinstimmung mit den Versuchen, bestimmt Gerber die Coefficienten dieser Parabelgleichung. Lös't man dieselbe nach  $A$  auf, so erhält man

$$A = \sqrt{13 T^2 + 12 CT} - C - 3 T.$$

Derselben Entwicklung stimmt auch Schäffer zu, der dieselbe nur in etwas anderer Weise zur Berechnung der Dimensionen verwerthet.

§ 67. Dimensionen-Berechnung. Die auf Grund einer der im vorigen § gegebenen Formeln durchzuführende Dimensionen-Berechnung beruht auf der Ansicht, dass man, um  $n$ -fache Sicherheit zu haben, so konstruiren müsse, dass die  $n$ -fache Minimalspannung  $= C$  und die  $n$ -fache Maximalspannung  $= A$  werde. Hat man etwa den Querschnitt  $F$  eines Stabes zu bestimmen, dessen Grenzsparnungen  $P_{min}$  und  $P_{max}$  sind, so setze man  $F = nf$ , worin  $f$  die mindestens nöthige Querschnittsfläche bedeutet. Zur Bestimmung von  $f$  hat man

$$C = \frac{P_{min}}{f}; \quad A = \frac{P_{max}}{f}; \quad A = \varphi(C)$$

wobei das Funktionszeichen  $\varphi$  irgend eine der im vorigen § aufgezählten Formeln bedeutet. In diesen 3 Gleichungen kommen die Unbekannten  $C$ ,  $A$  und  $f$  vor, die sich daraus leicht bestimmen lassen. Die Querschnittsfläche  $F$  ergibt sich darauf durch Multiplication von  $f$  mit  $n$ . Für  $n$  setzt man, um Uebereinstimmung mit bisher ausgeführten bewährten Eisenconstructions zu erhalten, etwa 2,8 bis 3, für Stahl wird eine um einige Decimalen grössere Zahl empfohlen. Gerber und Schäffer wählen  $n$  etwas geringer, etwa  $= 2,2$ , multipliciren aber zur Berücksichtigung von Stössen die durch die zufällige Last hervorgebrachte Spannung mit 1,5.

Die Ausführung einer Dimensionen-Berechnung dürfte nach dem bisher Gesagten keiner Schwierigkeit unterliegen. Welche der für  $A$  angegebenen Formeln man bei derselben benützen will, erscheint, bis weitere Versuche vorliegen, ziemlich gleichgültig.

Zu weiteren Studien empfehlen wir

Winkler, Wahl der zulässigen Anspruchnahme der Eisen-Constructionen, Zeitschrift des österr. Architekten- und Ingenieur-Vereins 1877. Separat-Abdruck. Wien 1877.

Launhardt, Anspruchnahme des Eisens, Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins 1873.

Weyrauch, Festigkeit der Eisen-Construction. Leipzig 1876.

Gerber, Zulässige Spannungen der Eisen-Construction. Zeitschrift des Baierischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 1874. Separat-Abdruck, München 1874.

Schäffer, Bestimmung der zulässigen Spannungen in Eisen-Constructionen. Erbkams Zeitschrift 1874.

Wöhler, Festigkeits-Versuche. Erbkams Zeitschrift 1870. Separat-Ausgabe 1870.

esshalb  
n eine  
Voraus-  
berein-  
er die  
n die-

u, der  
chnung

ie auf  
durch-  
nsicht,  
truiren  
nd die  
n etwa  
dessen  
e man  
chnitts-

vorigen  
nungen  
e sich  
äche  $F$   
mit  $n$ .  
er aus-  
halten,  
imalen  
wählen  
er zur  
fällige

dürfte  
unter-  
n man  
rsuche